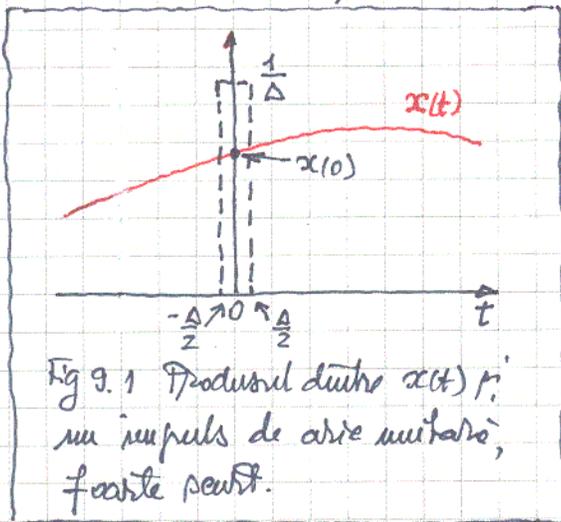


9. Esantionarea semnalelor.

Discretizarea variației în timp a semnalelor, numită esantionare, este o etapă importantă în prelucrarea numerică a semnalelor. Vom aborda problema esantionării semnalelor de bandă limitată în problema reconstruirii semnalelor analogice din semnalul esantionat.

9.1 Teorema esantionării.

Vom aborda esantionarea ideală a unui semnal analogic $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$. Vom considera produsul dintre semnal și un impuls de durată Δ neglijă.



Este, așa cum se arată în figura 9.1.

Impulsul de arie unitară are expresia:

$$u_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \left[\sigma\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right] \quad (9.1)$$

dimensiunea sa fiind $[1/\text{sec}]$. Pe durata Δ semnalul nu variază esențial, dacă $\Delta \rightarrow 0$, așa că putem scrie:

$$x(t) u_{\Delta}(t) \cong x(0) u_{\Delta}(t) \quad (9.2)$$

Dacă plasăm impulsul $u_{\Delta}(t)$ la momentul de timp kT_e , atunci (9.2) devine:

$$x(t) u_{\Delta}(t - kT_e) \cong x(kT_e) u_{\Delta}(t - kT_e). \quad (9.3)$$

Dacă $x(t)$ se măsoară în Volt, produsul $x(t) u_{\Delta}(t)$ se măsoară în Volt/sec. Membrul drept al relației (9.3) este un impuls scurt, axat pe momentul kT_e dar are aria $x(kT_e)$, cât este valoarea lui $x(t)$ la $t = kT_e$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(kT_e) u_{\Delta}(t - kT_e) dt = x(kT_e) \quad (9.4)$$

Esantionul de semnal $x(kT_e)$ este aria impulsului produs.

Putem esantiona semnalul $x(t)$ cu un tren de impulsuri foarte scurte, de arie unitară, și plasate la toate momentele de timp kT_e :

$$x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{\Delta}(t - kT_e) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) u_{\Delta}(t - kT_e) \quad (9.5)$$

Dacă facem ca Δ să tindă la zero avem, în mod evident:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mu_{\Delta}(t) = \delta(t) \quad ; \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_{\Delta}(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) = \delta_{T_e}(t) \quad (9.6)$$

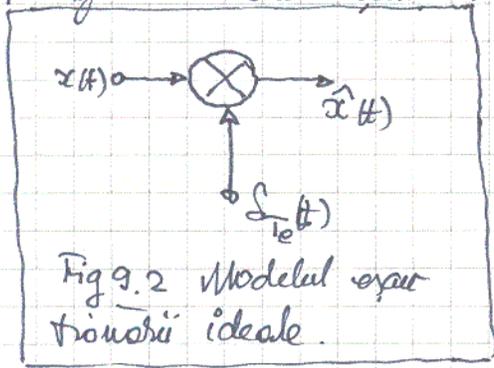
În aceste condiții relația (9.5) devine:

$$x(t) \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (9.7)$$

Semnoul

$$\hat{x}(t) = x(t) \delta_{T_e}(t) \quad (9.8)$$

se spune că este esantionatul ideal al semnalului $x(t)$. El se obține, așa



cum se arată în figura 9.2 prin simpla înmulțire a semnalului analogic $x(t)$ cu distribuția

Dirac periodică, de perioadă T_e , $\delta_{T_e}(t)$.

Impulsurile Dirac, plasate la momente de timp kT_e , vor avea ca arie valorile sem-

nalului la momentele kT_e , $x(kT_e)$, numite în esantioanele semnalului analogic.

9.1.1 Spectrul semnalului esantionat ideal se calculează ușor, cunoscând

că:

$$\delta_{T_e}(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_e}) \quad ; \quad \frac{2\pi}{T_e} = \omega_e \quad (9.9)$$

și aplicând teorema produsului:

$$\begin{aligned} \hat{X}(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t) \delta_{T_e}(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_e}) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_e}) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k \frac{2\pi}{T_e}) \end{aligned} \quad (9.10)$$

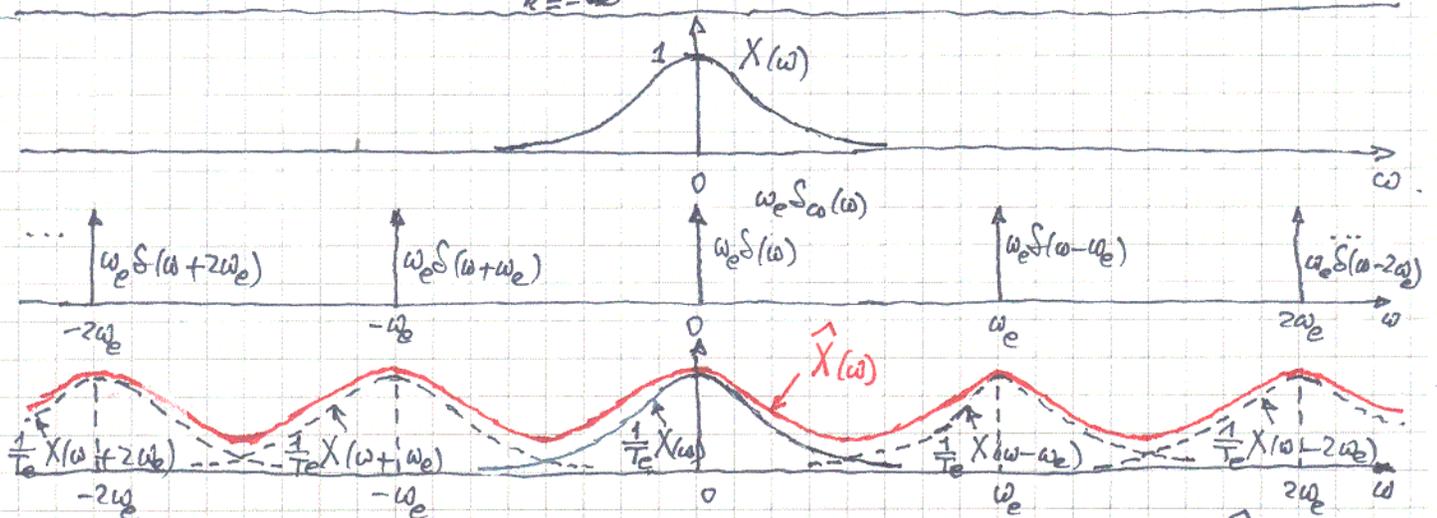


Fig 9.3 Spectrul semnalului inițial, $X(\omega)$ și spectrul după esantionare, $\hat{X}(\omega)$

Așa cum se vede în din figura 9.3 spectrul semnalului esantionat, $\hat{X}(\omega)$ apare prin însumarea unor lobi spectrali, $\frac{1}{T_e} X(\omega - k\omega_e)$, indexați după k . Din $\hat{X}(\omega)$ nu se mai poate reconstrui spectrul semnalului inițial $X(\omega)$, deoarece lobi spectrali au produs o "amestecare" spectrală, cunoscută sub denumirea în propriu de "aliere". Oricât de mic ar fi T_e , deci oricât s-ar distanța între ei lobi spectrali, aceste erori de aliere rămân, chiar dacă se diminuează, dacă $X(\omega)$ nu are suportul mărginit adică dacă $x(t)$ nu este un semnal de bandă limitată.

9.1.2 Teorema esantionării semnalelor de bandă limitată. Ne vom referi la semnale $x(t)$ cu spectrul de bandă ω_M , așa cum se arată în figura 9.4.

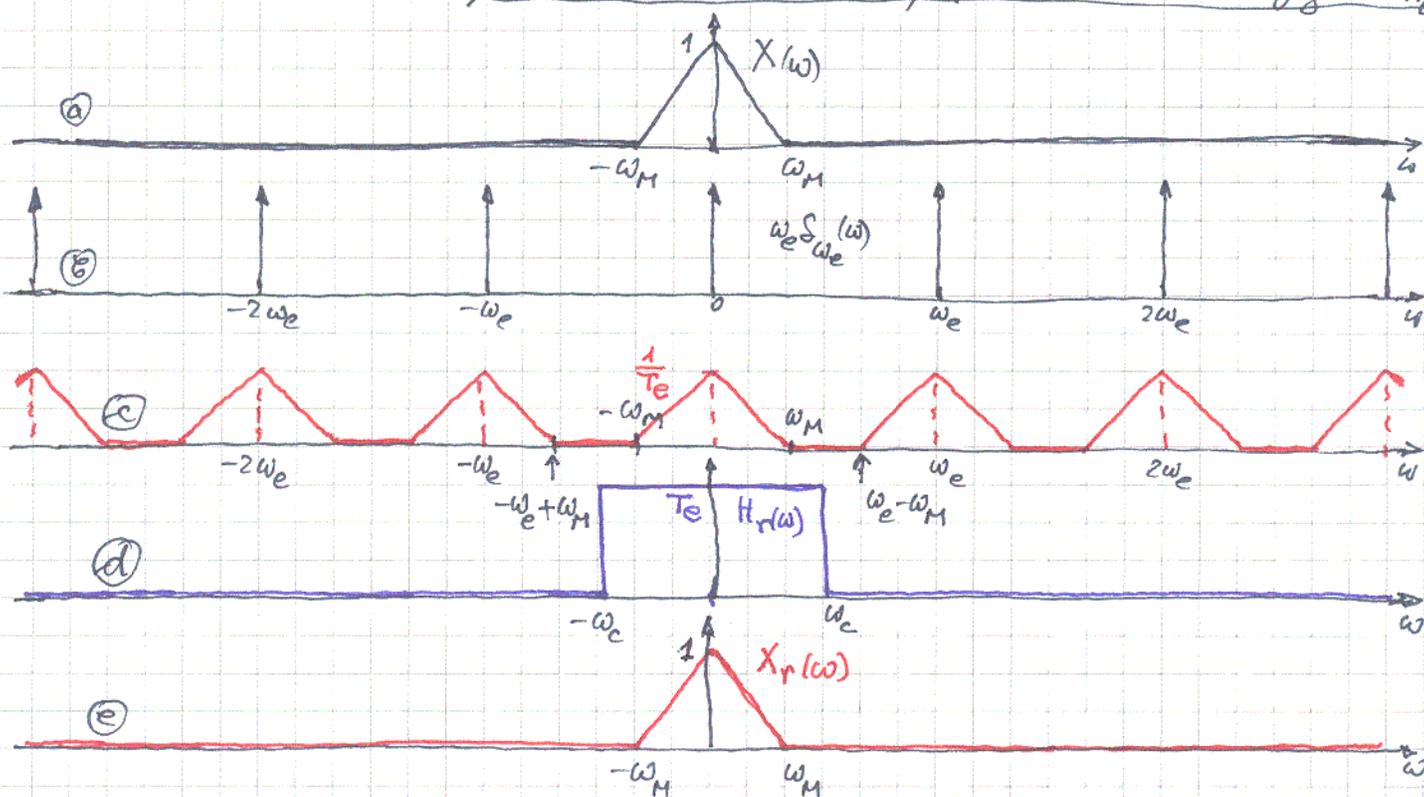


Fig 9.4. a) Spectrul semnalului de bandă limitată. b) Spectrul semnalului $S_{T_e}(t)$ ce efectuează esantionarea cu $\omega_e > 2\omega_M$. c) Spectrul $\hat{X}(\omega)$, al semnalului $\hat{x}(t)$ ce a fost obținut în urma esantionării. d) Răspunsul în frecvență $H_r(\omega)$ al filterului de reconstrucție ideal. e) Spectrul semnalului reconstruit $X_r(\omega)$ identic cu $X(\omega)$, dacă $\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_e - \omega_M$ și dacă $|H_r(\omega)| = T_e$. Rezultă că semnalul $x_r(t)$ este aproape peste tot identic cu semnalul inițial, $x(t)$.

Dacă

$$\omega_M \leq \omega_e - \omega_M$$

sau

$$\omega_e \geq 2\omega_M$$

(9.11)

nu apar erorile de "aliere". - figura 9.4c. Servindu-ma de un filtru trece-jos ideal, cu frecvența de tăiere ω_c și amplitudinea în banda T_e :

$$H_r(\omega) = T_e p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_e & , |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (9.12)$$

pentru care

$$\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_e - \omega_M \quad (9.13)$$

se obține prin filtrarea semnalului eșantionat $\hat{x}(t)$ semnalul reconstruit

$$x_r(t) = \hat{x}(t) * h_r(t) \quad (9.14)$$

sau

$$\begin{aligned} X_r(\omega) &= \hat{X}(\omega) \cdot H_r(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_e) T_e p_{\omega_c}(\omega) \\ &= X(\omega) \end{aligned} \quad (9.15)$$

Dor $X_r(\omega) = X(\omega)$, spectre egale, implică egalitatea aproape peste tot a semnalului reconstruit, $x_r(t)$ cu semnalul inițial, $x(t)$:

$$x_r(t) = x(t) \quad , \quad a.p.t. \quad (9.16)$$

Dați nu se respectă condiția de eșantionare (9.11), are cum se dovedește și în figura 9.5, apar erorile de "aliere". Semnalul inițial nu mai

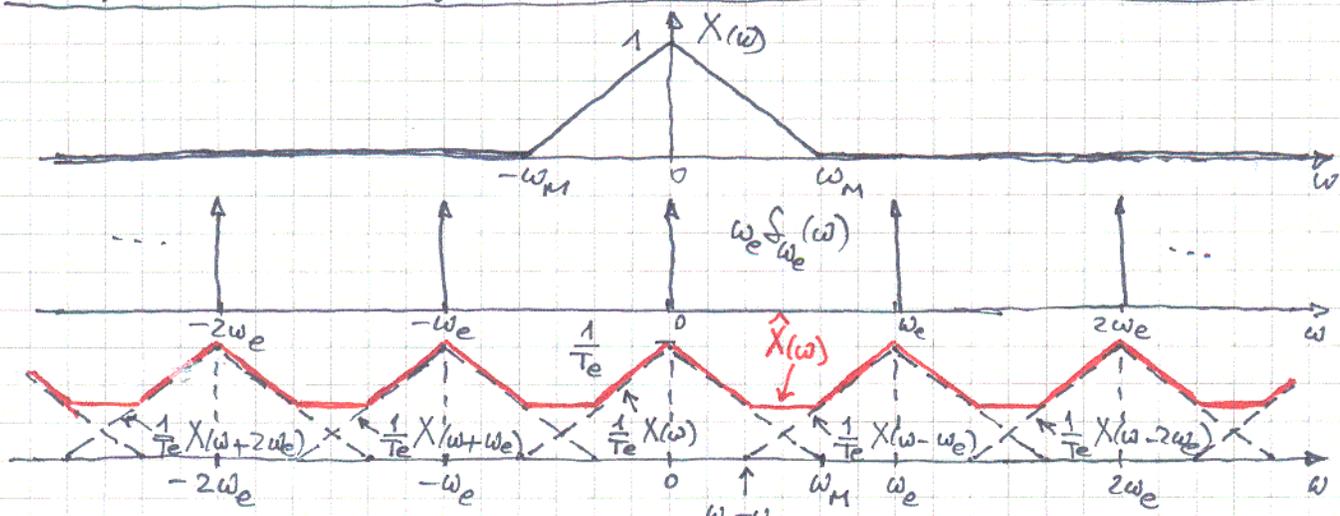


Fig 9.5 Eșantionarea unui semnal de bandă limitată dar cu $\omega_e - \omega_M < \omega_M$, fără respectarea condiției $\omega_e \geq 2\omega_M$. Se vede că apar "alierări" la nivel spectral. Semnalul inițial nu mai poate fi reconstruit din eșantioanele sale

poate fi reconstruit din eșantioanele sale.

Vom observa că

$$h_r(t) = T_e \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \longleftrightarrow T_e p_{\omega_c}(\omega) = H_r(\omega) \quad (9.17)$$

și deci formula (9.14) se poate scrie, după cum urmează:

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= h_r(t) * \hat{x}(t) = T_e \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) T_e \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} * \delta(t - kT_e) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) T_e \frac{\sin \omega_c (t - kT_e)}{\omega_c (t - kT_e)} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_c}{\omega_e} x(kT_e) \frac{\sin \omega_c (t - kT_e)}{\omega_c (t - kT_e)} \quad (9.18)
 \end{aligned}$$

Frecvența de esantionare minimă este

$$\omega_e = 2\omega_M \quad (9.19)$$

și poartă denumirea de frecvență de esantionare Nyquist. Dacă esantionăm la frecvența Nyquist (minimă), formula de reconstrucție a semnalului devine

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \frac{\sin \omega_M (t - kT_e)}{\omega_M (t - kT_e)} \quad (9.20)$$

deci avem

$$\omega_M = \omega_c = \omega_e - \omega_M$$

sau

$$\omega_c = \omega_M = \frac{\omega_e}{2} \quad (9.21)$$

Rezultatele obținute până în acest moment pot fi sintetizate sub forma teoremei esantionării, cunoscută și sub denumirea de teorema WKS (Whittaker, Kotelnikov, Shannon):

Dacă semnalul $x(t)$ este de lauda limitată la ω_M , în sensul că $X(\omega) = 0$ pentru $|\omega| > \omega_M$, atunci $x(t)$ este unic determinat de mulțimea esantioanelor sale $\{x(nT_e) | n \in \mathbb{Z}\}$, dacă

$$\omega_e \geq 2\omega_M$$

adică frecvența de esantionare este cel puțin dublul frecvenței maxime.

În condiție de mai sus, semnalul inițial $x(t)$ se poate reconstrui din esantioanele sale, a.p.t. prin relația

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \frac{2\omega_c}{\omega_e} \frac{\sin \omega_c (t - kT_e)}{\omega_c (t - kT_e)} \quad (9.18)$$

cu condiția ca ω_c să fie astfel ales încât să satisfacă relația

$$\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_e - \omega_M \quad (9.13)$$

După cum se vede, semnalul se poate reconstrui din carbele de tipul $\frac{\sin x}{x}$. Pentru cazul esantionării la frecvența Nyquist, $\omega_e = 2\omega_M$, este valabilă formula de reconstrucție (9.20). În figura 9.6 se arată

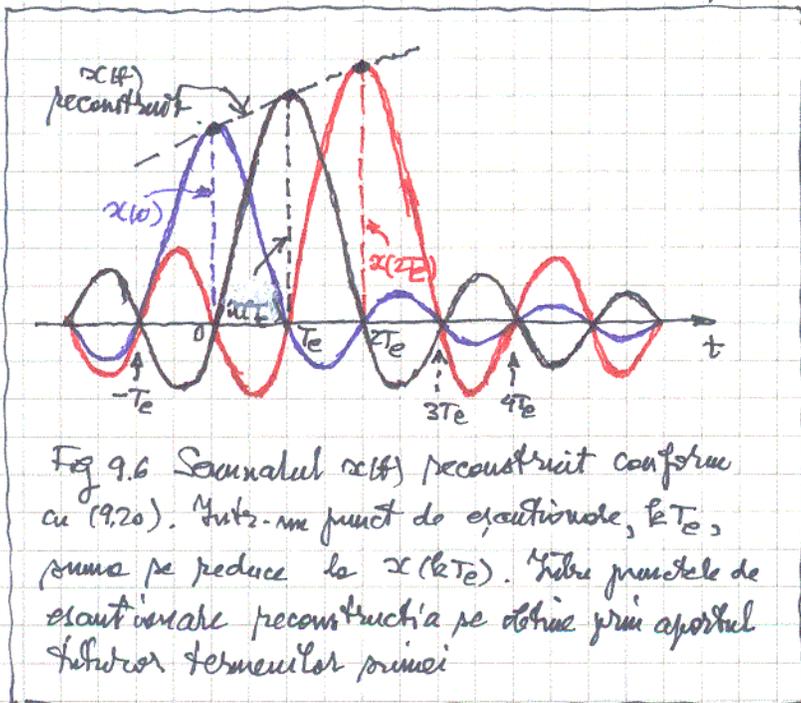


Fig. 9.6 Semnalul $x(t)$ reconstruit conform cu (9.20). Într-un punct de esantionare, kT_e , suma se reduce la $x(kT_e)$. Într-o punctele de esantionare reconstrucția se obține prin aportul tuturor termenilor sumei

modul în care se reconstruiește semnalul $x(t)$ din esantioanele sale. În punctele de esantionare $t = nT_e$ un singur esantion de frecvență semnalului:

$$x(nT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \frac{\sin \omega_M T_e (n-k)}{\omega_M T_e (n-k)} \quad (9.22)$$

Dacă (9.20) a fost derivată pentru $\omega_M = \frac{\omega_e}{2}$ (și deci $\omega_M T_e = \pi$)

$$\omega_M T_e = \pi \quad (9.23)$$

asa că, punând (9.23) în (9.22) obținem că:

$$x(nT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \frac{\sin \pi (n-k)}{\pi (n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta_{n,k} = x(nT_e)$$

unde $\delta_{n,k}$ este simbolul Kronecker:

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n=k \\ 0, & \text{pentru } n \neq k \end{cases}$$

Într-o punctele de esantionare semnalul este reconstruit prin contribuția unui număr micșorat de termeni din suma (9.20).

Operația de reconstruire a semnalului se mai numește și interpolare.

Este posibilă și o reconstruire aproximativă a semnalului $x(t)$ recurgând

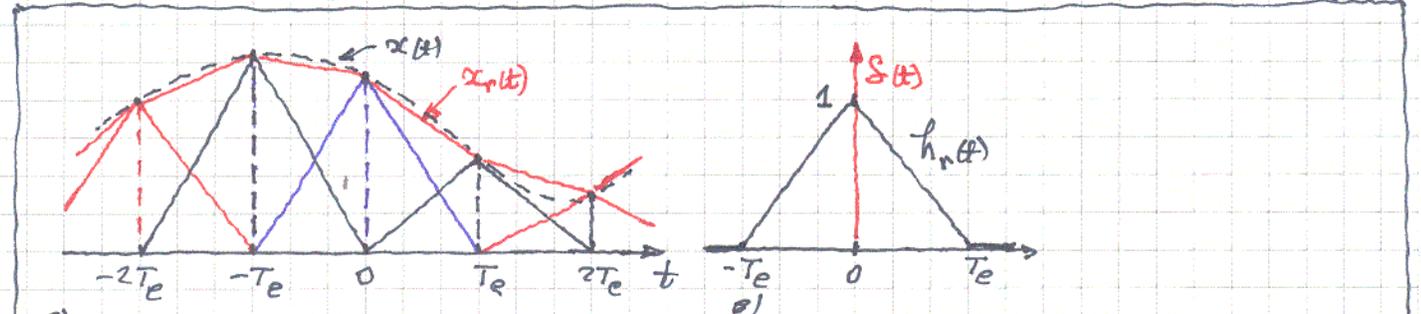
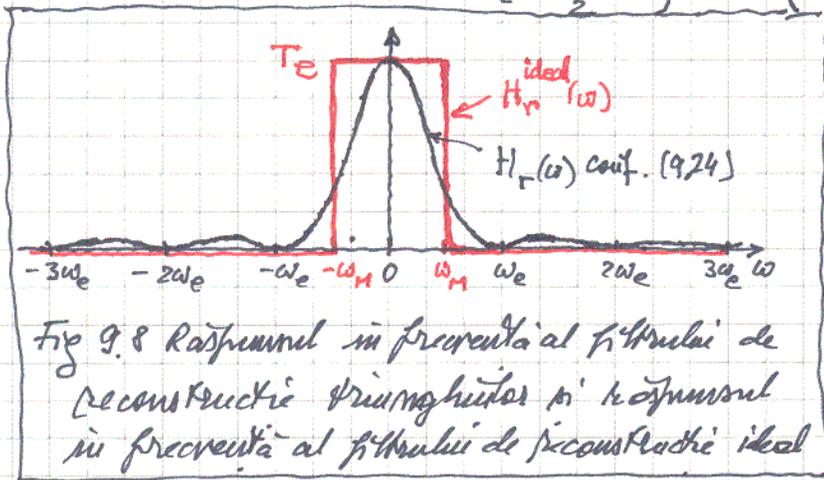


Fig. 9.7a) Interpolarea liniară între esantioanele aproximative ale semnalului $x(t)$ prin linii drepte. b) Răspunsul la impuls, $h_r(t)$ al filtrului de reconstrucție.

la numerele punctelor determinate de valorile esantioanelor cu segmente de dreaptă, așa cum se arată în figura 9.7a). Semnalul reconstruit, $x_r(t)$ este

doar aproximativ egal cu periodul inițial $x(t)$. Răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție se vede imediat, analizând figura 9.7a și el este dat în figura 9.7b. Răspunsul său în frecvență se determină urm.

$$H_r(\omega) = T_e \left(\frac{\sin \frac{\omega T_e}{2}}{\frac{\omega T_e}{2}} \right)^2 = T_e \left(\frac{\sin \frac{\omega}{\omega_e} \pi}{\frac{\omega}{\omega_e}} \right)^2 \quad (9.24)$$



În figura 9.8 este arătat răspunsul în frecvență al filtrului de reconstrucție triunghiular, (9.24), comparativ cu răspunsul în frecvență al filtrului de reconstrucție ideal. Se observă că erorile de reconstrucție

sunt justificabile.

Ca urmare a necaracteristicii filtrului triunghiular din figura 9.7b se recurge la întârzierea cu T_e a răspunsului la reconstrucție. Astfel filtrul devine causal.

Site punctată în reconstrucția prin extrapolare de ordinul zero, așa cum se arată în figura 9.9a. Valoarea erantionului curent se menține până la

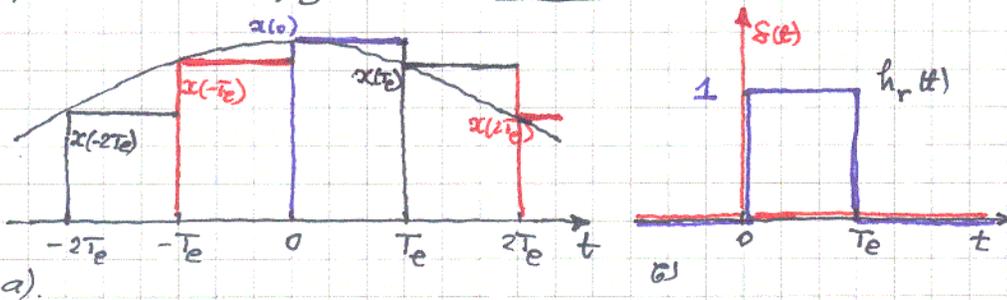


Fig 9.9 a) Reconstrucția prin extrapolare de ordinul zero b) Răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție

apărând valoarea nouă a excitației. Filtrul de reconstrucție are răspunsul la impuls arătat în figura 9.9b. Răspunsul său în frecvență se determină după cum urmează:

$$h_r(t) = \int_{\frac{T_e}{2}}^{t - \frac{T_e}{2}} \delta(\tau) d\tau \longleftrightarrow e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega T_e}{2}}{\omega} = e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} T_e \frac{\sin \frac{\omega T_e}{2}}{\frac{\omega T_e}{2}}$$

$$H_r(\omega) = e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} T_e \frac{\sin \frac{\omega T_e}{2}}{\frac{\omega T_e}{2}} = e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} T_e \frac{\sin \frac{\omega}{\omega_e} \pi}{\frac{\omega}{\omega_e}} \quad (9.25)$$

Modulul răspunsului în frecvență este $T_e \left| \frac{\sin \frac{\omega T_e}{2}}{\frac{\omega T_e}{2}} \right|$ și este arătat în

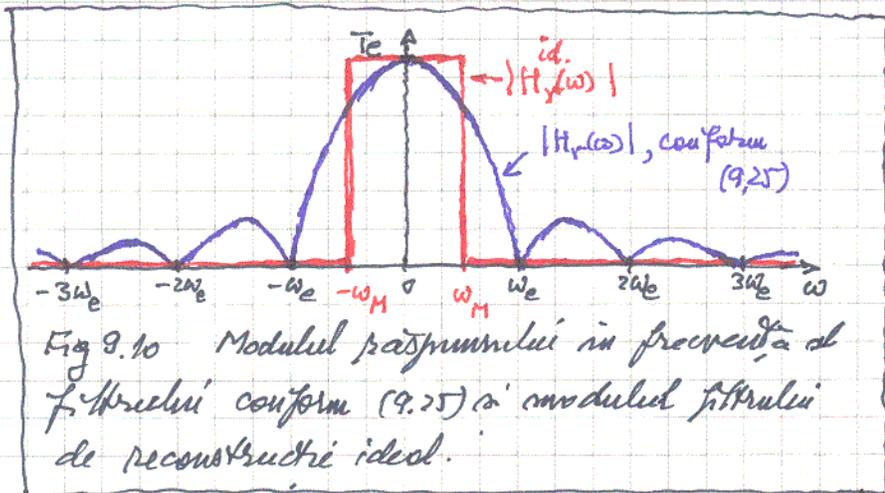


Fig 9.10 Modulul răspunsului în frecvență al filtrului conform (9.25) și modulul filtrului de reconstrucție ideal.

figura 9.10, comparativ cu modulul răspunsului în frecvență al filtrului ideal de reconstrucție. Se observă că diferențele dintre filtre sunt puțin semnificative, ceea ce face ca ni' eroarea de reconstrucție să fie puțin (26)

ne fie mai:

Spectrul semnalului reconstruit, $X_r(\omega)$ este:

$$X_r(\omega) = X(\omega) H_r(\omega) = \left(\frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_e) \right) T_e e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_e}} \frac{\sin \pi \frac{\omega}{\omega_e}}{\pi \frac{\omega}{\omega_e}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_e}} \frac{\sin \pi \frac{\omega}{\omega_e}}{\pi \frac{\omega}{\omega_e}} X(\omega - k\omega_e) \quad (9.26)$$

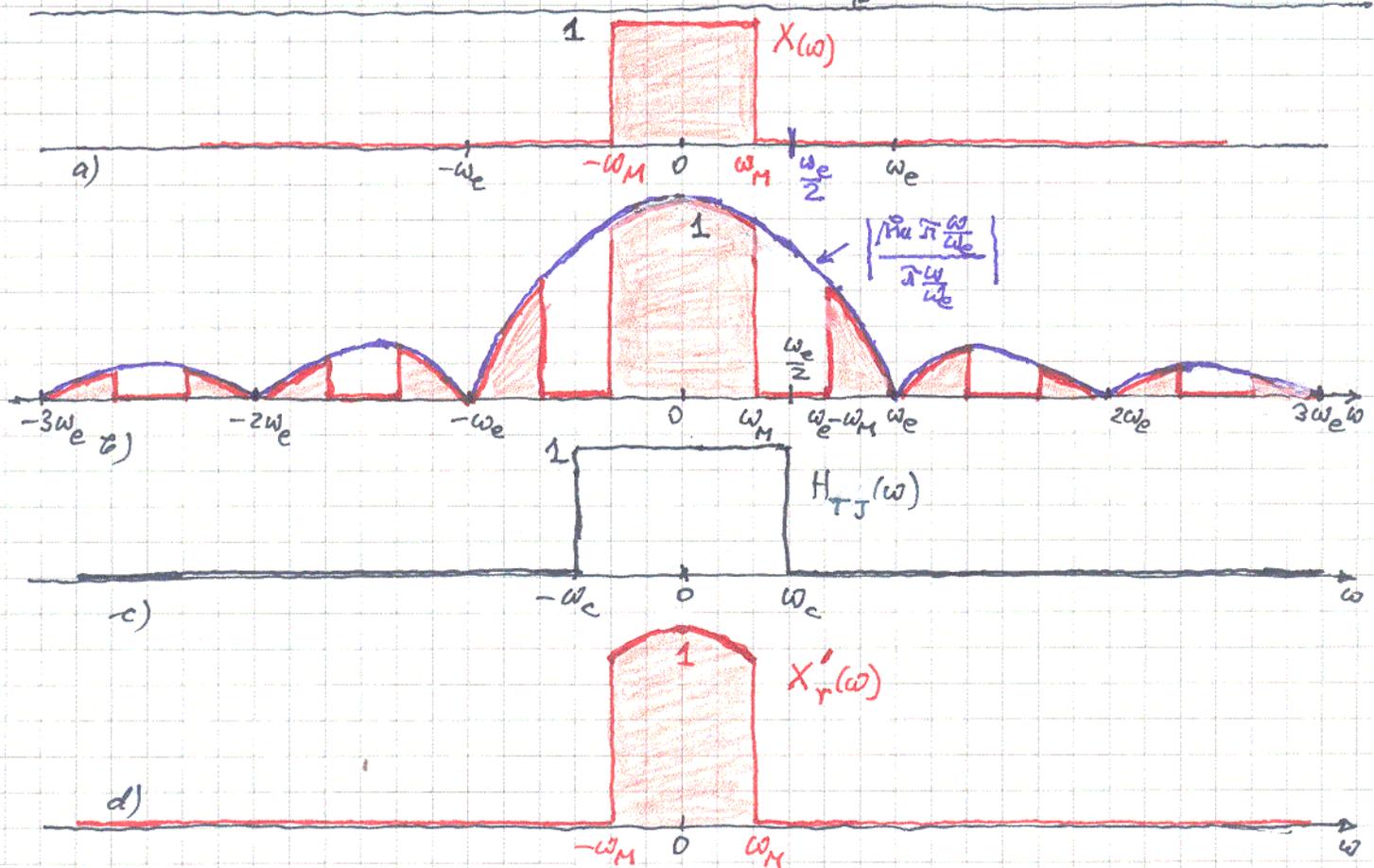


Fig 9.11 a) Spectrul semnalului inițial, $X(\omega)$ b) Spectrul după esantionare și extrapolare de ordin zero c) Filtru TJ ideal de separare a lobului central din spectrul lui $X_r(\omega)$ d) Lobul central filtrat spre jos ideal, $X_r'(\omega)$. El diferă de $X(\omega)$, spectrul semnalului inițial

În figurile 9.11a și 9.11b se prezintă $X(\omega)$ și $|X_r(\omega)|$ după esantionare

și reconstrucție prin extrapolare de ordinul zero. Se observă că lobii spectrali sunt puternic deformați. Chiar dacă, după reconstrucția de ordin zero am aplica un filtru suplimentar, T J ideal, așa

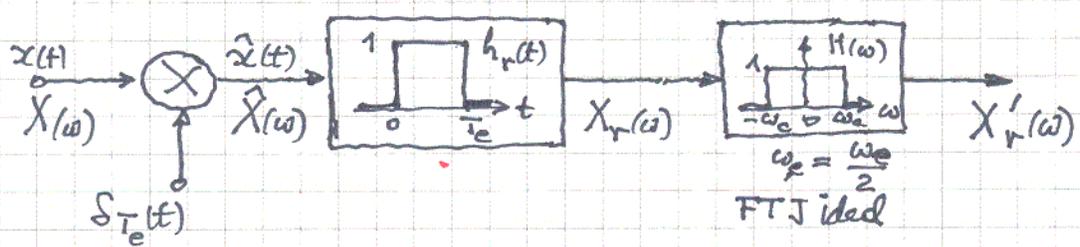


Fig 9.12 Explicativă la figura 9.11.

cum se arată în figura 9.12, nu am putea recupera semnalul inițial, x(t). Evident pentru $\omega_e \gg 2\omega_M$ erorile ce apar în lobul central pot fi mult diminuate.

9.2 Exantionarea ideală a semnalelor periodice.

Vom considera cazul semnalelor periodice de bandă limitată la a N-a armonică. Cel mai mare frecvență din spectrul lor este

$$\omega_M = N\omega_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (9.27)$$

ω_0 fiind frecvența fundamentală. Se exantionează semnalul cu o frec-

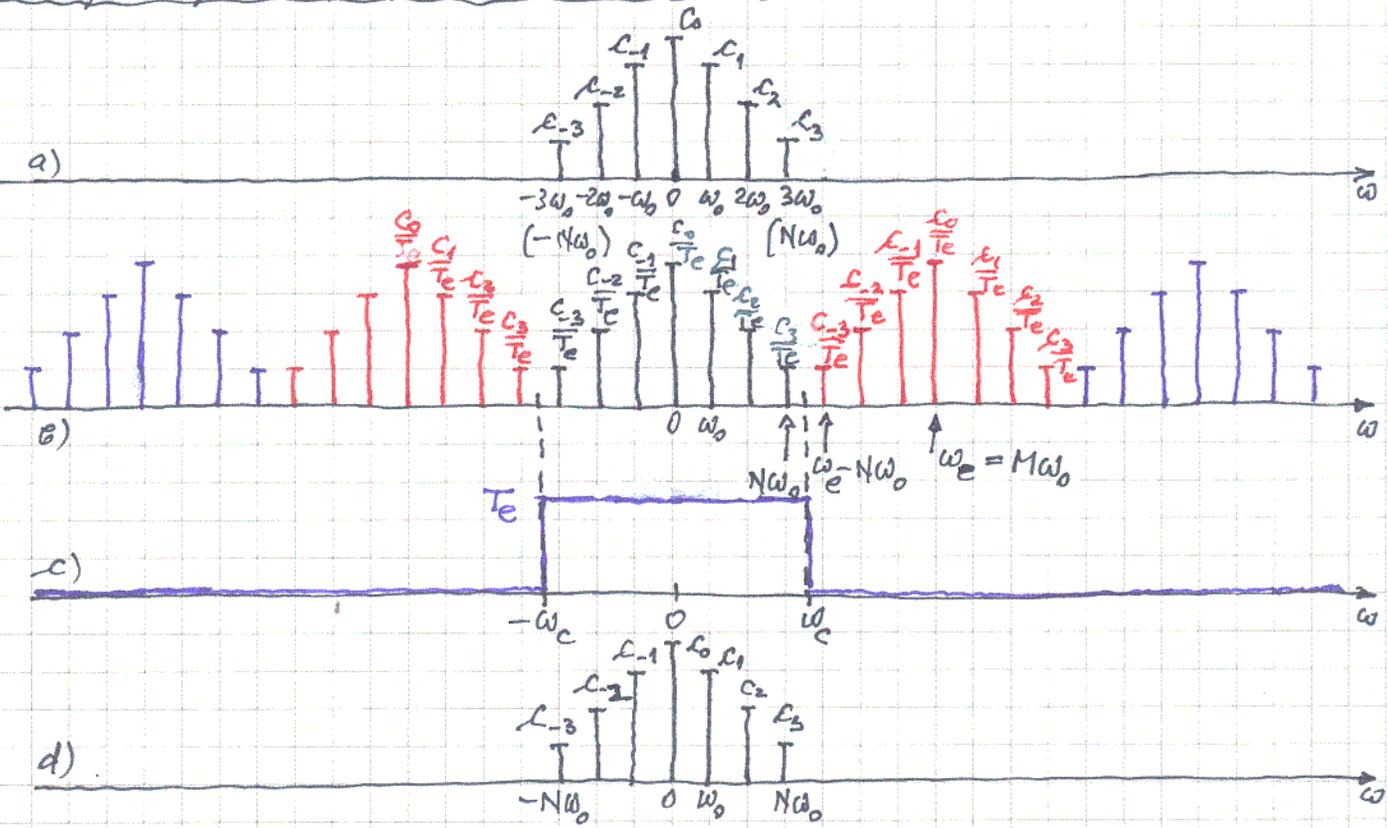


Fig 9.13. a) Spectrul de amplitudini al semnalului inițial, cu $\omega_M = N\omega_0$. b) Spectrul de amplitudini al semnalului după exantionare, dacă ω_e se află în relație armonică cu fundamentală. După exantionare semnalul va fi tot periodic. c) Filtru de reconstrucție d) Spectrul de amplitudini al semnalului reconstruit.

reunță ω_e aflată în raport de numere întregi cu ω_0 , astfel semnalul esanțio not rămânând și el periodic.

Fie un cot simplu, în care, așa cum se arată și în figura 9.13,

$$\omega_e = M\omega_0, \quad M \in \mathbb{N}. \quad (9.28)$$

Pentru ca să nu apară interferența lobilor spectrali - vezi figura 9.13 - este necesar ca :

$$N\omega_0 < \omega_e - N\omega_0 = \omega_0(M-N)$$

Diferența dintre $\omega_0(M-N)$ și $N\omega_0$ trebuie să fie de forma

$$\omega_0(M-N) - N\omega_0 = R\omega_0, \quad R = 1, 2, \dots$$

sau

$$\frac{\omega_e M}{\omega_e} = (2N + R)\omega_0$$

adică

$$\omega_e = (2N + R)\omega_0 = 2\omega_M + R\omega_0; \quad R = 1, 2, \dots \quad (9.29)$$

Pentru cazul din figura 9.13 $N\omega_0 = 3\omega_0$ și deci

$$\omega_{\min} = 2 \cdot 3\omega_0 + \omega_0 = 7\omega_0$$

și în general

$$\omega_{\min} = (2N + 1)\omega_0 = 2\omega_M + \omega_0 \quad (9.30)$$

Filtrând trece jos semnalul esanțio not cu un filtru trece jos ideal, așa cum se arată și în figura 9.13 c

$$H_r(\omega) = T_e f_{\omega_e}(\omega) = \begin{cases} T_e & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}; \quad N\omega_0 < \omega_c < \omega_e - N\omega_0 \quad (9.31)$$

se obține spectrul semnalului inițial și deci se reconstituie $x(t)$, semnalul inițial.

Dacă nu dorim ca după esanțio not semnalul să rămână periodic este necesar, pentru a evita apariția orbitelor de alicie, să avem

$$\omega_e - N\omega_0 > N\omega_0$$

sau

$$\omega_e > 2N\omega_0 = 2\omega_M \quad (9.32)$$

Spre deosebire de semnalele aperiodice unde $\omega_e \geq 2\omega_M$, pentru semnalele periodice trebuie să esanțio notăm astfel încât $\omega_e > 2\omega_M$. Altfel

după pe perioada celui mai rapid component din spectru trebuie să prelevăm mai mult de două esanțio notări. Dacă esanțio notarea nu menține periodicitatea atunci pe perioada celui mai rapid component spectrale

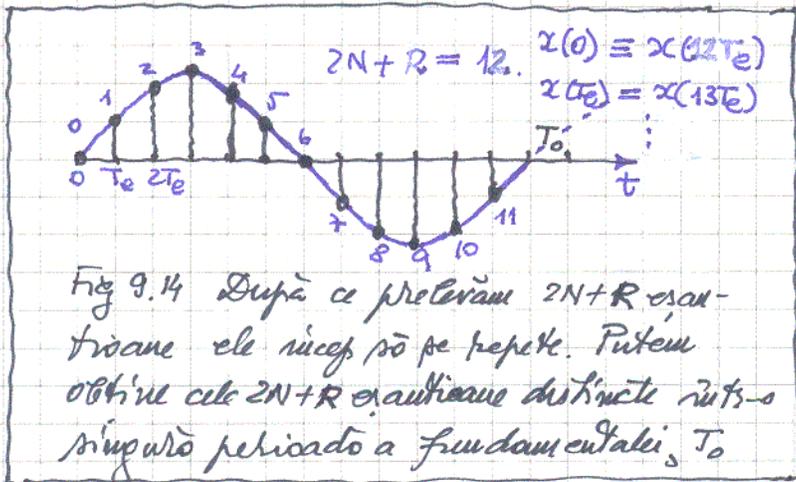
trebuie să prelevăm 3 esantioane (cel puțin).

Observație. Dacă T_0 este perioada fundamentală și esantionarea se face conform cu (9.29) atunci

$$\frac{2\pi}{T_e} = (2N+R) \frac{2\pi}{T_0}$$

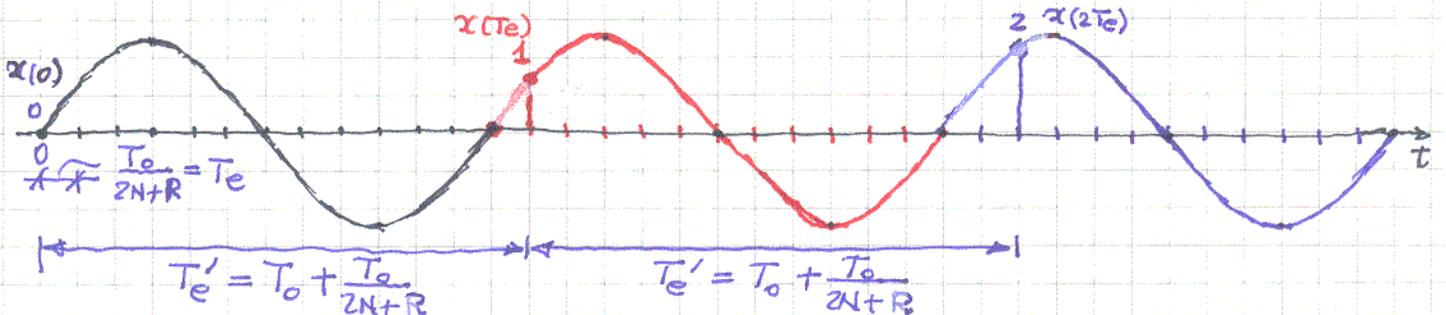
sau

$$T_e = \frac{T_0}{2N+R} \quad ; \quad R=1, 2, \dots$$



Așa cum se arată în figura 9.14 doar $2N+R$ esantioane pot fi distincte, ca urmare a periodicității punctului după esantionării. Ele pot fi prelevate, foarte, într-o singură perioadă a fundamentalei T_0 .

Acelor rezultată în jurul unei obține și așa cum se arată în figura 9.15; esantioanele succesive se prelevează din perioade diferite. În general putem scrie, fiindcă știm



de periodicitatea punctului $x(t)$ cu T_0 că

$$x(kT_e) = x(T_0 + kT_e) = x(kT_0 + kT_e)$$

și deci

$$T_e' = kT_0 + kT_e = kT_0 + \frac{1}{2N+R}T_0$$

sau

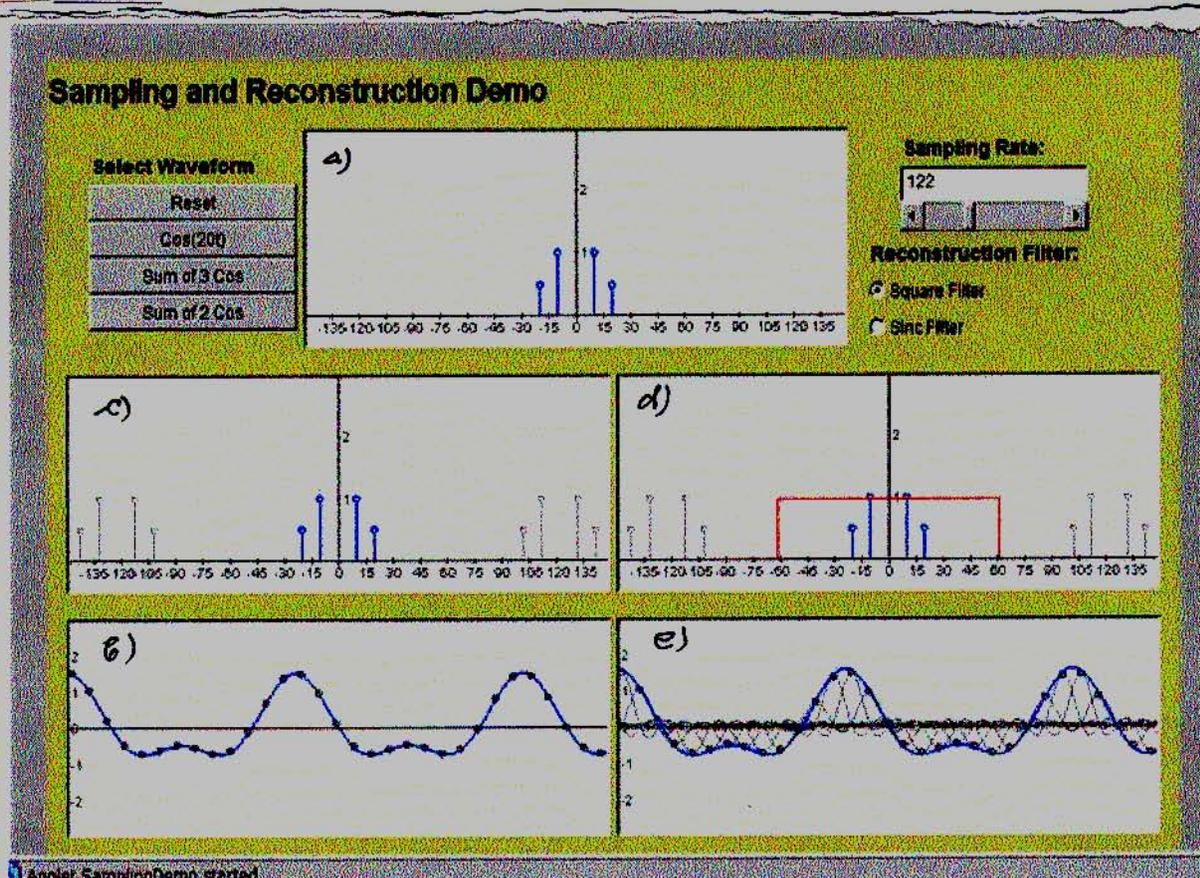
$$T_e' = \left(k + \frac{1}{2N+R}\right)T_0 \quad ; \quad k=0, 1, 2, \dots \quad ; \quad R=1, 2, \dots \quad (9.33)$$

Această proprietate este valorificată în construcția osciloscopelor cu esantionare

* * *

În figura 9.16 se arată un applet, afișat la adresa :

[http://www.ece.gatech.edu/research/ccss/education/Java/1998.Fall/Projects/leong lewandowski/bin/applet.html](http://www.ece.gatech.edu/research/ccss/education/Java/1998.Fall/Projects/leong%20lewandowski/bin/applet.html)



Applet SamplingDemo started

Fig. 9.16 Applet pentru studiul esantionării și reconstructiei semnelor periodice. a) Semnal periodic cu $f_0 = 10 \text{ Hz}$ și $f_M = 2f_0 = 20 \text{ Hz}$. b) Semnalul periodic și esantioanele prelevate. c) Spectrul semnelului esantionat d) Filtrarea ideală a spectrului semnelului esantionat e) Semnalul reconstruit din esantioane. Veți observa formula $\sin(x)/x$ ce conduce la reconstrucție.

Cu ajutorul căruia se pot evidenția anumite aspecte ale esantionării semnelor periodice.

În figura 9.17 se prezintă un alt applet, indicat pentru ilustrarea problematicei ridicate de esantionarea semnelor analogice. Evident, există și alte appleturi dedicate temei de esantionare.

9.3 Relații energetice.

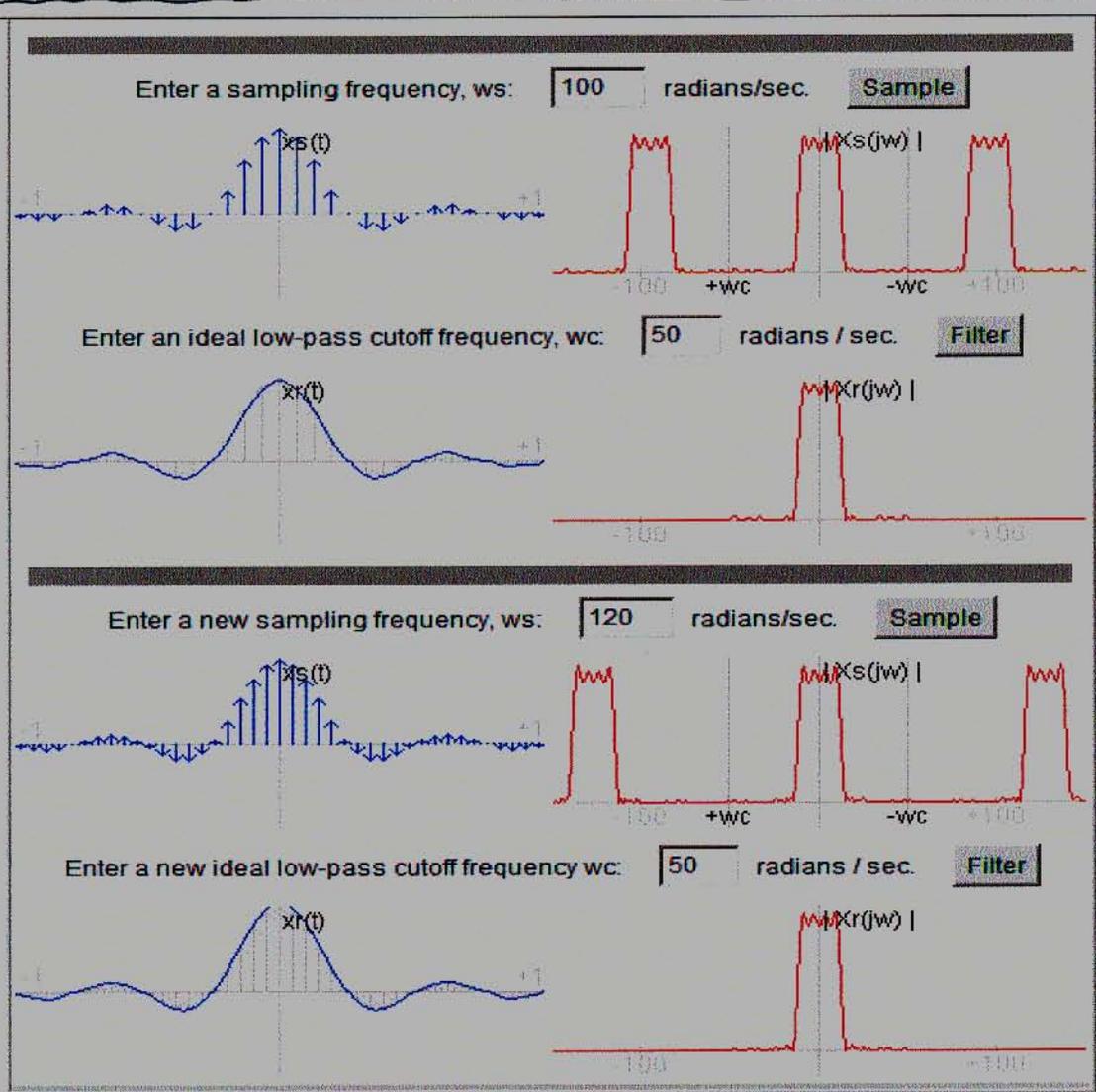
Se poate arăta că pentru semnale aperiodice esantionate este adevărată relația de tip Rayleigh:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = T_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(kT_e)|^2 \quad (9.34)$$

Pentru semnale periodice esantionate este valabilă relația de tip

PaŃ general:
$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |x(kT_e)|^2; M = 2N+R, R=1,2,\dots (9.35)$$

Energia sau puterea pot fi calculate fie din formula de variaŃie în timp



<http://www.jhu.edu/~signals/sampling/index.html>

Fig 9.17 Applet pentru studiul esantionării și reconstrucției semnalelor aperiice.

9.4 Esantionarea cu memorare.

Dacă valoarea esantionului prelevat se păstrează pentru un interval de

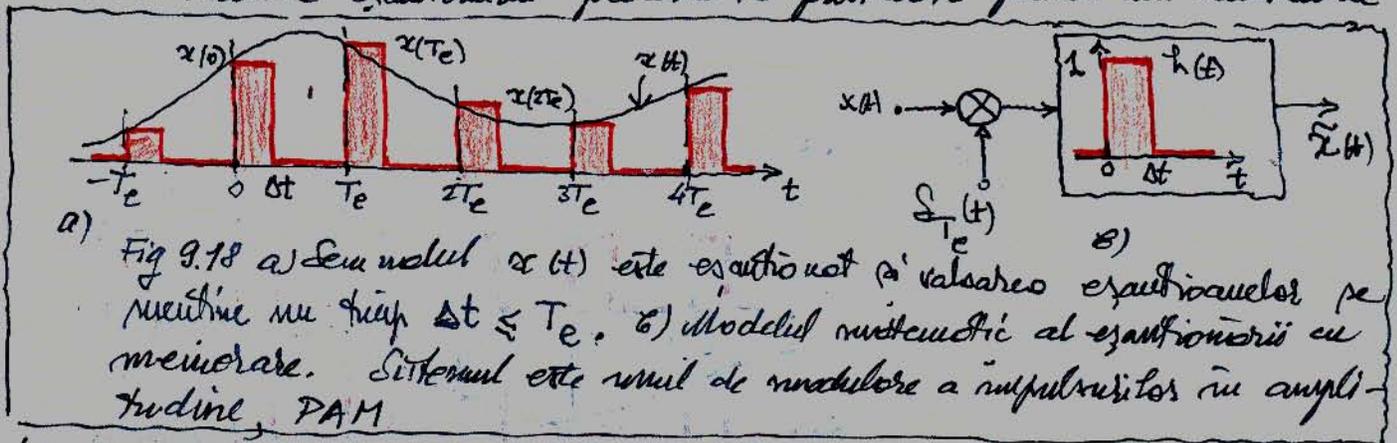


Fig 9.18 a) Semnalul $x(t)$ este esantionat și valoarea esantionurilor se menține un timp $\Delta t \leq T_e$. b) Modelul matematic al esantionării cu memorare. Sistemul este unul de modulare a impulsurilor în amplitudine, PAM

timp $\Delta t \leq T_e$, așa cum se arată și în figura 9.18 se obține un sem-

mal $\tilde{x}(t)$ cu expresia - vezi fig 9.18 :

$$\tilde{x}(t) = [x(t) \delta_{T_e}(t)] * h(t) = \tilde{x}(t) * h(t) \quad (9.36)$$

în core

$$h(t) = \text{p}_{\frac{\Delta t}{2}}(t - \frac{\Delta t}{2}) \longleftrightarrow e^{-j\frac{\omega \Delta t}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\omega}$$

$$= e^{-j\frac{\omega \Delta t}{2}} \Delta t \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}}$$

Spectrul (semnalului) esantionat $\tilde{X}(\omega)$ este:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\omega \Delta t}{2}} \Delta t \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_e)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\omega \Delta t}{2}} \frac{\Delta t \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{T_e \frac{\omega \Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_e) \quad (9.37)$$

Vom reprezenta $\tilde{X}(\omega) e^{j\frac{\omega \Delta t}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta t \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{T_e \frac{\omega \Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta t \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\pi \frac{\Delta t}{T_e}} X(\omega - k\omega_e)$

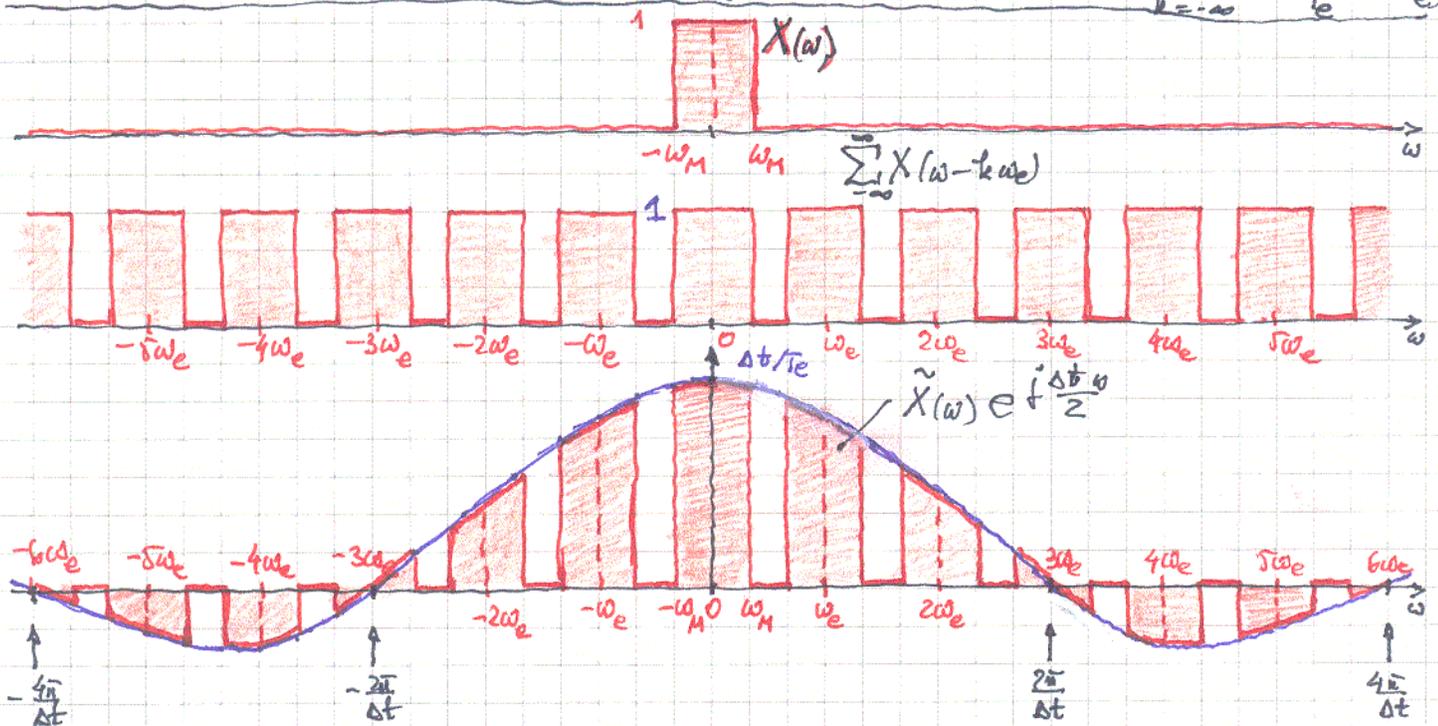


Fig 9.19 Lobi spectrali distorsiți în urma esantionării cu recuolare puțin deformată, așa că nu se poate reconstrui semnalul inițial prin filtrare trece jos ideală. Pentru ca lobul central să fie puțin afectat este necesar ca $\frac{2\pi}{\Delta t} \gg \omega_M$.

Așa cum rezultă din figura 9.19 lobi spectrali sunt deformați, mai ales cei de ordin k mare. Pentru a limita eroarea ce afectează lobul spectral central este necesar să avem

$$\frac{2\pi}{\Delta t} \gg \omega_M \quad (9.38)$$

cece implică scutirea duratei Δt a impulsurilor. Reconstrucția prin

extrapolare de ordinul zero este un caz particular PAM cu $\Delta t = T_e$.

9.5 Exantionarea naturală. Este o exantionare cu "decupare" unor porțiuni din semnalul $x(t)$ și care se aplică în multiplexarea în

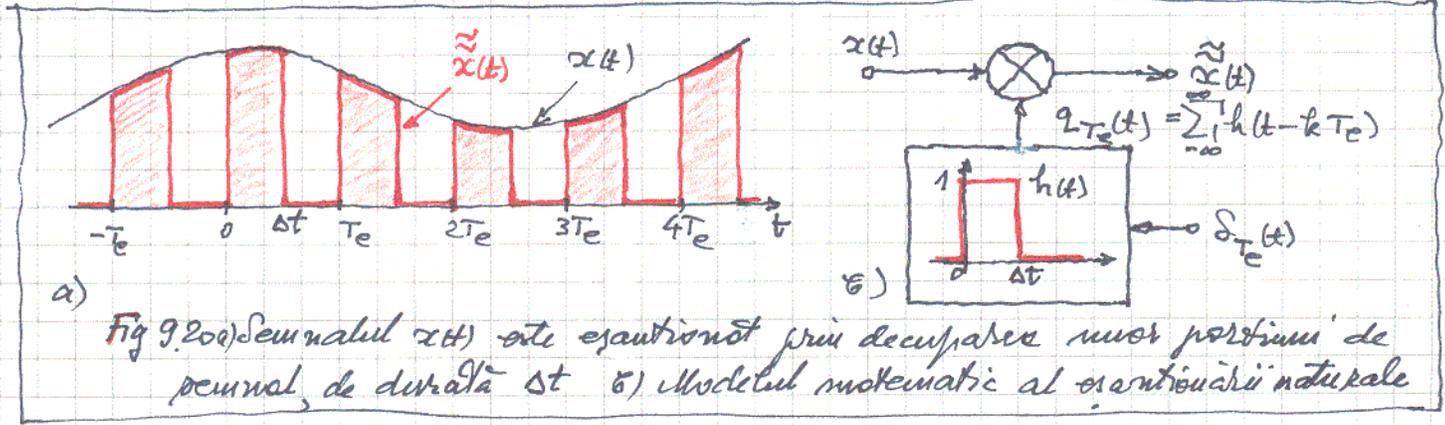


Fig 9.20) Semnalul $x(t)$ este exantionat prin decuparea unor porțiuni de semnal, de durată Δt b) Modelul matematic al exantionării naturale

timp a semnalelor analogice. În figura 9.20a) se arată forma semnalului exantionat iar în figura 9.20b) se prezintă modelul matematic al exantionării naturale. Semnalul exantionat este

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(t) q_{T_e}(t) = x(t) [h(t) * \delta_{T_e}(t)] = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT_e) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) h(t - kT_e) \end{aligned} \tag{9.39}$$

unde

$$h(t) = \mathcal{F}_{\Delta t} \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \longleftrightarrow H(\omega) = e^{-j\frac{\omega \Delta t}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\omega} \tag{9.40}$$

Se poate determina și spectrul semnalului exantionat, $\tilde{X}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega) &= \mathcal{F} \{ x(t) [h(t) * \delta_{T_e}(t)] \} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \left[e^{-j\frac{\omega \Delta t}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\omega} \cdot \frac{2\pi}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_e) \right] \\ &= X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{k\omega_e \Delta t}{2}} \frac{\Delta t \cdot \frac{2 \sin \frac{k\omega_e \Delta t}{2}}{k\omega_e \Delta t}}{T_e} \delta(\omega - k\omega_e) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{k\omega_e \Delta t}{2}} \frac{\Delta t}{T_e} \frac{2 \sin \frac{k\omega_e \Delta t}{2}}{k\omega_e \Delta t} X(\omega - k\omega_e) \end{aligned} \tag{9.41}$$

factor numeric

factor numeric

Dacă se analizează comparativ relațiile (9.37) și (9.41) se vede că desi se creșterea, ele sunt, ca esență diferite. În (9.37) lobul spectral de ordin k , $X(\omega - k\omega_e)$ este înmulțit cu o funcție de ω , ce nu are valoare constantă pe raportul lui $X(\omega - k\omega_e)$. În (9.41) lobul spectral de ordin k , $X(\omega - k\omega_e)$ este înmulțit cu un număr, același pe întreg raportul lobului spectral. Numărul în cauză se obține exantionând funcția:

$$f(\omega) = e^{-j \frac{\omega \Delta t}{2}} \frac{\Delta t}{T_e} \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}}$$

În punctele $\omega = k\omega_e$. În figura 9.21 se reprezintă modulele termenilor din formula (9.41), adică:

$$\left| \frac{\Delta t}{T_e} \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} \right|_{\omega = k\omega_e} \cdot |X(\omega - k\omega_e)|$$

pentru un spectru $X(\omega)$ dat. Se poate vedea că lobii spectrali nu sunt

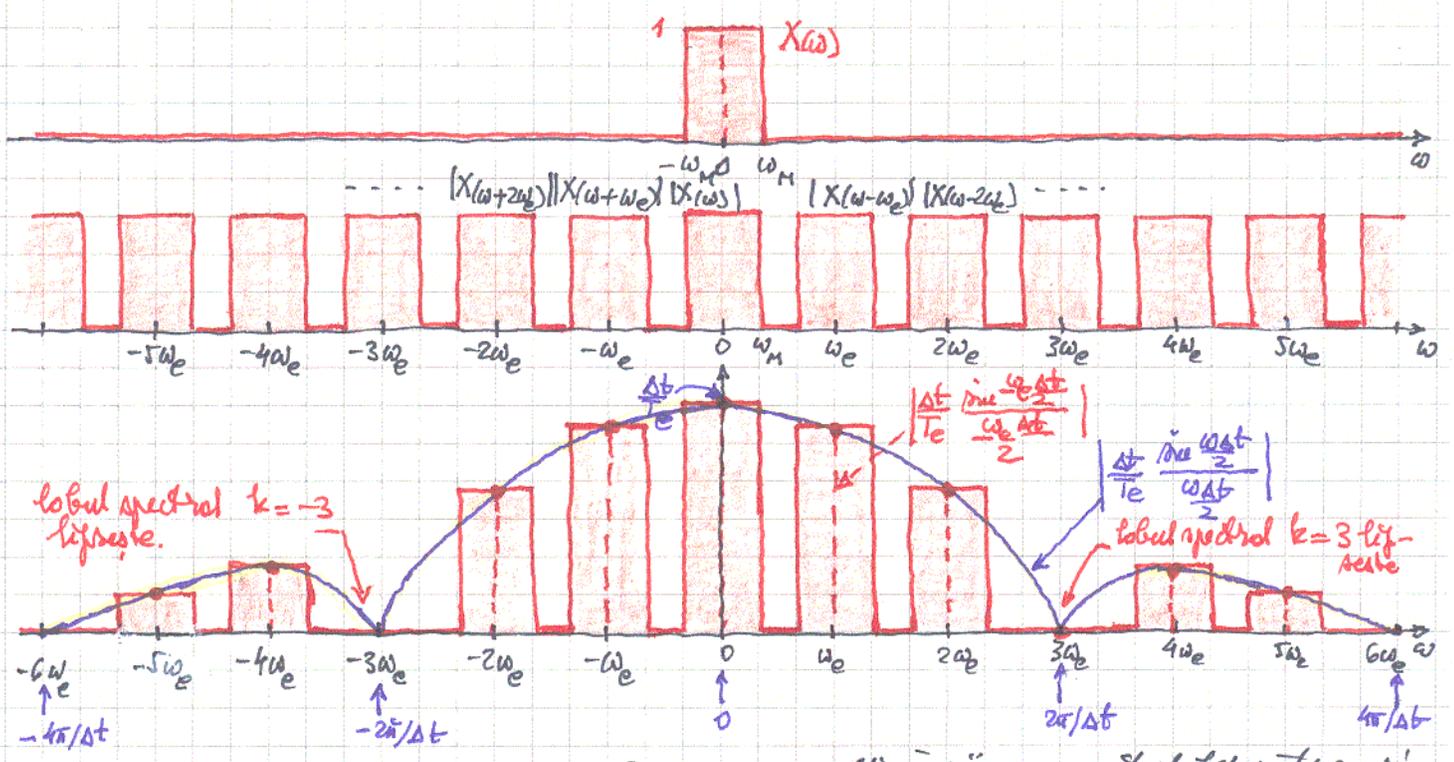


Fig 9.21 Lobii spectrali obținuți în urma esantionării nu sunt deformați ca ni în cazul esantionării cu memorare. Lobul central, $k=0$, este asemănător cu cel obținut la esantionarea ideală. Filtrând spre jos acest lobi cu $\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_e - \omega_M$ ni o amplificator $T_e/\Delta t$, se poate recupera semnalul inițial, $x(t)$.

deformați în bande de frecvențe pe care o ocupă, cum se întâmplă în cazul esantionării cu memorare. Filtrând ideal spre jos lobul central cu

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{T_e}{\Delta t}, & \text{pentru } |\omega| \leq \omega_c, \quad \omega_M \leq \omega_c \leq \omega_e - \omega_M \\ 0, & \text{pentru } |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (9.42)$$

se poate recupera semnalul inițial $x(t)$.

Vom observa că mulți lobi spectrali ai semnalului esantionat pot să lipsescă. Acest fapt se explică prin faptul că $|f(\pi n/\Delta t)| = 0$ și deci un multiplicator numeric (sau mai mult) = nul (punct nul).