

8. O INTRODUCERE ÎN FILTRAREA SEMNALELOR

Acest capitol este destinat familiarizării studentului cu primele noțiuni teoretice privind filtrarea semnalelor. Nu se urmărește o prezentare matematică a filtrelor și cu atât mai puțin a unor metode de proiectare. Aceste probleme constituie o parte distinctă a cursului. Dar prelucrarea semnalelor eșantionate, spre exemplu, în vederea recuperării semnalului ce a fost eșantionat, necesită anumite cunoștințe despre filtrare. De asemenea în prezentarea semnalelor modulate intervine teoretic filtrarea, etc. Aceste motive ne-au determinat să introducem acest capitol scurt, dedicat prezentării filtrelor ideale precum și a unor filtre realizabile. Ideea plasării acestui capitol în acest loc îi aparține lui Alan V. Oppenheim.

Modificarea relativă a amplitudinilor componentelor armonice ale unui semnal periodic sau chiar eliminarea sau selectarea anumitor componente armonice reprezintă o operație de "filtrare". Modificarea densității spectrale a unui semnal aperiodic, în sensul favorizării sau defavorizării unor segmente spectrale reprezintă deasemenea o operație de filtrare.

Spre exemplu, egalizarea practică în sistemele audio de înaltă fidelitate reprezintă tot o filtrare. Ea favorizează acele componente ale spectrului semnalului audio ce sunt reproduse de către difuzoare cu o eficiență mai redusă și defavorizează acele componente unde difuzoarele au maxime de eficiență. Este posibilă, printr-o egalizare reglabilă, compensarea unor caracteristici de absorbție ale unei săli de concert cu o acustică necorespunzătoare.

Inginerul român Augustin Maior a observat că pe un circuit telefonic s-ar putea transmite mai multe convorbiri. Pentru aceasta a recurs la procedeul de a transfera spectrul vocal al unei convorbiri într-o bandă de frecvență, distinctă de al altei convorbiri, prin modulare. La recepție separarea convorbirilor se realizează printr-o operație de atenuare a tuturor componentelor spectrale cu excepția câte a unei benzi, în care a fost plasată convorbirea. În acest mod, prin filtrare, se separă convorbirile ce au fost "amestecate". În principiu noțiunile de "filtru" și de sistem liniar și invariant în timp sunt echivalente. Filtrarea se realizează cu ajutorul unor sisteme liniare și invariante în timp continuu sau discret. Se mai spune că filtrele sunt sisteme de convoluție continue sau discrete.

8.1 Tipuri de filtre ideale

8.1.1 Filtrul trece jos ideal

Răspunsul în frecvență al unui filtru trece jos (FTJ) ideal destinat prelucrării semnalelor în timp continuu este cel din figura 8.1.

Spectrul din domeniul $|\omega| < \omega_c$ este neafectat de acest filtru dar componentele

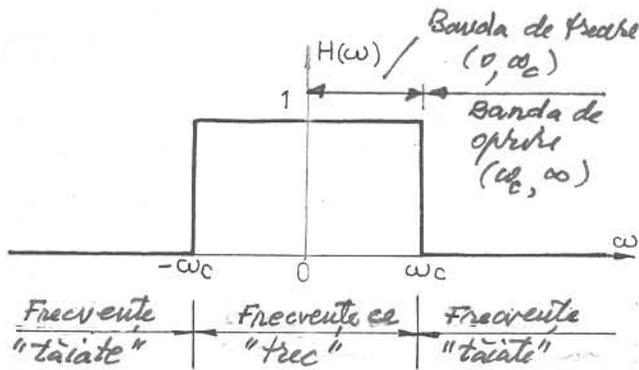


Fig. 8.1 Răspunsul în frecvență al unui filtru trece jos ideal

tăți logaritmice prin relația:

$$a = 20 \log \frac{1}{|H(\omega)|} = -20 \log |H(\omega)| \quad (8.1)$$

Se pune problema dacă un astfel de filtru este sau nu realizabil. O primă condiție ca filtrul să fie realizabil este ca el să fie cauzal. Teorema Paley-Wiener (relația (5.183)) cere ca integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |H(\omega)| |}{1 + \omega^2} d\omega \quad (8.2)$$

să fie convergentă pentru ca $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$ să caracterizeze un sistem cauzal. Ori pentru $|\omega| > \omega_0$, $|\log |H(\omega)| | \rightarrow \infty$, deci integrala nu poate fi convergentă. Prin urmare **FTJ ideal nu poate fi realizabil**. El poate fi aproximat, având definit un criteriu de eroare, oricât de bine, dar el însuși este irealizabil.

Se știe că - vezi relația (5.84) și figura 5.8 - răspunsul la impuls ce are ca transformată Fourier răspunsul în frecvență $p_{\omega_c}(\omega)$ al FTJ ideal este:

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (8.3)$$

Se vede că $h(t)$ nu descrie un sistem cauzal. Pentru $h(t)$ translatat cu $t_0 > 0$, corespunde un răspuns în frecvență:

$$h(t-t_0) = \frac{\sin \omega_c (t-t_0)}{\pi (t-t_0)} \leftrightarrow H_{t_0}(\omega) = e^{-j\omega t_0} p_{\omega_c}(\omega) \quad (8.4)$$

Se observă că $|H_{t_0}(\omega)| = |H(\omega)| = p_{\omega_c}(\omega)$ dar faza nu mai este nulă ci are expresia:

$$\Phi_{t_0}(\omega) = -\omega t_0 \quad (8.5)$$

Timpul de întârziere de grup, asupra căruia se va reveni la studiul modulației, se definește prin minus derivata caracteristici de fază în raport cu frecvența:

$$\tau_g(\omega) = \frac{-d\Phi(\omega)}{d\omega} \quad (8.6)$$

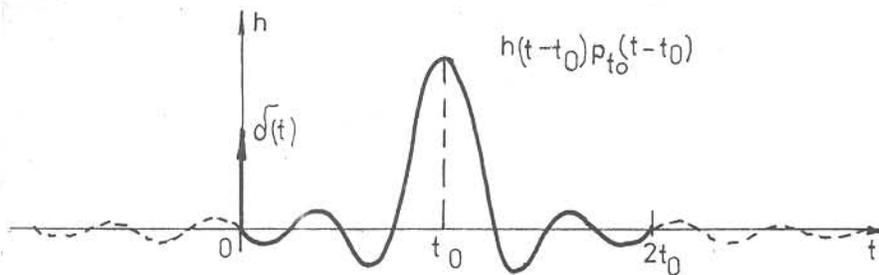


Fig. 8.2 Răspunsul la impuls al FTJ ideal deplasat cu t_0 și trunchiat la suportul $[0, 2t_0]$.

În cazul de față $\tau_g = t_0$, translația în raport cu originea (luată la momentul de aplicare al impulsului unitar) a răspunsului $h(t)$. Dacă t_0 este suficient de mare se poate trunchia, așa cum se arată în figura 8.2, răspunsul de-

plasat prin înmulțirea acestuia cu fereastra temporală cu suportul $[0, 2t_0]$, $p_{t_0}(t-t_0)$. În principiu, răspunsul la impuls $h(t-t_0) \cdot p_{t_0}(t-t_0)$ este cauzal și deci realizabil. Așa cum s-a arătat însă în figura 5.21 nu mai obținem un răspuns în frecvență ideal ci unul afectat de fenomenul Gibbs. Cu cât t_0 este mai mare, cu atât aproximarea ce se realizează este mai bună. Putem deci utiliza în calcule FTJ ideal, ca o limită ce poate fi aproximată oricât de bine în eroare medie pătratică. Reamintim că exprimarea spectrului semnalului de la ieșirea FTJ ideal $Y(\omega)$ în funcție de $X(\omega)$ (spectrul semnalului de la intrarea sa) este:

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & , |\omega| < \omega_c \\ 0 & , |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (8.7)$$

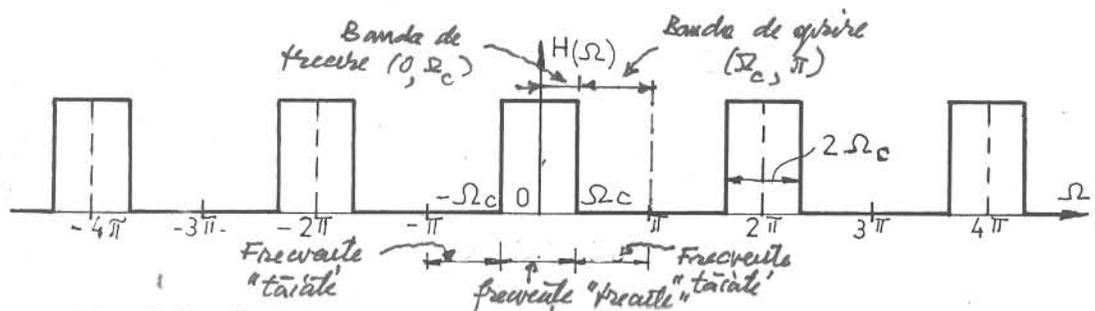


Fig. 8.3 Răspunsul în frecvență al unui FTJ numeric ideal.

Un filtru numeric (digital) de tip trece jos (TJ) ideal are răspunsul în frecvență $H(\Omega)$ prezentat în figura 8.3. Această funcție este periodică de perioadă 2π . Expresia răspunsului în frecvență al acestui filtru este:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega - 2k\pi| < \Omega_c, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{pentru rest} \end{cases} \quad (8.8)$$

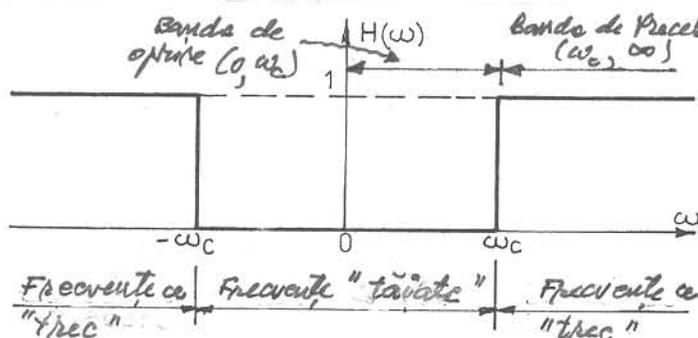
Răspunsul la impuls se determină aplicând relația de inversare (6.41) :

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin \Omega_c n}{\pi n} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (8.9)$$

Este vorba despre un sistem necauzal. O versiune deplasată și trunchiată a răspunsului la impuls obținut, $h[n-n_0]$, poate fi realizată cu urmările care se cunosc și anume apariția oscilațiilor în modulul răspunsului în frecvență. Dacă n_0 este suficient de mare aproximarea în medie pătratică a caracteristicii ideale poate fi oricât de bună. În consecință, deși irealizabilă ca limită teoretică o astfel de caracteristică poate fi utilizată în calcule.

8.1.2 Filtrul trece sus ideal

Pentru filtrarea trece sus (TS) ideală a semnalelor în timp continuu se utilizează un sistem având răspunsul în frecvență arătat în figura 8.4:



$$H_{TS}(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ 1, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \quad (8.10)$$

Un astfel de răspuns poate fi scris și sub forma :

$$H_{TS}(\omega) = 1 - p_{\omega_c}(\omega) \quad (8.11)$$

În virtutea teoremei Paley-Wiener nici acest filtru nu este realizabil nefiind cauzal. Răspunsul la impuls se obține aplicând relației (8.11) transformarea Fourier inversă:

$$h_{TS}(t) = \delta(t) - \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (8.12)$$

Se poate realiza o aproximare a filtrului trece sus ideal, discuția fiind asemănătoare cu cea din cazul FTJ ideal. Vom menționa aici două lucruri. În primul

rând, așa cum s-a văzut la studiul distribuțiilor și impulsul Dirac poate fi aproximat oricât de bine, deci prezența sa nu ridică probleme principiale în ceea ce privește aproximarea. În al doilea rând nu există filtre de aproximare care să nu cadă ca modul peste o anumită frecvență. În acest sens nu există filtre trece sus reale ci doar filtre trece bandă. Dacă însă căderea caracteristicii de modul începe dincolo de domeniul frecvențelor ce prezintă interes, filtrul aproximant poate fi considerat de tip trece sus.

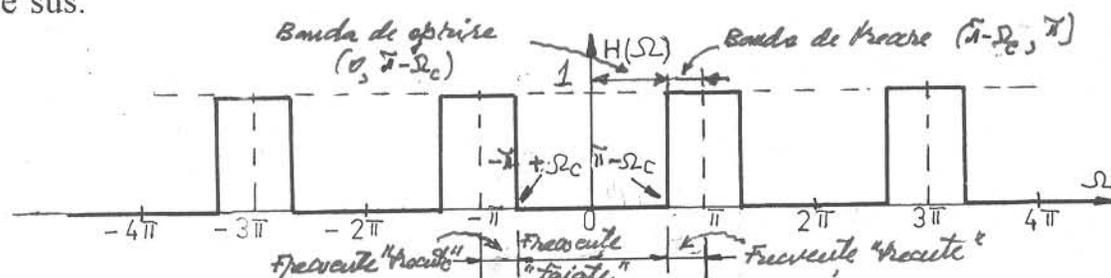


Fig. 8.5 Răspunsul în frecvență al unui filtru numeric trece sus ideal.

Răspunsul în frecvență al unui filtru numeric trece sus ideal este arătat în figura 8.5. Pentru el:

$$|H_{TS}(\Omega)| = \begin{cases} 1, & |\Omega - (2k+1)\pi| < \Omega_c, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \quad (8.13)$$

sau:

$$H_{TS}(\Omega) = 1 - p_{\Omega_c}(\Omega) * \delta_{2\pi}(\Omega - \pi) \quad (8.14)$$

Răspunsul la impuls poate fi determinat fie din (8.13) fie din (8.14). Considerând (8.13) avem :

$$h_{TS}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\pi+\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\Omega_c}^{\pi} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega n} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega.$$

sau:

$$h_{TS}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \Omega_c n}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.15)$$

O versiune deplasată cu n_0 , $h_{TS}[n-n_0]$ și trunchiată corespunzător este realizabilă. Ea aproximează caracteristica ideală în medie pătratică, aproximarea fiind cu atât mai bună cu cât n_0 este mai mare și trunchierea mai puțin severă.

8.1.3 Filtrul trece bandă ideal

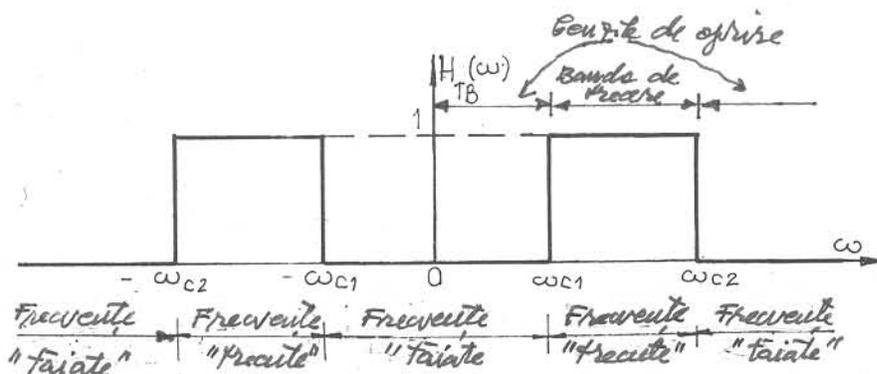


Fig. 8.6 Răspunsul în frecvență al unui filtru trece bandă ideal.

Filtrarea trece bandă (TB) a semnalelor continue se realizează cu un filtru având răspunsul în frecvență arătat în figura 8.6. Expresia răspunsului în frecvență al filtrului trece bandă ideal este :

$$H_{TB}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (8.16)$$

Se remarcă prezența a două frecvențe de tăiere, una inferioară și una superioară. Vom observa că $H_{TB}(\omega)$ se poate pune și sub forma:

$$H_{TB}(\omega) = p_{\omega_{c2}}(\omega) - p_{\omega_{c1}}(\omega) \quad , \quad (8.17)$$

și deci:

$$h_{TB}(t) = \frac{\sin \omega_{c2} t}{\pi t} - \frac{\sin \omega_{c1} t}{\pi t} \quad . \quad (8.18)$$

Ca și în cazul FTJ ideal, și pentru FTB ideal poate fi realizat un filtru ce aproximează oricât de bine modulul răspunsului ideal (în medie pătratică).

Răspunsul în frecvență al unui filtru numeric ideal de tip trece bandă este cel din figura 8.7. În domeniul $[-\pi, \pi)$, expresia răspunsului în frecvență este:

$$H_{TB}(\Omega) = \begin{cases} 1, & \Omega_{c1} < |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad , \quad \Omega \in [-\pi, \pi) \quad , \quad (8.19)$$

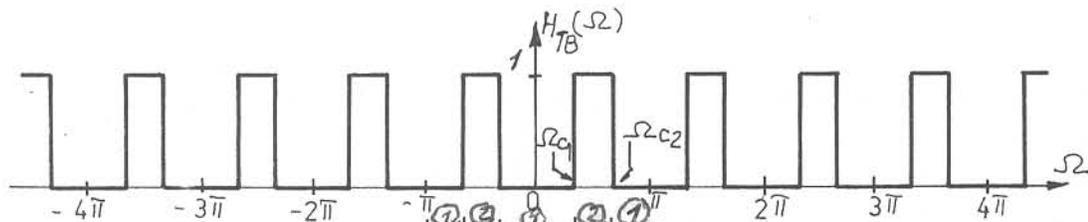
ea fiind repetată prin convoluție cu distribuția periodică:

$$H_{TB}(\Omega) = H_o(\Omega) * \delta_{2\pi}(\Omega) \quad . \quad (8.20)$$

Răspunsul la impuls rezultă imediat, aplicând relației (8.19) formula de

inversare sau observând că de fapt caracteristica trece bandă numerică este diferența a două caracteristici trece jos numerice. Oricum rezultă:

$$h_{TB}[n] = \frac{\sin \Omega_{c2} n}{\pi n} - \frac{\sin \Omega_{c1} n}{\pi n} \quad (8.21)$$



① Frecvențe "tăiate" ② Frecvențe "prezente"

Fig. 8.7 Răspunsul în frecvență al unui FTB ideal numeric.

Evident și această caracteristică poate fi aproximată oricât de bine, în medie pătratică.

8.1.4 Filtrul oprește bandă ideal

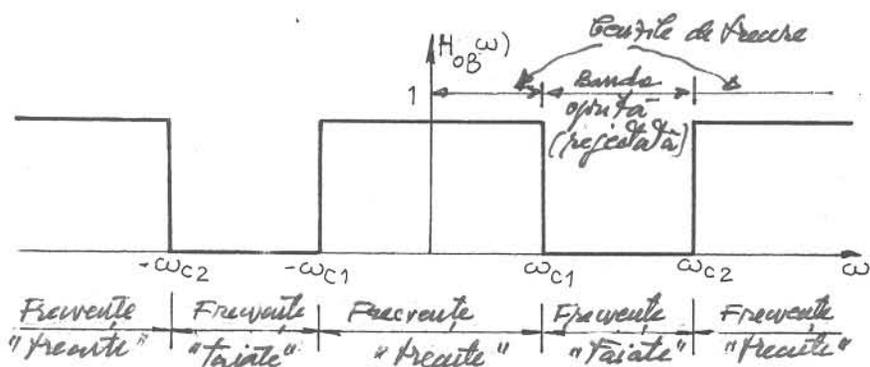


Fig. 8.8 Răspunsul în frecvență al unui filtru oprește bandă (FOB) ideal.

Filtrul oprește bandă ideal (OB) are răspunsul în frecvență complementul față de 1 al răspunsului în frecvență al FTB ideal - figura 8.8. Se remarcă două frecvențe de oprire (tăiere), ω_{c1} și ω_{c2} . Avem:

$$H_{OB}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 1, & \text{în rest} \end{cases} \quad (8.22)$$

Răspunsul la impuls se deduce ținând seama de observația făcută în legătură cu FOB. El are forma:

$$h_{OB}(t) = \delta(t) - \frac{\sin \omega_{c2} t}{\pi t} + \frac{\sin \omega_{c1} t}{\pi t} \quad (8.23)$$

Ca exercițiu se recomandă desenarea răspunsului în frecvență al unui FOB numeric ideal și deducerea formelor pentru $H_{OB}(\Omega)$ și $h_{OB}[n]$.