7. TRANSFORMAREA LAPLACE

7.1 Răspunsul unui sistem liniar şi invariant în timp la o exponenţială complexă cu exponent complex

Vom utiliza pe parcursul capitolului pentru variabila complexă, notaţia:

$$s = \sigma + j\omega \qquad \sigma \in \mathbb{R} \ , \ \omega \in \mathbb{R} \ . \tag{7.1}$$

În lucrările de limbă franceză, variabila complexă este notată şi cu p. Semnalul exponenţială complexă, cu exponent complex:

$$x(t) = e^{s_o t} = e^{\sigma_o t} e^{j\omega_o t} \ , \tag{7.2}$$

se aplică la intrarea unui SLIT caracterizat prin răspunsul la impuls h(t). La ieşirea sistemului se obţine semnalul $y(t) = h(t) * x(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{(\sigma_o + j\omega_o)(t-\tau)}d\tau =$$

$$= e^{(\sigma_o + j\omega_o)t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-(\sigma_o + j\omega_o)\tau}d\tau = e^{s_o t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}d\tau \Big|_{s=s_o} \ .$$

În ipoteza că este convergentă, se notează cu H(s) integrala:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-\sigma\tau}\, e^{-j\omega\tau} d\tau \ . \tag{7.3}$$

Ea depinde numai de răspunsul la impuls h(τ) al sistemului şi, în anumite condiţii, caracterizează complet SLIT. Răspunsul y(t) al SLIT se poate scrie sub forma:

$$y(t) = e^{s_o t} H(s_o) = x(t)\cdot H(s_o) \ , \tag{7.4}$$

care ne arată că $e^{s_o t}$ este o funcţie proprie a sistemului liniar şi invariant în timp, iar $H(s_o)$ este valoarea proprie asociată ei.

Dacă semnalul de intrare este o combinaţie liniară de forma:

$$x(t) = \sum_k c_k e^{s_k t} \ , \qquad (7.5)$$

operatorul S care modelează sistemul fiind liniar, răspunsul y(t) este calculabil cu relaţia:

$$y(t) = \sum_k c_k H(s_k)\, e^{s_k t} \ . \qquad (7.6)$$

Cele expuse arată că nu numai exponenţialele complexe cu exponent pur imaginar, de forma $e^{j\omega_o t}$ ci şi exponenţialele complexe $e^{\sigma_o t} e^{j\omega_o t}$ sunt funcţii proprii ale unui SLIT . Se poate vedea că o funcţie H(s) definită prin expresia (7.3) permite calculul răspunsului unui SLIT la care semnalul de intrare poate fi pus sub forma (7.5).

7.2 Transformarea Laplace bilaterală

Prin definiţie transformata Laplace bilaterală a unui semnal x(t) este:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \ ; \ s = \sigma + j\omega \ ; \ \sigma, \omega \in \mathbb{R} \ . \qquad (7.7)$$

Există o legătură uşor de stabilit între transformarea definită prin relaţia (7.7) şi transformarea Fourier. Explicitând pe s, relaţia se poate pune sub forma:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\, e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t)\, e^{-\sigma t}\}(\omega) \qquad (7.8)$$

Transformata Laplace bilaterală a unui semnal x(t) este transformata Fourier a semnalului $x(t)e^{-\sigma t}$. Factorul $e^{-\sigma t}$, pentru $\sigma > 0$ şi funcţia x(t) cu creştere temperată conduc la obţinerea unei funcţii produs cu descreştere rapidă. Transformata Laplace bilaterală poate exista deci, şi dacă transformata Fourier nu există. Dacă însă $\sigma < 0$, factorul $e^{-\sigma t}$ poate conduce la inexistenţa transformatei Laplace bilaterale.

Din cele afirmate, rezultă că transformarea Laplace nu este întotdeauna convergentă, pentru toate valorile variabilei complexe s. Bineînţeles că transformarea poate fi folosită doar în cazurile în care integrala care o defineşte este convergentă. Mulţimea valorilor lui s pentru care integrala din relaţia (7.7) este convergentă se numeşte regiune de convergenţă a acestei transformate Laplace. De câte ori se specifică expresia unei transformate Laplace este necesară şi specificarea regiunii de convergenţă corespunzătoare.

Vom mai remarca faptul că, punând în relaţia (7.8) $\sigma = 0$ se obţine:

$$\mathscr{L}\{x(t)\}(j\omega) = \mathcal{X}(j\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \quad . \tag{7.9}$$

Transformata Laplace bilaterală evaluată pe axa imaginară $j\omega$ ($\sigma = 0$), este egală cu transformata Fourier a aceluiaşi semnal.

De multe ori, în loc de a scrie $\mathscr{L}\{x(t)\} = \mathcal{X}(s)$, se scrie (din raţiuni tipografice şi de comoditate) $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s)$ şi, prin urmare $\mathscr{L}\{x(t)\}(j\omega) = X(j\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$. Acesta este motivul pentru care în multe lucrări transformata Fourier apare notată cu $X(j\omega)$ şi nu cu $X(\omega)$ aşa cum s-a notat în cursul de faţă. Notaţia $X(j\omega)$ indică provenienţa transformatei din transformarea Laplace bilaterală şi are avantajul că înlocuind gruparea $j\omega$ cu s, $j\omega \longrightarrow s$, transformata Fourier dă imediat expresia transformatei Laplace bilaterale. Pe de altă parte, definind mai întâi transformata Fourier, este lipsit de logică ca şi în locul argumentului ω să introducem un argument de forma $j\omega$, iar avantajul citat mai înainte nu este întrutotul adevărat întrucât multe transformate Fourier sunt reale. Cea mai corectă notaţie ni se pare cea în care se notează cu două caractere tipografice distincte cele două transformate ale aceluiaşi semnal, $\mathcal{X}(s)$ şi $X(\omega)$. Atunci $\mathcal{X}(j\omega) = X(\omega)$ este o relaţie clară. În cele ce urmează, vom nota cu $X(s)$ transformata Laplace bilaterală, tolerând două notaţii pentru transformata Fourier şi anume $X(\omega)$ când este definită direct şi $X(j\omega)$ când rezultă prin particularizarea transformatei Laplace bilaterale. Este, deci, evidentă echivalenţa:

$$X(s)\big|_{s=j\omega} = X(j\omega) \equiv X(\omega) \quad . \tag{7.10}$$

<u>*Exemple:*</u>

i) Considerăm semnalul cauzal $x(t) = e^{-\omega_o t}\sigma(t)$. *Transformata sa Fourier există şi este:* $\mathscr{F}\{x(t)\}(\omega) = \dfrac{1}{\omega_o + j\omega}$.

Vom calcula, aplicând definiţia, transformata Laplace bilaterală a aceluiaşi semnal:

$$\mathscr{L}\{x(t)\}s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_o t} e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\omega_o+\sigma)t} e^{-j\omega t} dt \quad .$$

Integrala este convergentă numai pentru $\omega_o+\sigma > 0$, *deci pentru* $\sigma > -\omega_o$, *care se mai scrie şi* $Re\{s\} > -\omega_o$. *Avem, deci:*

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{\sigma + \omega_o + j\omega} = \frac{1}{\omega_o + s} \quad ; \quad \sigma = \mathrm{Re}\{s\} > -\omega_o \quad . \qquad (7.11)$$

Se poate constata că, dacă $-\omega_o < 0$ *atunci dreapta* $\sigma = 0$ *, axa imaginară, este în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale și:*

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = \frac{1}{\omega_o + j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) \quad , \quad \omega_o < 0 \quad .$$

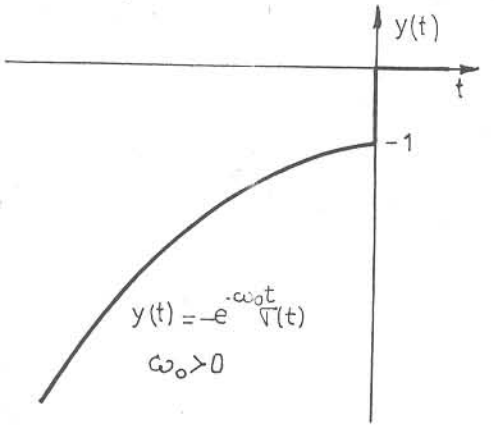


Fig. 7.1 Semnal anticauzal ce nu are transformată Fourier dar are transformată Laplace.

ii) Vom considera acum semnalul "anticauzal" din figura 7.1 , având expresia: $y(t) = -e^{-\omega_o t}\sigma(-t)$, $\omega_o > 0$ *. El nu are transformată Fourier, integrala ce definește transformata sa fiind divergentă.*

Pentru acest semnal poate fi, însă, definită o transformată Laplace bilaterală:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\omega_o t}\sigma(-t)e^{-st}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{-(\omega_o+\sigma)t}e^{-j\omega t}dt \quad .$$

Pentru ca integrala să fie convergentă este necesar și suficient să avem $\omega_o + \sigma < 0$ *sau* $\sigma < -\omega_o$ *. În aceste condiții:*

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_{\infty}^{0} e^{(\omega_o+\sigma)t}e^{j\omega t}dt = \left.\frac{e^{(\omega_o+\sigma)t}e^{j\omega t}}{\omega_o + \sigma + j\omega}\right|_{\infty}^{0} = \frac{1}{\omega_o + s} \; , \; \sigma < -\omega_o \quad .$$

$$(7.12)$$

Analizând expresiile (7.11) și (7.12) se observă că $1/(\omega_0+s)$ este transformata Laplace bilaterală a două semnale complet distincte, unul cauzal x(t), și altul anticauzal y(t). Ceea ce rezultă din acest exemplu simplu este importanța specificării domeniului de convergență odată cu expresia transformatei Laplace bilaterale. Primul semnal are transformata $X(s) = 1/(\omega_0+s)$ convergentă pentru $\mathrm{Re}\{s\} > -\omega_0$. Al doilea semnal are transformata $Y(s) = 1/(\omega_0+s)$ convergentă însă pentru $\mathrm{Re}\{s\} < -\omega_0$. Cum axa imaginară nu este în domeniul de convergență al transformatei Y(s), nu există Y(jω), adică semnalul y(t) nu are transformată Fourier.

7.2.1 Proprietățile domeniului de convergență al transformatei Laplace bilaterale

După cum evidențiază relația (7.8), dacă există transformata Fourier a funcției - semnalului - $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ atunci există și transformata Laplace bilaterală a semnalului x(t) pentru $s = \sigma_0 + j\omega$, $\forall\omega$:

$$|X(\sigma_o + j\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma_o t} |e^{-j\omega t}|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma_o t} dt < \infty \quad .$$

Se poate deci, enunța proprietatea:

1. **Domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale, dacă există, este format din benzi ale planului s paralele cu axa imaginară jω.**

Condiția de convergență a integralei (7.7) se exprimă prin $|X(s)| < \infty$. Prin urmare polii lui X(s) , în care $X(s) \longrightarrow \infty$ nu pot fi în domeniul de convergență. Rezultă:

2. **Domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale nu poate conține nici un pol al acesteia.**

Dacă semnalul x(t) este de durată finită și σ_0 este o valoare care asigură convergența integralei (7.7), atunci $|X(s_0)| < \infty$. Fie acum $\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma$, M valoarea maximă a exponențialei $e^{-\Delta\sigma t}$ pe intervalul $[t_1, t_2]$. Avem:

$$|X(s)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-\sigma_o t} e^{-\Delta\sigma t} e^{-j\omega t} dt\right| \leq M \left|\int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-\sigma_o t} e^{-j\omega t} dt\right| = M\, |X(s_o)| < \infty \quad \forall \Delta\sigma \in \mathbb{R} \quad ,$$

și deci:

3. **Dacă x(t) are durată finită și dacă există cel puțin o valoare s_0 din planul variabilei complexe pentru care transformata Laplace bilaterală converge, atunci domeniul de convergență este întreg planul complex.**

Semnalul din figura 7.2 are suportul nemărginit spre dreapta. Se spune că este un semnal cu "întindere spre dreapta". Un astfel de semnal poate fi transformat într-un semnal cauzal printr-o simplă translație în timp. Pentru semnalul din figura 7.2, $x(t-T_1)$ este cauzal.

Presupunem că $\exists s_0$, $s_0 = \sigma_0 + j\omega$, astfel încât $X(s_0)$ să fie convergentă: $|X(s_0)| < \infty$. În punctele s având $\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma$, cu $\Delta\sigma > 0$, avem inegalitatea:

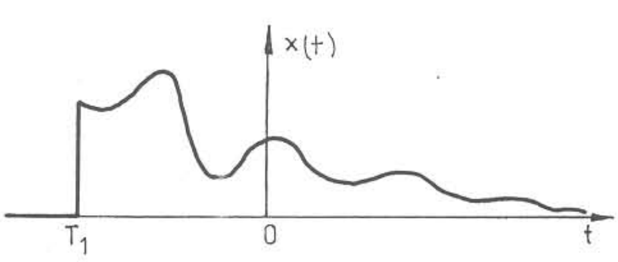


Fig. 7.2 Semnal de durată infinită cu suportul nemărginit la dreapta.

$$|X(s)| = \left|\int_{T_1}^{\infty} x(t)e^{-\sigma_o t}e^{-\Delta\sigma t}e^{-j\omega t}dt\right| \leq$$

$$\leq \left|e^{-\Delta\sigma T_1}\cdot\int_{T_1}^{\infty} x(t)e^{-\sigma_o t}e^{-j\omega t}dt\right| =$$

$$= e^{-\Delta\sigma T_1}\cdot|X(s_o)| < \infty \ .$$

Rezultă:

4. **<u>Dacă x(t) este un semnal cu întindere spre dreapta și dacă dreapta de ecuație Re{s} $=\sigma_0$ este în domeniul de convergență, atunci toate punctele s din planul complex ce satisfac Re{s}$\geq\sigma_0$ sunt în domeniul de convergență. Semnalele cu întindere spre dreapta au domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale cu întindere spre dreapta.</u>**

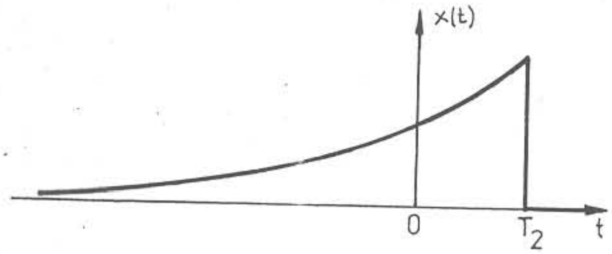


Fig. 7.3 Semnal de durată infinită cu suportul nemărginit la stânga.

Semnalul din figura 7.3 are suportul nemărginit spre stânga, numindu-se și semnal cu "întindere spre stânga". El poate fi transformat într-un semnal anticauzal printr-o translație în timp. Dacă în $s_0 = \sigma_0 + j\omega$, funcția $X(s_0)$ există, deci $|X(s_0)| < \infty$, atunci se poate demonstra ca și în cazul anterior că X(s) există pentru puncte s având: $\sigma \leq \sigma_0$.

5. **<u>Dacă x(t) este un semnal cu întindere spre stânga și dacă dreapta de ecuație Re{s} $= \sigma_0$ este în domeniul de convergență, atunci toate punctele s din planul complex ce satisfac Re{s} $\leq \sigma_0$ sunt în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale cu întindere spre stânga.</u>**

Vom considera acum cazul cel mai general, al unui semnal cu suportul nemărginit, confundat cu axa reală. Un astfel de semnal poate fi scris ca o sumă de două semnale, unul cauzal și altul anticauzal:

$$x(t) = x_+(t) + x_-(t) \ ; \ x_+(t) = x(t)\sigma(t) \ , \ x_-(t) = x(t)\sigma(-t) \ .$$

Semnalul $x_+(t)$ este de tipul cu întindere spre dreapta. Dacă $\mathcal{L}\{x_+(t)\}(s_1)$ există, atunci transformata respectivă există, conform proprietății 4 pentru $\forall s$ având $\mathrm{Re}\{s\} \geq \mathrm{Re}\{s_1\}$.

Semnalul $x_-(t)$ este de tipul cu întindere spre stânga. Dacă $\mathcal{L}\{x_-(t)\}(s_2)$ există, atunci transformata respectivă există, conform proprietății 5 pentru $\forall s$ având $\mathrm{Re}\{s\} \leq \mathrm{Re}\{s_2\}$.

Nu este dificil de observat că operatorul definit de relația (7.7) este liniar și, prin urmare $\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x_+(t)\} + \mathcal{L}\{x_-(t)\}$. O condiție suficientă de existență a transformatei $\mathcal{L}\{x(t)\}$ este existența celor două transformate. Dacă $\mathrm{Re}\{s_1\} < \mathrm{Re}\{s_2\}$, atunci cu siguranță că pentru valorile lui s pentru care: $\mathrm{Re}\{s_1\} \leq \mathrm{Re}\{s\} \leq \mathrm{Re}\{s_2\}$, este asigurată convergența transformatei Laplace bilaterale a semnalului x(t). Se poate enunța proprietatea:

6. **Dacă suportul semnalului x(t) este toată axa reală și dacă dreapta de ecuație $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$ este în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale, atunci domeniul de convergență al acesteia este o bandă paralelă cu axa imaginară, conținând dreapta $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$.**

Exemple:

1) Semnalul de durată finită $x(t) = e^{-\omega_o t}[\sigma(t) - \sigma(-t)]$ *are transformata Laplace bilaterală:*

$$X(s) = \int_0^T e^{-(s+\omega_o)t}\,dt = \frac{1 - e^{-(s+\omega_o)T}}{s+\omega_o} .$$

Zerourile transformatei sunt $s_{zk} = -\omega_o + j(2k\pi/T)$, $k \in Z$. *Transformata are un singur pol* $s_p = -\omega_o$, *compensat însă de zeroul* $k = 0$, $s_{zo} = -\omega_o$. *Prin urmare X(s) are ca domeniu de convergență tot planul complex.*

2) Semnalul de durată infinită, cu suportul confundat cu axa reală $x(t) = e^{-\omega_o|t|}$, $\omega_o > 0$, *se poate scrie sub forma:* $x(t) = e^{-\omega_o t}\sigma(t) + e^{\omega_o t}\sigma(-t)$, *egalitatea fiind valabilă aproape peste tot (cu excepția punctului* $t = 0$ *).*

Semnalul cu întindere spre dreapta are transformata Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-\omega_o t}\sigma(t)\} = \frac{1}{s+\omega_o} , \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\omega_o ,$$

iar semnalul cu întindere spre stânga:

$$\mathcal{L}\{e^{\omega_o t}\sigma(-t)\} = -\frac{1}{s-\omega_o}\ , \quad \mathrm{Re}\{s\} < \omega_o\ .$$

În consecință:

$$\mathcal{L}\{e^{-\omega_o|t|}\} = \frac{1}{s+\omega_o} - \frac{1}{s-\omega_o} = \frac{-2\omega_o}{s^2-\omega_o^2}\ ; \quad -\omega_o < \mathrm{Re}\{s\} < \omega_o\ .$$

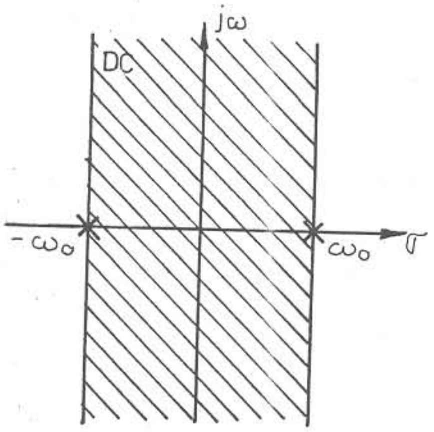


Fig. 7.4 Domeniul de convergență pentru transformata semnalului exp($-\omega_0$ | t |) .

Domeniul de convergență al transformatei semnalului este intersecția celor două domenii de convergență ale componentelor cauzală și anticauzală.

Domeniul de convergență DC este prezentat în figura 7.4. Deoarece axa imaginară $s = j\omega$ se află în DC, există transformată Fourier. Ea rezultă punând $\sigma = 0$ în transformata Laplace bilaterală. Se obține:

$$\mathcal{F}\{e^{-\omega_o|t|}\} = \frac{-2\omega_o}{(j\omega)^2-\omega_o^2} = \frac{2\omega_o}{\omega^2+\omega_o^2}\ .$$

Menționăm că pentru $\omega_o < 0$ cele două domenii $Re\{s\} > -\omega_o$ și $Re\{s\} < \omega_o$ au intersecția vidă. În consecință nu există, pentru nici o valoare complexă s, transformata Laplace bilaterală.

<u>7.2.2 Transformarea Laplace inversă</u>

Așa cum s-a arătat prin relația (7.8), transformarea Laplace bilaterală directă este o transformare Fourier directă aplicată semnalului $x(t)e^{-\sigma t}$, σ fixat, deci pe o paralelă la axa $j\omega$.

Dar semnalul $x(t)e^{-\sigma t}$, σ fixat, poate fi recuperat prin transformarea Fourier inversă:

$$x(t)\,e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma+j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega\ . \qquad (7.13)$$

Cum σ este constant în raport cu ω (deși poate fi modificat evident și σ), $ds=d(\sigma+j\omega)= jd\omega$, integrala (7.13) efectuându-se pe o paralelă dusă în planul s la axa $j\omega$,

$$x(t)\,e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\,e^{j\omega t}\,ds \quad .$$

Deoarece integrarea se efectuează considerând σ fixat, se înmulţeşte relaţia obţinută cu $e^{\sigma t} \neq 0$ şi se introduce factorul sub semnul integralei. Se obţine relaţia ce defineşte transformarea inversă transformării Laplace directe:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\,e^{st}\,ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) \quad , \quad \sigma \in \mathrm{DC} \quad . \qquad (7.14)$$

Integrarea se efectuează pe o paralelă la axa imaginară conţinută în domeniul de convergenţă. Acest fapt este exprimat în relaţia (7.14) în mod simbolic prin σ ∈ DC.

Se spune că relaţiile (7.7) şi (7.14) definesc o pereche Laplace (bilaterală) şi se scrie:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad (7.15)$$

simbolul $\mathcal{L}$ lipsind în majoritatea cazurilor.

Calculul transformatei directe şi inverse se face în electronică pe baza tabelelor şi numai în cazuri cu totul particulare prin metodele studiate la cursurile de matematică.

Pentru determinarea transformării inverse, în măsura în care avem de inversat fracţii raţionale, se procedează la descompunerea în fracţii simple şi la căutarea funcţiilor temporale în tabele.

Exemple:

1. Se cere să se inverseze funcţia $X(s) = 1/(s+2)(s+3)$. Dacă nu este precizat domeniul de convergenţă, problema este nedeterminată, având trei soluţii posibile.

În DC nu poate intra nici un pol. Se exclud, aşa cum se arată în figura 7.5 dreptele $\sigma = -2$ şi $\sigma = -3$. Se descompune X(s) în fracţii simple:

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \quad . \qquad (7.16)$$

i) Dacă domeniul de convergenţă este **1** *, $\sigma > -2$, atunci fiecare termen al relaţiei (7.16) va fi inversat într-un semnal cauzal:*

$$\sigma > -2 : \frac{1}{s+2} \longrightarrow e^{-2t}\sigma(t) \quad ; \quad \sigma > -3 : \frac{1}{s+3} \longrightarrow e^{-3t}\sigma(t) \quad .$$

Rezultă:

$$\sigma > -2 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \longrightarrow (e^{-2t} - e^{-3t})\sigma(t) \quad . \tag{7.17}$$

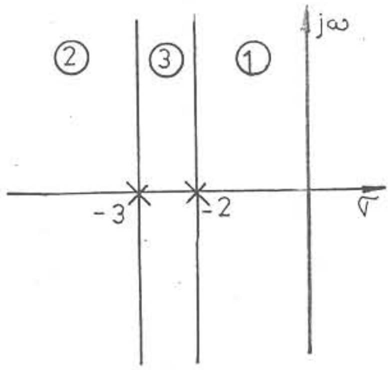


Fig. 7.5 Cele trei domenii de convergență posibile pentru X(s)=1/[(s+2)(s+3)].

ii) *Dacă domeniul de convergență este* **2** , $\sigma < -3$, *fiecare termen al relației (7.16) se inversează prin câte un semnal anticauzal:*

$$\sigma < -2 : \frac{1}{s+2} \longrightarrow -e^{-2t}\sigma(-t) \; ;$$

$$\sigma < -3 : \frac{1}{s+3} \longrightarrow -e^{-3t}\sigma(-t) \; ,$$

și deci:

$$\sigma < -3 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \longrightarrow (-e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(-t) \quad . \tag{7.18}$$

iii) *Ultimul domeniu de convergență este* **3** , $-3 < \sigma < -2$:

semnal anticauzal: $\sigma < -2 : \frac{1}{s+2} \longrightarrow -e^{-2t}\sigma(-t) \quad ;$

semnal cauzal: $\sigma > -3 : \frac{1}{s+3} \longrightarrow e^{-3t}\sigma(t) \quad ;$

$$-3 < \sigma < -2 \; : \; \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \longrightarrow -e^{-2t}\sigma(-t) - e^{-3t}\sigma(t) \quad . \tag{7.19}$$

Aceiași transformată Laplace bilaterală, (7.16) poate fi inversată în trei moduri distincte, după cum este ales domeniul de convergență. Numai în cazul i) $j\omega \subset DC$ și, prin urmare, numai pentru semnalul (7.17) există transformată Fourier. Semnalele (7.18) și (7.19) deși au transformate Laplace bilaterale, nu au transformate Fourier, axa imaginară nefiind inclusă în DC.

7.2.3 Definirea transformatei Laplace bilaterale prin constelația de poli și zerouri

Dacă transformata Laplace bilaterală este o fracție rațională, de forma:

$$X(s) = K\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-s_{ok})}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_{pk})} \quad , \qquad (7.20)$$

se vede imediat că este suficientă cunoașterea polilor s_{pk} și a zerourilor s_{zk} pentru a cunoaște, cu rezerva unei constante multiplicative K, pe X(s) . Dacă, în plus, se cunoaște și valoarea transformatei X(s) într-un punct $s_o \in$ DC poate fi determinată și constanta K.

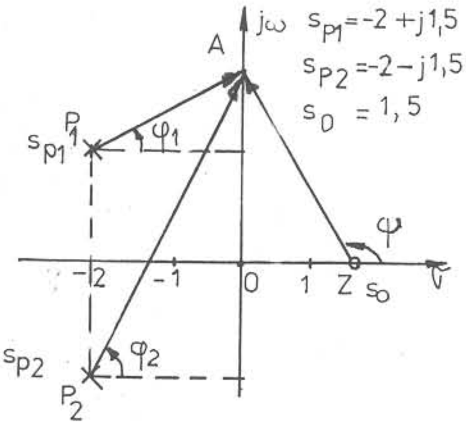


Fig. 7.6 Constelația de poli și zerouri a unei transformate Laplace.

Polii și zerourile pot fi dați prin valorile lor complexe sau printr-o diagramă a "constelației" de poli și zerouri, CPZ. Simbolul de marcare al unui pol este o cruciuliță de tipul "x". Simbolul de marcare al unui zero este un cerculeț: ○ . În figura 7.6 se dă un exemplu de reprezentare a unei CPZ pentru o transformată Laplace bilaterală, X(s) . Expresia ei, conform valorilor înscrise în diagramă este:

$$X(s) = K\frac{s-1,5}{(s+2-j1,5)\,(s+2+j1,5)}$$

$$X(s) = K\frac{s-1,5}{s^2+4s+6,25}$$

Dacă se specifică faptul că x(t) , semnalul temporal, este cauzal, atunci DC este $\sigma > -2$, verticala ce trece prin poli.

Axa jω este inclusă în DC și, prin urmare, există și transformata Fourier a semnalului. Ea este:

$$\mathscr{F}\{x(t)\}(\omega) = \left.\frac{s-s_o}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})}\right|_{s=j\omega} = \frac{j\omega-s_o}{(j\omega-s_{p1})(j\omega-s_{p2})} \; .$$

Dar $j\omega - s_o$ este segmentul orientat $\overline{ZA}$, astfel că $j\omega - s_o = |\overline{ZA}|\, e^{j\psi}$. La fel $j\omega - s_{p1} = |\overline{P_1A}|\, e^{j\varphi_1}$ și $j\omega - s_{p2} = |\overline{P_2A}|\, e^{j\varphi_2}$. În consecință:

$$X(j\omega) = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{P_1A}|\cdot|\overline{P_2A}|}\, e^{j(\psi-\varphi_1-\varphi_2)} \quad ,$$

de unde:

$$|X(j\omega)| = \frac{|\overline{\mathrm{ZA}}|}{|\overline{\mathrm{P_1A}}| \cdot |\overline{\mathrm{P_2A}}|} \quad ; \quad \operatorname{Arg} X(j\omega) = \Psi(\omega) = \psi - \varphi_1 - \varphi_2 \ .$$

În general, fixând o frecvență, deci un punct A pe axa imaginară, se unește acel punct cu toate zerourile s_{ok} și cu toți polii s_{pk} . Se obțin segmentele de lungimi $|\overline{\mathrm{Z_kA}}|$, respectiv $|\overline{\mathrm{P_kA}}|$, precum și unghiurile ψ_k , respectiv φ_k . Modulul și faza transformatei Fourier se calculează cu relațiile:

$$|X(j\omega)| = |K| \frac{\prod_{k=1}^{M} |\overline{\mathrm{Z_kA}}|}{\prod_{k=1}^{N} |\overline{\mathrm{P_kA}}|} \quad ; \quad \Psi(\omega) = \operatorname{Arg} K + \sum_{k=1}^{M} \psi_k - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \ . \qquad (7.21)$$

7.3 Transformarea Laplace unilaterală

Studiul sistemelor cauzale ce nu sunt inițial în starea de repaus (nu au condiții inițiale nule) se face utilizând transformarea definită prin relația:

$$\mathscr{L}_u\{x(t)\}(s) = \int_{0+}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \ . \qquad (7.22)$$

Funcțiile (semnalele) complexe care satisfac condițiile:

i) sunt cauzale $x(t)\cdot\sigma(t) = x(t)$;

ii) sunt continue cu excepția eventual a unei mulțimi numărabile de puncte în care au discontinuități de speța întâi;

iii) satisfac condiția $|x(t)| \le M e^{-\sigma_o t}$, $M > 0$, $\sigma_o \ge 0$,

se numesc funcții original iar σ_o este denumit indice de creștere a funcției.

Transformata Laplace unilaterală (7.22) a unei funcții original există și este olomorfă (analitică) în semiplanul $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_o$.

Transformarea inversă este definită de:

$$x(t) \stackrel{t}{=} \mathscr{L}_u^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds \ , \quad \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_o \ . \qquad (7.23)$$

Se spune că relațiile (7.22) și (7.23) definesc o pereche Laplace unilaterală și se scrie:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad (7.24)$$

7.3.1 Relaţia dintre transformata Laplace bilaterală şi transformata Laplace unilaterală

Pentru cazul semnalelor cauzale, între cele două transformate nu există diferenţe. Fie x(t) = x(t)σ(t) şi aplicăm acestei funcţii transformarea bilaterală (7.7) Rezultă:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sigma(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}_u\{x(t)\} .$$

Fie acum un semnal cu suportul plasat şi în domeniul t < 0 :

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt .$$

În primul termen se pune t ——> -t şi se obţine:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} x(-t)e^{-(-st)}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt .$$

sau:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}_u\{x(-t)\}(-s) . \qquad (7.25)$$

Transformata Laplace bilaterală este suma dintre transformata Laplace unilaterală a semnalului şi transformata Laplace unilaterală reflectată (-s) a semnalului reflectat (-t) .

Vom observa că în cazul transformării unilaterale, specificarea domeniului de convergenţă nu este necesară. Transformata unilaterală se referă numai la partea din dreapta originii a oricărui semnal şi, deci, domeniul de convergenţă va fi un semiplan delimitat de o dreaptă paralelă cu axa imaginară, ce trece prin polul plasat în extrema dreaptă, întinzându-se spre dreapta.

7.4 Transformarea Laplace a distribuţiilor

Transformata Laplace a unei distribuţii f $\in$ S' poate fi definită utilizând transformata ei Fourier:

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{F}\{e^{-\sigma t}f\} \quad . \tag{7.26}$$

Dacă f $\in$ D' , şi dacă produsul $fe^{-\sigma t} \in S'$, deci este o distribuţie temperată, se defineşte transformata Laplace a ei prin:

$$\mathcal{L}\{f\} = \langle f\,,\, e^{-st}\rangle \quad . \tag{7.26'}$$

Pentru o distribuţie g $\in D'_+$, nulă în deschisul $(-\infty , 0)$, dacă $ge^{-\sigma t} \in S'_+$, transformata Laplace unilaterală are o definiţie similară:

$$\mathcal{L}\,\{g\} = \langle\, g\,,\, e^{-st}\rangle \quad . \tag{7.26''}$$

Sunt interesante pentru studiul semnalelor şi sistemelor, transformatele distribuţiilor Dirac $\delta(t)$ şi treapta unitară $\sigma(t)$.

Pentru distribuţia Dirac $\delta(t)$ se aplică definiţia sub forma:

$$\mathcal{L}\{\,\delta\,\} = \mathcal{F}\{\,\delta(t)e^{-\sigma t}\} \quad .$$

Pentru $\forall\sigma \in \mathbb{R}$, $e^{-\sigma t}\delta(t) = e^{0}\delta(t) = \delta(t)$ şi, deci:

$$\mathcal{L}\,\{\,\delta\,\} = \mathcal{F}\{\,\delta\,\} = 1 \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad . \tag{7.27}$$

Considerând distribuţia Dirac deplasată, $\delta(t\text{-}t_o)$ rezultă:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\,\delta(t-t_o)\} &= \mathcal{F}\{\,\delta(t-t_o)\,e^{-\sigma t}\} = \mathcal{F}\{e^{-\sigma t_o}\delta(t-t_o)\} = \\ &= e^{-\sigma t_o}\,\mathcal{F}\{\,\delta\,(t-t_o)\} = e^{-\sigma t_o}e^{-j\omega t_o} = e^{-st_o} \quad , \quad \forall\, s \in \mathbb{C} \quad .\end{aligned} \tag{7.28}$$

Pentru treapta unitară $\sigma(t)$ se poate aplica direct definiţia (7.7) :

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma\,(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty}e^{-st}\,dt \quad .$$

Integrala este convergentă numai dacă Re{s} > 0 , caz în care:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \quad , \quad Re\{\,s\} > 0 \quad . \tag{7.29}$$

Dacă treapta unitară este reflectată x(t) = σ(-t) , atunci:

$$\mathcal{L}\{\sigma(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \quad Re\{s\} < 0 \ .$$

şi, deci:

$$\mathcal{L}\{-\sigma(-t)\} = \frac{1}{s} \ , \quad Re\{s\} < 0 \ . \tag{7.30}$$

Vom încheia, subliniind că:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_u\{\delta\} = \mathcal{L}\{\delta\} = 1 \\ &\mathcal{L}_u\{\sigma(t)\} = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \\ &\mathcal{L}_u\{-\sigma(-t)\} = 0 \end{aligned} \tag{7.31}$$

7.5 Proprietăţi ale celor două tipuri de transformate Laplace

Se notează:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \quad s \in DC_x \ ; \quad x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$
$$y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s) \quad s \in DC_y \ ; \quad y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s) \ .$$

1. **Liniaritatea** Analizând relaţiile de definiţie, rezultă imediat că:

$$\begin{aligned} &a\,x(t) + b\,y(t) \longleftrightarrow a\,X(s) + b\,Y(s) \quad s \in DC_x \cap DC_y \quad \textit{cel puţin} \\ &a\,x(t) + b\,y(t) \longleftrightarrow a\,X_u(s) + b\,Y_u(s) \ . \end{aligned} \tag{7.32}$$

Menţiunea "*cel puţin*" la transformarea unilaterală se datorează faptului că în sumă anumiţi poli pot dispare ca urmare a simplificării cu zerouri, apărute ca efect al însumării.

2. **Translaţia în timp** Pentru $x(t-t_o)$ avem:

$$\mathcal{L}\{x(t-t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_o)\, e^{-st} dt = e^{-st_o} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_o} X(s) \ .$$

Cum polii lui X(s) nu se modifică ca urmare a multiplicării cu e^{-st_o}, domeniul de convergenţă rămâne cel al transformatei X(s):

$$x(t-t_o) \longleftrightarrow e^{-st_o}X(s) \quad s \in \mathrm{DC_x} \ , \ \forall t_o \ . \qquad (7.33')$$

Considerăm transformarea unilaterală aplicată numai pentru translaţii cu $t_o > 0$:

$$\mathcal{L}_u\{x(t-t_o)\} = \int_0^\infty x(t-t_o)\, e^{-st}\, dt = \int_{-t_o}^{0} x(\tau)\, e^{-s(\tau+t_o)}\, d\tau + \int_0^\infty x(\tau)\, e^{-s(\tau+t_o)}\, d\tau \ .$$

Dar $x(\tau) \equiv 0$ pentru $\tau < 0$, semnalul fiind considerat cauzal (vezi cele trei condiţii impuse originalului). În consecinţă, prima integrală este nulă şi, prin urmare:

$$x(t-t_o) \longleftrightarrow e^{-st_o}X_u(s) \ , \ t_o > 0 \ . \qquad (7.33'')$$

Această a doua relaţie este cunoscută şi sub denumirea de "teorema întârzierii", ca urmare a faptului că $t_o > 0$.

3. **Modularea în timp** Se caută transformata pentru $e^{st_o}x(t)$:

$$\mathcal{L}\{e^{s_o t}x(t)\} = \int_0^\infty x(t)\, e^{st_o} e^{-st}\, dt = X(s-s_o) \ .$$

Modularea în timp este prin urmare echivalentă cu o deplasare în domeniul s. Această deplasare conduce la deplasarea cu $\sigma_o = \mathrm{Re}\{s_o\}$ a domeniului de convergenţă. Dacă $\sigma_o > 0$, domeniul se deplasează spre dreapta cu σ_o, iar dacă $\sigma_o < 0$, domeniul se deplasează spre stânga. S-a obţinut o teoremă de deplasare în domeniul s:

$$e^{s_o t}x(t) \longleftrightarrow X(s-s_o) \quad s \in DC \ \textit{deplasat cu} \ \sigma_o \ . \qquad (7.34')$$

În cazul transformării unilaterale relaţia rămâne valabilă. Domeniul de convergenţă este şi el modificat prin deplasare.

$$e^{s_o t}x(t) \longleftrightarrow X_u(s-s_o) \ . \qquad (7.34'')$$

4. **Scalarea variabilei timp** Fie x(at), $a \in \mathbb{R}^*$. Transformata bilaterală este:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-\frac{s}{a}\tau}\, d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) .$$

Domeniul de convergenţă este şi el scalat. Fie DC' domeniul de convergenţă al transformatei X(s/a) şi DC domeniul de convergenţă al transformatei X(s). Atunci s ∈ DC' dacă (s/a) ∈ DC:

$$x(at) <\!\!\longrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \;,\; a \in \mathbb{R}^* \;,\; \frac{s}{a} \in DC \;. \qquad (7.35')$$

Pentru transformata unilaterală:

$$x(at) <\!\!\longrightarrow \frac{1}{a} X_u\left(\frac{s}{a}\right) \;,\; a > 0 \;, \qquad (7.35'')$$

domeniul de convergenţă fiind afectat spre stânga.

5. **<u>Teorema convoluţiei</u>**

$$\mathcal{L}\{ x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau\right] e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt\, d\tau = X(s)\, Y(s) \;.$$

Similar:

$$x(t) * y(t) \;<\!\!\longrightarrow\; X(s)\, Y(s) \quad s \in \mathrm{DC_x} \cap DC_y \quad cel\ puţin \;. \qquad (7.36')$$

$$x(t) * y(t) \;<\!\!\longrightarrow\; X_u(s)\, Y_u(s) \;. \qquad (7.36'')$$

6. **<u>Derivarea în timp</u>** Se pleacă de la relaţia de transformare inversă (7.14), care se derivează în funcţie de t care apare ca parametru în integrală:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, \frac{d}{dt} e^{st}\, ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} s\, X(s)\, e^{st}\, ds \;.$$

Înmulţirea cu s poate compensa un eventual pol din origine al lui X(s), aşa că domeniul de convergenţă al lui sX(s) este cel puţin domeniul lui X(s) :

$$\frac{dx(t)}{dt} \;<\!\!\longrightarrow\; sX(s) \quad s \in DC \quad cel\ puţin \;. \qquad (7.37')$$

Considerăm cazul transformării unilaterale:

$$\mathcal{L}_u\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = x(t)e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} + s\int_{0^+}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt \ .$$

Dar $|e^{-st}|$ —> 0 când t —> ∞ şi, prin urmare:

$$\mathcal{L}_u\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX_u(s) - x(0^+) \ ; \quad \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX_u(s) - x(0^+) \ . \tag{7.37''}$$

7. **Derivarea în domeniul variabilei s** Se derivează direct relaţia (7.7), s fiind parametru în integrală:

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty}[-tx(t)]e^{-st}dt \ .$$

Rezultă deci:

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad s \in DC \ . \tag{7.38'}$$

În mod asemănător se deduce că:

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX_u(s)}{ds} \ . \tag{7.38''}$$

8. **Integrarea semnalului în domeniul timp** Fie y(t) semnalul obţinut prin integrarea semnalului x(t).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * \sigma(t) \ .$$

Aplicând transformarea Laplace bilaterală şi ţinând seama de teorema convoluţiei se deduce:

$$Y(s) = X(s)\cdot\frac{1}{s} \ .$$

Cum (1/s) are domeniul de convergenţă Re{s} > 0 rezultă:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \;<\!\!\longrightarrow\; \frac{X(s)}{s} \quad s \in \mathrm{DC} \cap (\mathrm{Re}\{s\} > 0) \;\; \textit{cel puțin} . \qquad (7.39')$$

O relaţie similară se stabileşte şi pentru transformarea unilaterală:

$$\int_{0^+}^{t} x(\tau)\,d\tau \;<\!\!\longrightarrow\; \frac{X_u(s)}{s} \quad . \qquad (7.39'')$$

Dacă condiţiile iniţiale ale integralei nu sunt nule, în sensul că există un impuls în origine, atunci relaţia se corectează, devenind:

$$\int_{0^+}^{t} x(\tau)\,d\tau \;<\!\!\longrightarrow\; \frac{X_u(s) + x^{(-1)}(0^+)}{s} \quad . \qquad (7.39''')$$

În această relaţie $x^{(-1)}(0^+)$ este valoarea integralei în origine.

9. **Teorema valorii iniţiale a unui semnal cauzal** Pentru semnalul cauzal $x(t)=x(t)\sigma(t)$, cele două transformate sunt identice $X(s) \equiv X_u(s)$. Vom considera că nu există impulsuri Dirac în origine. Semnalul x(t) poate fi dezvoltat în jurul originii pentru valori $t > 0$:

$$x(t) = \left[x(0^+) + \frac{t}{1!}x'(0^+) + \frac{t^2}{2!}x''(0^+) + \ldots + t^k\frac{1}{k!}x^{(k)}(0^+) + \ldots\right]\sigma(t) \quad . \qquad (7.40)$$

Dar $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \mathcal{L}_u\{\sigma(t)\} = (1/s)$. Aplicând teorema derivării în domeniul s rezultă că:

$$\mathcal{L}\{t\,\sigma(t)\} = \mathcal{L}_u\{t\,\sigma(t)\} = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2} \quad .$$

Prin inducţie completă se poate arăta valabilitatea relaţiei:

$$\mathcal{L}\{t^k\sigma(t)\} = \mathcal{L}_u\{t^k\sigma(t)\} = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad . \qquad (7.41)$$

Aplicând oricare dintre operatorii Laplace relaţiei (7.40), şi ţinând seama de (7.41), se obţine o dezvoltare a lui X(s) în jurul originii:

$$X(s) = X_u(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(0^+)\,\frac{1}{s^{k+1}} \quad . \qquad (7.42)$$

Din această relaţie se deduce prin înmulţire cu s, expresia:

$$sX(s) = sX_u(s) = x(0^+) + \sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}(0^+)\,\frac{1}{s^k} \quad .$$

Trecând la limită pentru s —> ∞ , suma se anulează şi rămâne:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\,X(s) = \lim_{s \to \infty} s\,X_u(s) \quad , \qquad (7.43)$$

relaţie cunoscută sub denumirea de teorema valorii iniţiale a unui semnal cauzal.

Dacă valoarea iniţială $x(0^+)$ este nulă, multiplicând (7.42) cu s^2 şi trecând la limită pentru s —> ∞ se obţine:

$$x'(0^+) = \lim_{s \to \infty} s^2 X(s) = \lim_{s \to \infty} s^2 X_u(s) \quad , \quad dac\breve{a}\ x(0^+) = 0 \quad . \qquad (7.44)$$

Relaţia se poate extinde. Dacă $x(0^+) = x'(0^+) = ... = x^{(n-1)}(0^+) = 0$ atunci:

$$x^{(n)}(0^+) = \lim_{s \to \infty} s^{n+1} X(s) = \lim_{s \to \infty} s^{n+1} X_u(s) \ ; \ x^{(k)}(0^+) = 0 \ , \ 0 \le k \le n-1 \ . \qquad (7.44')$$

10. **<u>Teorema valorii finale a unui semnal cauzal</u>** Semnalul x(t) fiind cauzal: x(t) = = $x(t)\sigma(t)$ avem: $X(s) = X_u(s)$. Se ţine seama de teorema derivării în domeniul timp:

$$\int_{0^+}^{\infty} x'(t)\, e^{-st}\, dt = s\,X_u(s) - x(0^+) = sX(s) - x(0^+) \quad . \qquad (7.45)$$

Se trece la limită pentru s —> 0 . Cum s apare ca parametru în integrala din membrul stâng, rezultă:

$$\lim_{s \to 0} \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} x'(t) \lim_{s \to 0}(e^{-st})\, dt = \int_{0^+}^{\infty} x'(t)dt = x(t)\Big|_{0^+}^{\infty} = x(\infty) - x(0^+) \quad ,$$

unde $x(\infty) = \lim_{t \to \infty} x(t)$. Substituind rezultatul în (7.45), se obţine:

$$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s\,X_u(s) = \lim_{s \to 0} s\,X(s) \quad , \qquad (7.46)$$

relaţie cunoscută sub denumirea de teorema valorii finale a unui semnal cauzal.

Una din concluziile importante ce se desprinde din studiul comparativ al proprietăţilor celor două tipuri de transformate Laplace este aceea, că în majoritatea cazurilor practice cele două transformate au proprietăţi identice. Acesta este şi motivul pentru care nu este întotdeauna necesară specificarea tipului de transformare ce se utilizează.

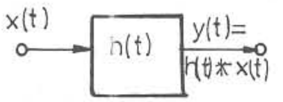
7.6 Studiul sistemelor liniare şi invariante în timp prin intermediul transformării Laplace

Teorema convoluţiei, prin forma simplă pe care o are, permite studiul comportării sistemelor LIT. Este posibilă, utilizând transformarea unilaterală, şi cuprinderea condiţiilor iniţiale nenule pentru sistemele cauzale.

7.6.1 Funcţia de sistem a unui sistem liniar şi invariant în timp

Pentru un SLIT relaţia dintre semnalele de intrare şi ieşire este $y(t) = h(t) * x(t)$. Aplicând acestei relaţii transformarea Laplace bilaterală se obţine:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \quad ; \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s) \quad . \tag{7.47}$$



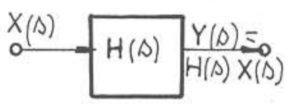


Fig. 7.7.a SLIT caracterizat de răspunsul la impuls h(t).

Fig. 7.7.b SLIT caracterizat de funcţia de sistem H(s).

Relaţia (7.47) permite determinarea răspunsului unui sistem de orice fel, nu neapărat cauzal, la un semnal de intrare x(t) nici el neapărat cauzal. Utilizarea transformării unilaterale nu permite tratarea unor cazuri teoretice importante. Pe de altă parte, în cazul în care sistemul şi semnalul sunt cauzale, simpla adăugare la transformate a indicelui "u", modifică în mod corespunzător relaţia (7.47). În cazul utilizării transformării Laplace bilaterale, specificarea domeniului de convergenţă este neapărat necesară.

Aşa cum răspunsul la impuls caracterizează complet comportarea unui SLIT în domeniul timp, funcţia H(s), transformata Laplace bilaterală a acestuia, caracterizează complet comportarea sa în domeniul complex. Funcţia H(s) poartă diverse denumiri, cum ar fi funcţie (de) sistem sau funcţie de transfer. Ea poate fi determinată şi drept raport al transformatelor semnalelor de ieşire Y(s) şi a semnalelor de intrare X(s).

Fie un SLIT stabil. Atunci există $\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega) = \mathcal{L}\{h(t)\}(j\omega)$ şi, deci axa imaginară este în domeniul de convergenţă al funcţiei sistem H(s). Cauzalitatea nu a fost nicicum implicată.

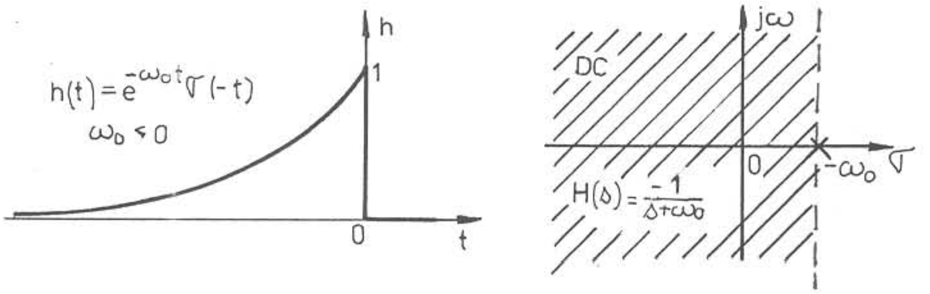


Fig. 7.8 Răspunsul la impuls h(t) al unui sistem necauzal şi funcţia de sistem H(s) împreună cu domeniul ei de convergenţă, DC.

Pentru exemplificare fie sistemul anticauzal având funcţia pondere $h(t) = e^{-\omega_0 t}\sigma(-t)$, $\omega_0 < 0$ - figura 7.8. Transformata Laplace bilaterală, funcţia sistem, este: $H(s) = -1/(s+\omega_0)$, condiţia de convergenţă fiind $Re\{s\} < -\omega_0$. Polul $-\omega_0$ este situat în semiplanul drept. Axa imaginară este inclusă în domeniul de convergenţă DC , existând $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) = -1/(\omega_0+j\omega)$.

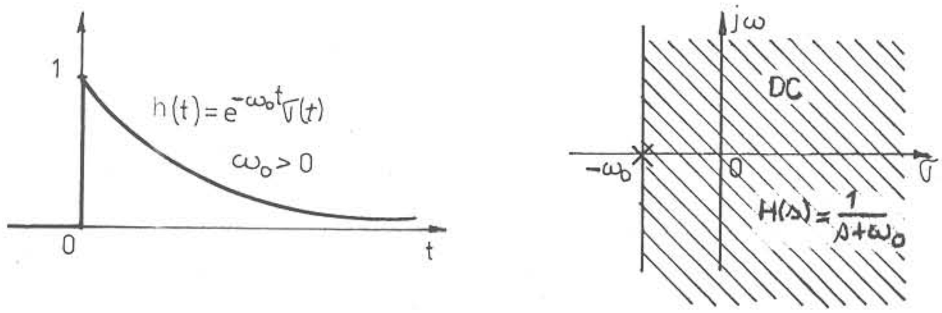


Fig. 7.9 Răspunsul la impuls h(t) al unui sistem cauzal şi funcţia de sistem H(s) împreună cu domeniul ei de convergenţă, DC.

Dacă sistemul este cauzal, domeniul său de convergenţă se întinde spre dreapta, ca şi semnalul. Dacă, în plus, sistemul este şi stabil, axa $j\omega$ este din domeniul de convergenţă. Dacă H(s) are poli, ei pot fi plasaţi exclusiv în semiplanul stâng. În figura 7.9 se dă exemplul unui sistem stabil şi cauzal $h(t) = e^{-\omega_0 t}\sigma(t)$, $\omega_0 > 0$. Transformata Laplace bilaterală a lui h(t) , funcţia de sistem, este $H(s) = 1/(s+\omega_0)$, convergenţa fiind asigurată pentru acele valori s din planul complex ce au $Re\{s\}<-\omega_0$. Axa imaginară este inclusă în domeniul de convergenţă şi deci, există $\mathcal{F}\{h(t)\}$ =

$=-1/(\omega_o+j\omega)$. Polul funcţiei H(s), $s_p = -\omega_o$, este plasat în semiplanul stâng. Este, prin urmare, clar că un sistem stabil şi cauzal nu poate avea poli decât în semiplanul stâng, nici măcar pe axa imaginară.

7.6.2 Determinarea răspunsului unui sistem liniar şi invariant în timp utilizând transformarea Laplace

Principial, problema are o soluţionare simplă. Fiind dat semnalul, se determină transformata sa Laplace (unilaterală sau bilaterală, după caz) X(s). Se determină Y(s)=H(s)X(s) , transformata Laplace (unilaterală sau bilaterală). Prin transformare inversă rezultă y(t).

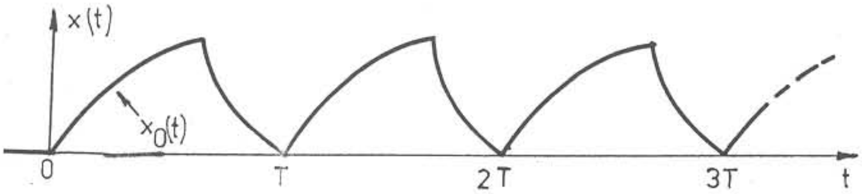


Fig. 7.10 Semnalul cauzal x(t) poate fi considerat ca repetarea la infinit a primului său segment, având suportul [0,T].

Un caz aparte este cel în care la intrarea unui sistem cauzal, $h(t) <\!\!\longrightarrow H(s) = H_u(s)$, se aplică un semnal x(t) având forma din figura 7.10. Dacă se notează cu $x_o(t)$ semnalul cu suportul [0,T] , atunci:

$$x_o(t) = x(t)\left[\sigma(t) - \sigma(t-T)\right] \quad . \qquad (7.48)$$

Semnalul x(t) poate fi privit ca fiind repetarea lui $x_o(t)$, pasul de repetare fiind T :

$$x(t) = x_o(t) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x_o(t-kT) \quad . \qquad (7.49)$$

Semnalul x(t), deşi nu satisface definiţia periodicităţii, se spune că este periodic pentru t > 0 sau că este periodic cauzal.

Dacă se notează:

$$\mathcal{L}_u\{x_o(t)\} = \int_0^T x_o(t)\, e^{-st}\, dt = X_{ou}(s) = X_o(s) \quad , \qquad (7.50)$$

neexistând nici o deosebire între cele două transformate, atunci din (7.49) rezultă:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}_u\{x_o(t)\} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_u\{\delta(t-kT)\} = X_{ou}(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} \text{ , } \mathrm{Re}\{s\} > 0 \text{ .}$$

Deoarece Re{s} > 0 , suma din relaţie este convergentă şi este $1/(1-e^{-sT})$. În consecinţă, se deduce relaţia:

$$X_u(s) = \frac{X_{ou}(s)}{1-e^{-sT}} \quad ; \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0 \quad , \qquad (7.51)$$

cunoscută şi sub numele de formula lui Weidelich. În condiţiile problemei, aplicarea transformării bilaterale conduce la acelaşi rezultat, astfel că indicele "u" din formula lui Weidelich poate fi omis.

Pentru a determina semnalul de ieşire se calculează:

$$Y_u(s) = H_u(s)\,X_u(s) = \frac{H_u(s)\,X_{ou}(s)}{1-e^{-sT}} \quad . \qquad (7.52)$$

Determinarea semnalului original y(t) se face inversând (7.52). Admiţând că sistemul considerat este descris de o ecuaţie diferenţială, soluţiei generale a acesteia îi corespunde componenta de regim permanent a lui y(t) iar soluţiei sale particulare îi corespunde componenta de regim tranzitoriu a lui y(t).

Deci y(t) are o componentă tranzitorie $y_{tr}(t)$ ce se amortizează în timp şi o componentă de regim permanent, sau staţionar, $y_S(t)$ ce se menţine şi la infinit:

$$y(t) = \mathcal{L}_u^{-1}\{Y_u(s)\} = y_{tr}(t) + y_S(t) \quad . \qquad (7.53)$$

Componenta tranzitorie, având un factor exponenţial de amortizare, se datoreşte polilor din semiplanul stâng ai funcţiei $Y_u(s)$, cu $\sigma_p < 0$. Componenta de regim permanent nu are factorul exponenţial (ea îşi păstrează caracteristicile în timp), deci nu poate fi decât rezultatul contribuţiei polilor funcţiei $Y_u(s)$ ce au $\sigma = 0$, adică sunt situaţi pe axa imaginară (vezi "Contribuţia polilor ..." în paragraful 7.6.3).

Notând: $y_{tr}(t) \longleftrightarrow Y_{tru}(s)$ şi $y_S(t) \longleftrightarrow Y_{Su}(s)$, se scrie:

$$Y_{Su}(s) = Y_u(s) - Y_{tru}(s) \quad . \qquad (7.54)$$

Dacă $y_{oS}(t) = y_S(t)[\sigma(t)-\sigma(t-T)]$ atunci, conform formulei lui Weidelich:

$$Y_{oSu}(s) = Y_{Su}(s)\left(1-e^{-sT}\right) \quad .$$

Se ţine seama de (7.54) şi (7.52) şi se obţine:

$$Y_{oSu}(s) = \left[Y_u(s) - Y_{tru}(s)\right]\left(1-e^{-sT}\right) = \left[\frac{X_{ou}(s)\,H(s)}{1-e^{-sT}} - Y_{tru}(s)\right]\left(1-e^{-sT}\right)$$

$$Y_{oSu}(s) = X_{ou}(s)\,H(s) - Y_{tru}(s)\left(1-e^{-sT}\right) \quad ; \quad y_{oS}(t) = \mathcal{L}_u^{-1}\{Y_{oSu}(s)\}$$

(7.55; 7.56)

Se observă că, pe baza formulei lui Weidelich, poate fi determinată transformata Laplace a răspunsului unui sistem cauzal la un semnal periodic cauzal doar observând comportarea temporală a acestui semnal în prima sa perioadă. Cu ajutorul transformatei Laplace a răspunsului pot fi determinate componentele de regim tranzitoriu şi permanent ale acestuia.

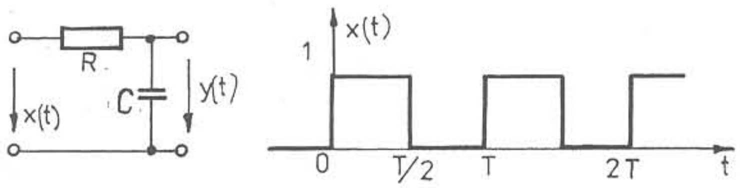


Fig. 7.11 (a) Circuit RC; (b) Semnal aplicat la intrarea circuitului RC.

Exemplu *La intrarea circuitului din figura 7.11 a se aplică unda rectangulară cauzală cu factor de umplere 0,5 , prezentată în figura 7.11 b. Se cere răspunsul de regim permanent (staţionar).*

Pentru circuit se deduce:

$$H_u(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \quad ; \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \quad ; \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\omega_c \ .$$

Considerăm numai prima porţiune [0,T] din semnalul de intrare $x_0(t)$,

$X_{ou}(s) = \frac{1}{s}\left(1-e^{-\frac{sT}{2}}\right)$. *Aplicând formula lui Weidelich se obţine:*

$$Y_u(s) = \frac{\omega_c\left(1-e^{-\frac{sT}{2}}\right)}{s\,(s+\omega_c)\left(1-e^{-sT}\right)} = \frac{\omega_c}{s\,(s+\omega_c)\left(1+e^{-\frac{sT}{2}}\right)} \ .$$

Componenta tranzitorie este cauzată de polul $-\omega_c$, deci:

$$Y_{tru}(s) = \frac{A}{s+\omega_c} \quad ; \quad A = \left[Y_u(s)\,(s+\omega_c)\right]_{s=-\omega_c} = -\frac{1}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}} \ .$$

Conform relaţiei (7.56) se determină $Y_{oSu}(s)$:

$$Y_{oSu}(s) = \frac{\omega_c\left(1-e^{-\frac{sT}{2}}\right)}{s(s+\omega_c)} + \frac{1}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}}\cdot\frac{1-e^{-sT}}{s+\omega_c}$$

$$Y_{oSu}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_c} - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_c}\right)e^{-\frac{sT}{2}} + \frac{1}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}}\left(\frac{1}{s+\omega_c} - \frac{e^{-sT}}{s+\omega_c}\right).$$

De aici rezultă prin inversare:

$$y_{oS}(t) = \left(1 - e^{-\omega_c t}\right)\sigma(t) - \left[1 - e^{-\omega_c(t-\frac{T}{2})}\right]\sigma(t-\frac{T}{2}) + \frac{1}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}}\left[e^{-\omega_c t}\sigma(t) - e^{-\omega_c(t-T)}\sigma(t-T)\right] ,$$

$$y_{oS}(t) = \left(1 - \frac{e^{\frac{\omega_c T}{2}}}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}}e^{-\omega_c t}\right)\sigma(t) - \left[1 - e^{-\omega_c(t-\frac{T}{2})}\right]\sigma(t-\frac{T}{2}) - \frac{e^{-\omega_c(t-T)}}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}}\sigma(t-T) ,$$

şi: $y_S(t) = y_{oS}(t) * \delta_T(t)$.

Se observă că:

$$\lim_{t \to \infty}\left(1 - \frac{e^{\frac{\omega_c T}{2}}}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}}e^{-\omega_c t}\right) = 1 \quad ; \quad \lim_{t \to \infty}\left(1 - e^{-\omega_c(t-\frac{T}{2})}\right) = 1 ,$$

şi: $$\lim_{t \to \infty}\frac{e^{-\omega_c(t-T)}}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}} = 0 .$$

Ţinând, însă, seama de faptul că suportul lui $y_{oS}(t)$ este intervalul $[0,T]$, se poate afirma că pe măsură ce T creşte, $y_{oS}(t)$ este o aproximare tot mai bună pentru $x_o(t)$. De aceea se poate afirma că pentru $t \longrightarrow \infty$, limita lui $y_S(t)$ este nenulă, ceea ce justifică denumirea de componentă staţionară pentru acest semnal. Având în vedere forma de variaţie cu ω a modulului funcţiei sistem $|H_u(\omega)|$, se constată faptul că semnalul $y(t)$ este o aproximare pentru trunchierea lui $x(t)$. Numărul componentelor spectrale ale lui $x(t)$, neafectate prin trunchiere, depinde de valoarea pulsaţiei de tăiere ω_c (el fiind cu atât mai mare cu cât ω_c este mai mare).

7.6.3 Sisteme liniare şi invariante în timp caracterizate prin ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Fie sistemul LIT caracterizat de ecuaţia diferenţială:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad a_0 \neq 0 \ , \qquad (7.57)$$

cu condiţii iniţiale nenule.

Aplicând acestei egalităţi transformarea Laplace bilaterală, rezultă:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s) \quad . \tag{7.58}$$

Se poate determina funcţia de sistem H(s) = Y(s)/X(s) :

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad . \tag{7.59}$$

Dacă este dată forma ecuaţiei diferenţiale (7.57), funcţia de sistem se scrie imediat prin identificarea coeficienţilor şi reciproc. Fiind dată forma H(s) din (7.59), ecuaţia diferenţială se deduce tot prin identificarea coeficienţilor. Vom mai observa faptul că, dacă sistemul este descris de o ecuaţie diferenţială, H(s) este o fracţie (funcţie raţională) în s.

Rădăcinile ecuaţiei:

$$D(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0 \quad , \tag{7.60}$$

dau polii sistemului, s_{pk} , în număr de N, incluzând şi ordinele de multiplicitate.

Rădăcinile ecuaţiei:

$$N(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0 \quad , \tag{7.61}$$

dau zerourile sistemului, s_{ok} , în număr de M, incluzând şi ordinele de multiplicitate.

Pentru a putea utiliza (7.59) trebuie specificat domeniul de convergenţă, în funcţie de natura răspunsului la impuls h(t). Dacă însă h(t)σ(t) = h(t), sistemul fiind cauzal, atunci H(s) = $H_u(s)$ iar domeniul de convergenţă se întinde spre dreapta, de la cel mai din dreapta pol al sistemului. Dacă sistemul este stabil, toţi polii sunt în semiplanul din stânga, deci toţi polii au proprietatea $\mathrm{Re}\{s_{pk}\} < 0$ pentru $1 \le k \le N$.

Vom presupune în cele ce urmează că sistemul este cauzal, prin urmare: $H_u(s)=H(s)=\mathcal{L}_u\{h(t)\}=\mathcal{L}\{h(t)\}$. Teorema valorii iniţiale a unui semnal cauzal, aplicată răspunsului la impuls (şi el cauzal), conduce la:

$$h(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot H_u(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot H(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s\,N(s)}{D(s)} \quad . \tag{7.62}$$

Dacă $h(0^+)$ este finit, deci nu există impulsuri Dirac în origine, atunci se poate deduce că $M+1 \leq N$. Într-adevăr, ţinând seama de forma expresiei (7.59), avem:

$$h(0^+) = \lim_{s\to\infty} \frac{b_M s^{M+1} + b_{M-1} s^M + ... + b_1 s^2 + b_0 s}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + ... + a_1 s + a_0} .$$

Dacă $M+1 > N$, atunci limita nu poate fi finită. Rămâne, în consecinţă: $h(0^+) < \infty$, $M+1 \leq N$, $M \leq N-1$.

Gradul numărătorului unei funcţii sistem ce nu are impulsuri Dirac în origine este cel puţin cu o unitate mai mic decât al numitorului.

Dacă $M+1 > N$ expresia lui h(t) prezintă impulsuri Dirac în origine. Spre exemplu dacă $H_u(s) = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1}$ rezultă $h(t) = \delta(t)+e^{-t}\sigma(t)$.

În mod normal numărul polilor unei funcţii sistem întrece cel puţin cu o unitate numărul zerourilor ei. Dacă polii unui sistem stabil sunt plasaţi numai în semiplanul stâng, în schimb zerourile sale pot fi plasate oriunde.

Sistemele ce au atât polii cât şi zerourile plasate în semiplanul stâng se numesc **sisteme de fază minimă**. Inversul funcţiei $H_u(s)$ a unui sistem de fază minimă, $1/H_u(s)$, are atât polii cât şi zerourile în semiplanul stâng. Şi ea este o funcţie de fază minimă, corespunzând unui sistem de fază minimă.

Substratul noţiunii introduse poate fi clarificat printr-un exemplu. Fie:

$$h(t) = e^{-t}\sigma(t) \quad \longleftrightarrow \quad H_u(t) = \frac{1}{s+1} .$$

Răspunsul în frecvenţă al acestui sistem este $H(\omega) = 1/(1+j\omega)$. Modulul şi faza răspunsului în frecvenţă sunt $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$; $\Phi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\omega$. Dacă interesează numai modulul răspunsului în frecvenţă, nu şi faza sa, se pune întrebarea dacă sistemul dat ca exemplu este singurul având acelaşi modul în funcţie de frecvenţă? Răspunsul este negativ. Şi sistemul cu răspunsul în frecvenţă:

$$H_{\omega_o}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \frac{1-j\frac{\omega}{\omega_o}}{1+j\frac{\omega}{\omega_o}} \quad \longleftrightarrow \quad h_{\omega_o}(t) = \frac{1}{\omega_o - 1}\left[(\omega_o+1)e^{-t} - 2\omega_o e^{-\omega_o t}\right]\sigma(t) ,$$

are acelaşi modul ca şi sistemul cu funcţia $H(\omega)$. În schimb, funcţia sa fază-frecvenţă este:

$$\Phi_{\omega_o}(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\omega - 2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\omega_o} = \Phi(\omega) - 2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\omega_o} .$$

Funcţia sistem corespunzătoare lui $h_{\omega_o}(t)$ are forma:

$$H_{\omega_o u}(s) = \frac{\omega_o - s}{(1+s)(\omega_o + s)} .$$

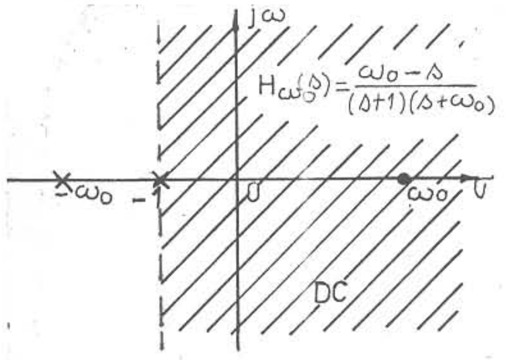


Fig. 7.12 Funcţie sistem şi domeniul ei de convergenţă DC.

După cum rezultă din figura 7.12, funcţia are doi poli în semiplanul stâng şi un zero în semiplanul drept. Modulul răspunsului în frecvenţă este acelaşi ca şi cel corespunzător funcţiei sistem $H_u(s) = 1/(1+s)$, dar faza ei este mai mare. Faza $\Phi_{\omega o}(\omega)$ este minimă pentru $\omega_o \rightarrow \infty$, când $\Phi_{\omega_o}(\omega) = \Phi(\omega)$. Prin urmare $H_u(s)=1/(1+s)$ neavând nici un zero în semiplanul drept, corespunde unui sistem ce introduce un defazaj minim în comparaţie cu alte sisteme (cauzale) ce au aceiaşi caracteristică $|H(\omega)|$.

Vom căuta să interpretăm şi teorema valorii finale, care pentru sistemul h(t) (cauzal) se scrie sub forma:

$$h(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,H_u(s) = \lim_{s \to 0} s\,H(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s\,N(s)}{D(s)} .$$

Dacă sistemul este stabil, $h(\infty) = 0$ şi, prin urmare $D(0) \neq 0$. Sistemele cauzale şi stabile nu pot avea poli în origine. Acest rezultat este în concordanţă cu faptul că toţi polii lui H(s) sunt în semiplanul stâng. În acest caz, teorema valorii finale nu aduce nici o informaţie suplimentară.

Contribuţia polilor unui sistem cauzal la răspunsul la impuls al acestuia

Funcţia de sistem $H_u(s)$ (7.59) pentru un sistem cauzal, poate fi descompusă în fracţii simple şi pusă sub forma:

$$H_u(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_{pk}} \quad ; \quad A_k = H_u(s)\,(s - s_{pk})\Big|_{s=s_{pk}} , \qquad (7.63)$$

dacă toţi polii sunt simpli. Forma răspunsului la impuls este atunci:

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_{pk} t}\right)\sigma(t) . \qquad (7.64)$$

Deosebim două cazuri: i) $s_{pk} \in \mathbb{R}$ şi ii) $s_{pk} \notin \mathbb{R}$. Cum coeficienţii a_k şi b_k în ecuaţia (7.59) sunt reali, rezultă faptul că polii complecşi nu pot apărea decât în perechi complex conjugate:

i) $s_{pk} = \sigma_k$: $A_k e^{\sigma_k t}$ este un termen ce descreşte numai dacă polul are $\sigma_k < 0$. Dacă $\sigma_k = 0$, deci polul simplu se află în origine, sistemul nu mai poate fi stabil decât la limită. După ce sistemul a fost excitat şi excitaţia a dispărut, sistemul nu revine în starea iniţială, mărimea de ieşire rămânând, totuşi, finită. Dacă însă $\sigma_k > 0$, $A_k e^{\sigma_k t}$ creşte în timp şi sistemul, cum era de aşteptat, este instabil.

Reţinem, în concluzie, faptul că polii simpli reali dau contribuţii exponenţiale în expresia răspunsului la impuls.

ii) $s_{pk} = \sigma_k + j\omega_k$: Atunci există încă un pol, $s_{pm} = \sigma_k - j\omega_k$. Perechea celor doi poli dă o contribuţie de forma: $B_k e^{\sigma_k t}\sin(\omega_k t + \varphi_k)$ în răspunsul la impuls. Observăm imediat caracterul oscilant al termenului, frecvenţa de oscilaţie fiind dată de coeficientul părţii imaginare a polului. Referindu-ne acum la coeficientul părţii reale a polului σ_k , dacă $\sigma_k < 0$ oscilaţia se amortizează în timp. Cu cât polul are $|\sigma_k|$ mai mare, cu atât viteza de amortizare este mai mare. Polii apropiaţi de axa reală dau răspunsuri oscilante ce descresc mai lent în timp.

Pentru $\sigma_k = 0$, deşi excitaţia a încetat să mai existe, sistemul va oscila în continuare între două limite, mărimea de la ieşirea sa rămânând totuşi mărginită. Sistemul, un oscilator sinusoidal, este, totuşi, stabil la limită.

Dacă $\sigma_k > 0$ oscilaţiile cresc exponenţial ca amplitudine şi sistemul este instabil.

Vom analiza acum polii multiplii de ordinul doi. Expresia funcţiei de sistem conţine în descompunerea ei în fracţii simple termeni de forma:

$$\dots + \frac{A}{s - s_p^r} + \frac{B}{\left(s - s_p^r\right)^2} + \frac{C}{s - s_p^i} + \frac{D}{s - s_p^{i*}} + \frac{E}{\left(s - s_p^i\right)^2} + \frac{F}{\left(s - s_p^{i*}\right)^2} + \dots ,$$

unde pentru simplitate am notat cu s_p^r un pol real, cu s_p^i un pol complex iar cu s_p^{i*} conjugatul său complex.

i) Polul real de ordinul 2, $s_p^{i} = \sigma_p$ generează în răspunsul la impuls termeni de forma $M_0 e^{\sigma_p t} + M_1 t e^{\sigma_p t}$. Dacă $\sigma_p < 0$, contribuţia sa în răspunsul la impuls, având caracter exponenţial, tinde spre zero, sistemul fiind stabil. Dacă $\sigma_p = 0$, termenii devin $M_0+M_1 t$. De data aceasta răspunsul la impuls nu rămâne mărginit şi sistemul este instabil. Tot instabil este şi dacă $\sigma_p > 0$.

ii) Perechea de poli complex conjugaţi $s_p^{i} = \sigma+j\omega$; $s_p^{i*} = \sigma-j\omega$ contribuie la formarea expresiei răspunsului la impuls prin termeni de forma: $N_0 e^{\sigma t}\sin(\omega t+\varphi_0) + N_1 t e^{\sigma t}\sin(\omega t+\varphi_1)$. Dacă $\sigma < 0$ răspunsul se atenuează. Dacă $\sigma = 0$, polii fiind plasaţi pe axa imaginară, răspunsul este oscilant dar de amplitudine crescătoare ca urmare a factorului t. Prin urmare nu mai este asigurată nici măcar stabilitatea la limită. Cu atât mai mult sistemul este instabil dacă $\sigma > 0$, creşterea amplitudinii de oscilaţie fiind exponenţială.

În aceeaşi manieră se pot analiza contribuţiile unor poli de ordin superior. Concluzia ce se desprinde este că, pentru un sistem cauzal, stabilitatea strictă este întotdeauna asigurată dacă polii sunt în semiplanul stâng. Dacă polii sunt pe axa imaginară atunci sistemul este stabil la limită doar dacă ei sunt simpli. Pentru o singură pereche de poli complex conjugaţi plasaţi pe axa imaginară se obţine un oscilator sinusoidal. Odată excitat, sistemul generează la ieşire o oscilaţie a cărei amplitudine rămâne constantă (răspunsul este mărginit la ieşire).

Plasarea unui pol al unui sistem cauzal în semiplanul drept, chiar dacă este simplu dă naştere unui sistem instabil; mărimea sa de ieşire tinde să crească spre infinit în mod exponenţial sau oscilant cu anvelopă exponenţială.

Se mai observă că polii plasaţi în semiplanul stâng dau o componentă tranzitorie ce se amortizează. Răspunsul permanent, ce se menţine cu aceleaşi caracteristici în timp este contribuţia exclusivă a polilor simpli situaţi pe axa imaginară.

Calculul răspunsului unui sistem caracterizat printr-o ecuaţie diferenţială

În loc de a determina răspunsul SLIT rezolvând ecuaţia diferenţială (7.57) pentru un semnal de intrare x(t) dat, se poate proceda, aşa cum s-a arătat în §7.6.2 la calculul acestuia prin intermediul transformatei Laplace. Dacă sistemul este cauzal, se aplică transformarea unilaterală. Ea nu va diferi de transformarea bilaterală decât în momentul impunerii condiţiilor iniţiale.

Pentru exemplificare vom considera un sistem de tip cauzal, caracterizat de ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad , \qquad (7.65)$$

având condiţiile iniţiale $y(0^+) = 2$ şi $y'(0^+) = -2$. La intrarea SLIT se aplică semnalul (cauzal) $x(t) = 4\sigma(t)$.

Vom aplica egalităţii (7.65) transformarea Laplace unilaterală. Pentru aceasta ţinem seama de teorema de derivare în domeniul timpului (7.37"):

$$y(t) \ <\!\!-\!\!-\!\!> \ Y_u(s) \quad ; \quad y'(t) \ <\!\!-\!\!-\!\!> \ sY_u(s) - y(0^+) \ . \qquad (7.66)$$

Pentru derivata a doua mai aplicăm odată relaţiei (7.66) teorema de derivare (7.37"):

$$(y')' = y'' \ <\!\!-\!\!-\!\!> \ s\left[sY_u(s) - y(0^+)\right] - y'(0^+) \ . \qquad (7.67)$$

Cu acestea şi cu $4\sigma(t) <\!\!-\!\!-\!\!> 4/s$, avem:

$$s\left[sY_u(s) - 2\right] + 2 + 3\left[sY_u(s) - 2\right] + 2Y_u(s) = \frac{4}{s} \ . \qquad (7.68)$$

Se determină $Y_u(s)$, rezolvând ecuaţia (7.68):

$$Y_u(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2} \ . \qquad (7.69)$$

Odată ce $Y_u(s)$ este descompus în fracţii simple, se poate determina răspunsul y(t):

$$y(t) = 2\sigma(t) - 2e^{-t}\sigma(t) + 2e^{-2t}\sigma(t) = \left(2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t}\right)\sigma(t) \ . \qquad (7.70)$$

Se pot verifica condiţiile iniţiale:

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{t \to 0^+} \left(2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t}\right) = 2 - 2 + 2 = 2 \ .$$

În ceea ce priveşte derivata, pentru $t > 0$ funcţia de derivat este $2-2e^{-t}+2e^{-2t}$. Avem, prin urmare: $y'(t) = 2e^{-t}-4e^{-2t}$, $t > 0$ şi:

$$\lim_{t \to 0^+} y'(t) = \lim_{t \to 0^+} \left(2e^{-t} - 4e^{-2t}\right) = 2 - 4 = -2 \ .$$

Sisteme de ordinul întâi

Un sistem de ordinul întâi cauzal caracterizat de ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \omega_o y(t) = K\omega_o x(t) \qquad \omega_o > 0 \quad , \qquad (7.71)$$

are funcţia sistem:

$$H(s) = H_u(s) = \frac{K\omega_o}{s+\omega_o} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\omega_o \quad . \tag{7.72}$$

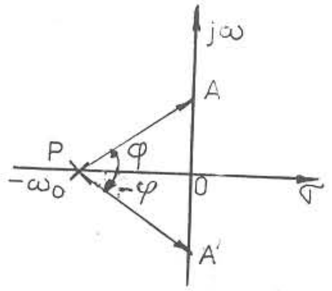


Fig. 7.13 CPZ pentru un sistem de ordinul întâi.

Constelaţia de poli şi zerouri CPZ -figura 7.13- se reduce la un singur pol plasat în semiplanul stâng. Sistemul este, prin urmare, stabil şi are răspunsul la impuls de tip exponenţial, polul fiind real.

În ceea ce priveşte răspunsul în frecvenţă, el poate fi determinat, aşa cum s-a arătat, în mod grafic. Astfel, modulul răspunsului şi faza sa pentru o frecvenţă ω, definită de poziţia punctului A pe axa imaginară, sunt date de:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\overline{PA}|} \quad ; \quad \Phi(\omega) = -\varphi \quad . \tag{7.73}$$

Pe măsură ce ω creşte, $|\overline{PA}|$ creşte şi, prin urmare $|H(\omega)|$ scade. Se poate observa că pentru punctul A', simetricul lui A, $|\overline{PA'}| = |\overline{PA}|$. Drept urmare, caracteristica de modul este o funcţie pară.

Pe măsură ce ω creşte, φ creşte, tinzând spre π/2 şi, deci Φ(ω) scade, tinzând către -π/2 . Nu e greu de observat că pentru A', simetricul lui A, unghiul făcut de segmentul $|\overline{PA'}|$ cu axa reală este -φ . Rezultă imediat faptul binecunoscut că Φ(ω), caracteristica de fază, este o funcţie impară.

Sisteme de ordinul doi

Dacă sistemul caracterizat de ecuaţia diferenţială:

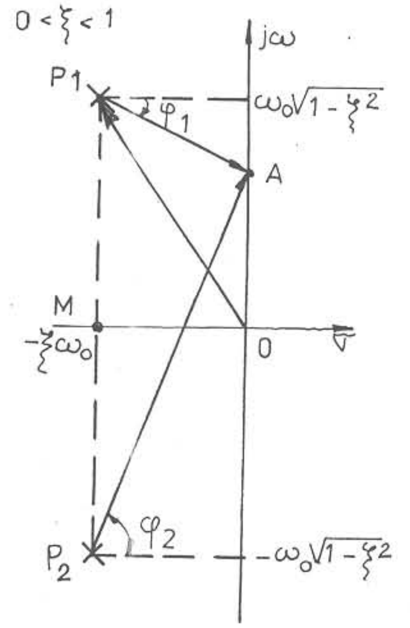
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_o\frac{dy(t)}{dt} + \omega_o^2 y(t) = K\omega_o^2 x(t) \quad , \tag{7.74}$$

este cauzal, se determină funcţia de transfer (funcţia sistem) sub forma:

$$H_u(s) = H(s) = \frac{K\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \quad . \tag{7.75}$$

Polii $s_{1,2} = -\xi\omega_o \pm \omega_o\sqrt{\xi^2-1}$ sunt reprezentaţi în figura 7.14 a pentru $\xi < 1$. Cei doi poli complex conjugaţi conferă răspunsului la impuls al sistemului un caracter oscilant, frecvenţa de oscilaţie fiind $\omega_o\sqrt{1-\xi^2}$. Din triunghiul dreptunghic

OP_1M se determină, aplicând teorema lui Pitagora, $|\overline{OP_1}| = \omega_o$.



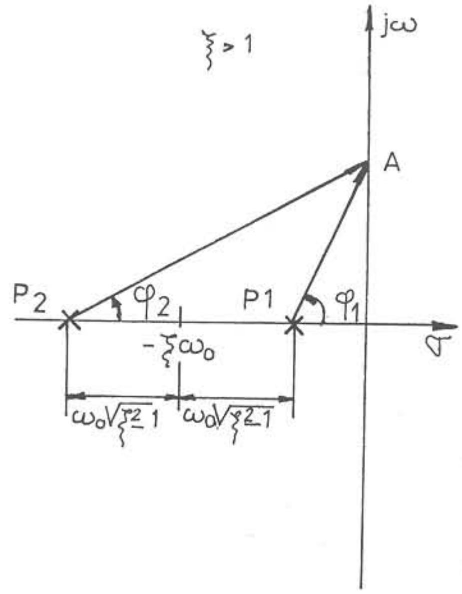


Fig. 7.14 a CPZ pentru un sistem de ordinul doi având o pereche de poli complex conjugaţi.

Fig. 7.14 b CPZ pentru un sistem de ordinul doi având poli reali.

Dacă A este un punct pe axa imaginară ce defineşte o frecvenţă, atunci $|H(\omega)| = \dfrac{1}{|\overline{P_1A}| \cdot |\overline{P_2A}|}$ şi $\Phi(\omega) = -\varphi_1-\varphi_2$. Pentru A —> ∞ (ω —> ∞) $|\overline{P_1A}|$ şi $|\overline{P_2A}|$ tind spre ∞ , deci $|H(\omega)|$ —> 0 .

La frecvenţa nulă, $A \equiv 0$, $\varphi_1+\varphi_2 = 0$ deci $\Phi(0) = 0$. Atunci când $\omega \to \infty$, $\varphi_1 \to \pi/2$, $\varphi_2 \to \pi/2$ deci $\Phi(\omega) \to -\pi$.

Se observă imediat că $|H(\omega)|$ este o funcţie pară iar $\Phi(\omega)$ este o funcţie impară.

Dacă $\xi > 1$ cei doi poli sunt plasaţi pe axa reală, după cum rezultă din figura 7.14 b. Răspunsul la impuls are un caracter neoscilant (monoton).

Dacă $\xi = 1$ cei doi poli se confundă, în punctul $-\omega_o$ de pe axa reală. Răspunsul rămâne tot aperiodic.

<u>Sistemul "trece tot"</u>

În exemplul privind funcţiile de fază minimă am utilizat un sistem având răspunsul în frecvenţă:

$$H(\omega) = \frac{\omega_o - j\omega}{\omega_o + j\omega} \quad . \tag{7.76}$$

Considerând sistemul cauzal, funcţia de transfer este:

$$H_u(s) = H(s) = \frac{\omega_o - s}{\omega_o + s} \quad . \qquad (7.77)$$

Constelaţia de poli şi zerouri este cea din figura 7.15. Se observă imediat că modulul răspunsului în frecvenţă este $|H(\omega)| = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{PA}|} = 1$. O sinusoidă, de orice frecvenţă, aplicată unui astfel de sistem, trece fără ca amplitudinea ei să fie afectată. Acesta este şi motivul pentru care asemenea sisteme sunt denumite de tip "trece tot".

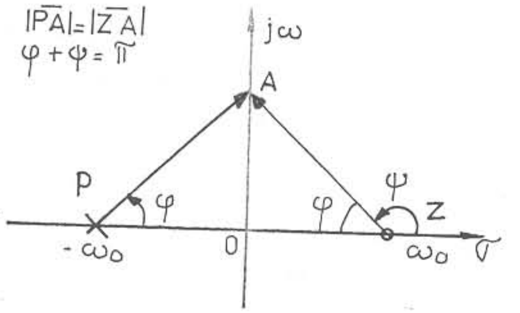


Fig. 7.15 CPZ pentru un sistem "trece tot".

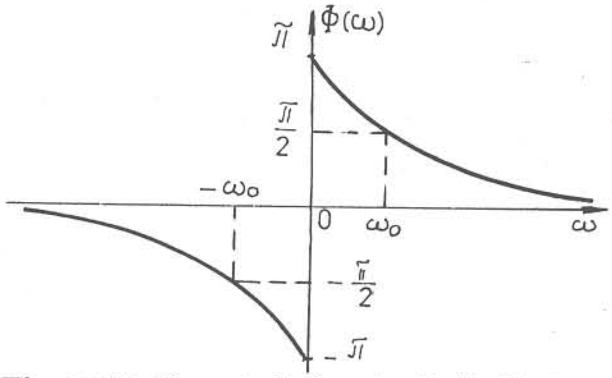


Fig. 7.16 Caracteristica de fază Φ(ω) a unui sistem "trece tot".

În ceea ce priveşte faza răspunsului în frecvenţă, ea este:

$$\Phi(\omega) = \psi - \varphi = \pi - 2\varphi \quad .$$

Atunci când $\omega = 0$, deci $A \equiv 0$, $\varphi = 0$ şi defazajul introdus de circuit este π. Pentru $OA = \omega_0$, triunghiul AOP este isoscel, deci $\varphi = \pi/4$. Rezultă că $\Phi(\omega_0)=\pi-2\pi/4=\pi/2$.

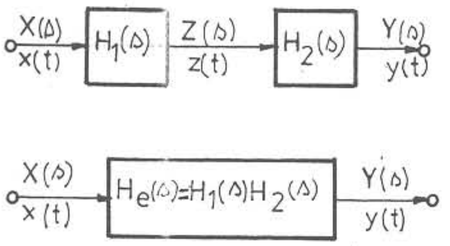
În figura 7.16 este prezentată caracteristica $\Phi(\omega)$ pentru un sistem "trece tot". Dacă aplicăm o sinusoidă unui astfel de sistem, ea nu îşi modifică amplitudinea ci numai faza, conform caracteristicii $\Phi(\omega)$.

<u>**Funcţia sistem echivalentă unor sisteme conectate în serie şi paralel**</u>

Considerăm două sisteme conectate în serie ca în figura 7.17 a. Dacă operaţiile au sens, $h_e(t) = h_1(t) * h_2(t)$. Aplicând transformarea Laplace bilaterală (sau unilaterală, după caz) şi ţinând cont de teorema convoluţiei, rezultă:

$$H_e(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \quad . \qquad (7.78)$$

Sistemul echivalent are drept funcţie de sistem produsul funcţiilor de sistem ale sistemelor conectate în serie.



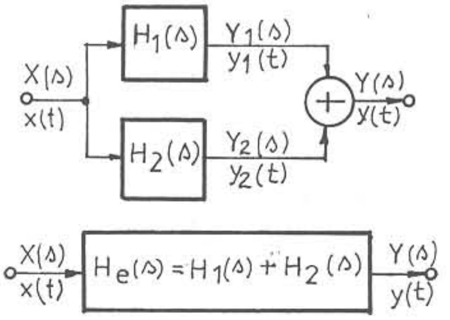


Fig. 7.17a Două sisteme conectate în serie şi sistemul echivalent.

Fig. 7.17b Două sisteme conectate în paralel şi sistemul echivalent.

Pentru cazul sistemelor conectate în paralel - figura 7.17 b - este uşor de dedus relaţia:

$$H_e(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad . \tag{7.79}$$

Sistemul echivalent are drept funcţie de transfer suma funcţiilor de transfer ale sistemelor conectate în paralel.

Tabelul 7.1 Proprietățile transformării Laplace

Semnalul	Transformarea bilaterală		Transformarea unilaterală
	Transformata	Domeniul de convergență	
$x(t)$	$X(s)$	DC^x	$X_u(s)$
$y(t)$	$Y(s)$	DC^y	$Y_u(s)$
$ax(t)+by(t)$	$aX(s)+bY(s)$	$DC^x \cap DC^y$ *cel putin*	$aX_u(s)+bY_u(s)$
$x(t-t_o)\,,\,t_o \in \mathbb{R}$	$e^{-st_o}X(s)$	DC^x	—
$x(t-t_o)\,,\,t_o>0$	$e^{-st_o}X(s)$	DC^x	$e^{-st_o}X_u(s)$
$e^{s_o t}x(t)$	$X(s-s_o)$	DC^x *deplasat*	$X_u(s-s_o)$
$x(at), a\in\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{s}{a})$	DC^x *scalat*	—
$x(at), a>0$	$\frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$	DC^x *scalat*	$\frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$
$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	$DC^x \cap DC^y$ *cel putin*	$X_u(s)Y_u(s)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	DC^x *cel putin*	$sX_u(s)-x(0^+)$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	DC^x	$\frac{d}{ds}X_u(s)$
$(-t)^n x(t)$	$\frac{d^n}{ds^n}X(s)$	DC^x	$\frac{d^n}{ds^n}X_u(s)$
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)Y(s-u)du$	$\Gamma \subset DC^x \cap DC^y$ *cel putin*	$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)Y(s-u)du$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$DC^x \cap \{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$ *cel putin*	—
$\int_{0}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$DC^x \cap \{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$ *cel putin*	$\frac{X_u(s)+x^{(-1)}(0)}{s}$ $x^{-1}(s)$-valoarea inițială a integralei
$x(t)=x(t)\sigma(t)$	$x(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$		$x(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} sX_u(s)$
$x(t)=x(t)\sigma(t)$	$x(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sX(s)$		$x(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sX_u(s)$

Tabelul 7.2 Perechi semnal-transformată Laplace

Pentru semnalele cauzale X(s) = $X_u(s)$ iar pentru cele necauzale există numai X(s).

Semnalul	Transformata	Domeniul de convergență
$\delta(t)$	1 (*constanta*)	$\forall s$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
* $-\sigma(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} > 0$
* $-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} < 0$
$e^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
* $-e^{-at}\sigma(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -a$
* $-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\sigma(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} < -a$
$\delta(t-t_o)$; $t_o>0$	e^{-st_o}	$\forall s$
$(\cos\omega_o t)\sigma(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > 0$
$(\sin\omega_o t)\sigma(t)$	$\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > 0$
$(e^{-at}\cos\omega_o t)\sigma(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > -a$
$(e^{-at}\sin\omega_o t)\sigma(t)$	$\frac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > -a$
$J_0(at)\sigma(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$Re\{s\} > -\|a\|$