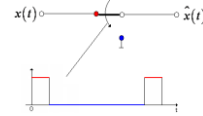


Esantionarea semnalelor

http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap9_1.pdf

http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap9_2.pdf

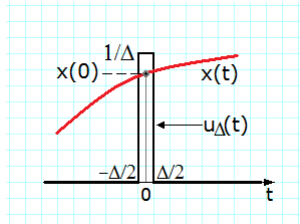
- Discretizarea variației în timp a semnalului, numită esantionare.
- Semnale de bandă limitată.
- Problema reconstruirii semnalelor analogice din semnalul esantionat.
- Teorema esantionării: esantionarea ideală



Trecerea din timp continuu în timp discret se face prin eşantionare ideală. Eşantionarea naturală se poate realiza cu ajutorul unui comutator comandat cu impulsuri de eşantionare. Când impulsul de comandă are valoare mare comutatorul este închis şi semnalul de ieşire (numit semnal eşantionat) este egal cu semnalul de intrare (ieşirea urmăreşte intrarea). Când impulsul de comandă are valoarea 0, comutatorul este în cealaltă stare, ieşirea este conectată la masă şi valoarea ieşirii este 0. Eşantionarea ideală este descrisă prin teorema eşantionării.

Teorema esantionarii

$$u_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \left[\sigma\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right]$$



Un esantion al lui $x(t)$ este obtinut prin produsul semnalului analogic $x(t)$ cu un impuls foarte scurt dreptunghiular $u_{\Delta}(t)$ de arie 1:

$$x(t)u_{\Delta}(t) \cong x(0)u_{\Delta}(t)$$

Un alt esantion poate fi obtinut daca se plaseaza impulsul la momentul de timp kT_s .

$$x(t)u_{\Delta}(t - kT_s) \cong x(kT_s)u_{\Delta}(t - kT_s)$$

2

Din punct de vedere matematic, impulsul din cazul eşantionării naturale este descris ca în ecuația de sus. Eşantionarea naturală este descrisă matematic prin înmulțirea acestui impuls cu semnalul de eşantionat $x(t)$, așa după cum se arată în figură. În cazul în care Δ are o valoare suficient de mică, rezultatul înmulțirii se poate aproxima cu $x(0)$ pe intervalul $(-\Delta/2, \Delta/2)$. Impulsurile de comandă se repetă cu perioada T_s . Eşantionul centrat pe kT_s poate fi exprimat ca și produsul dintre $x(kT_s)$ și cel de al k -lea impuls de comandă. De aceea rezultatul eşantionării naturale se poate aproxima prin suma produselor dintre $x(kT_s)$ și impulsul întârziat cu kT_s .

Procedura de esantionare: esantionam semnalul cu un tren de impulsuri foarte scurte

$$x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{\Delta}(t-kT_s) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) u_{\Delta}(t-kT_s)$$

Pentru valori mici ale lui Δ :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t) = \delta(t) \quad \text{Distributia Dirac}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{\Delta}(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s) x(kT_s) = \delta_{T_s}(t)$$

Distributia Dirac periodica

Esantionarea ideala a semnalului $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t-kT_s)$$

3

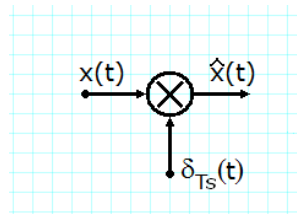
Dar limita când Δ tinde la zero din impuls este egală cu impulsul unitar $\delta(t)$. Dacă se eşantionează folosind impulsul unitar se obţine eşantionarea ideală. În consecinţă eşantionarea ideală a semnalului $x(t)$ se obţine înmulţind acest semnal cu distribuţia Dirac periodică de perioadă T_s .

Esantionarea ideala

Modelul matematic

$$x(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

Modelul esantionarii ideale



Modelul matematic al eşantionării ideale este prezentat în ecuația de sus iar sistemul de eşantionare ideală are schema din figura.

Spectrul semnalului esantionat ideal

Semnalul esantionat ideal:

$$x(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

Spectrul semnalului esantionat ideal:

$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t) \delta_{T_s}(t)\}$$

5

spectrul semnalului eşantionat ideal este dat de transformarea Fourier

Aplicand teorema produsului :

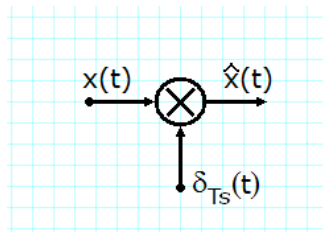
$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}\left\{x(t)\delta_{T_s}(t)\right\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

Spectrul semnalului esantionat apare prin insumarea unor lobi spectrali indexati dupa k

6

În continuare calculăm spectrul semnalului eşantionat ideal. Acesta se determină calculând transformata Fourier a produsului dintre semnalul de eşantionat $x(t)$ şi distribuţia Dirac periodică de perioadă T_e . Dar în conformitate cu tabelul de proprietăţi ale transformării Fourier, transformata Fourier a unui produs este egală cu convoluţia transformatelor Fourier ale celor doi factori înmulţită cu $1/2\pi$. Spectrul semnalului de eşantionat este $X(\omega)$ iar spectrul distribuţiei Dirac periodice de perioadă T_s este în conformitate cu tabelul de perechi semnal transformată Fourier egal cu produsul dintre pulsaţia de eşantionare ω_e şi distribuţia Dirac periodică de perioadă ω_s . Ținând seama de liniaritatea operaţiei de convoluţie şi de proprietatea de convoluţie cu distribuţia Dirac deplasată se obţine rezultatul din ultima egalitate. Cu alte cuvinte spectrul semnalului eşantionat ideal se obţine ca şi prelungirea prin periodicitate cu perioada ω_s a spectrului semnalului de eşantionat. Cuvântul cheie din ultima afirmaţie este prelungire prin periodicitate.



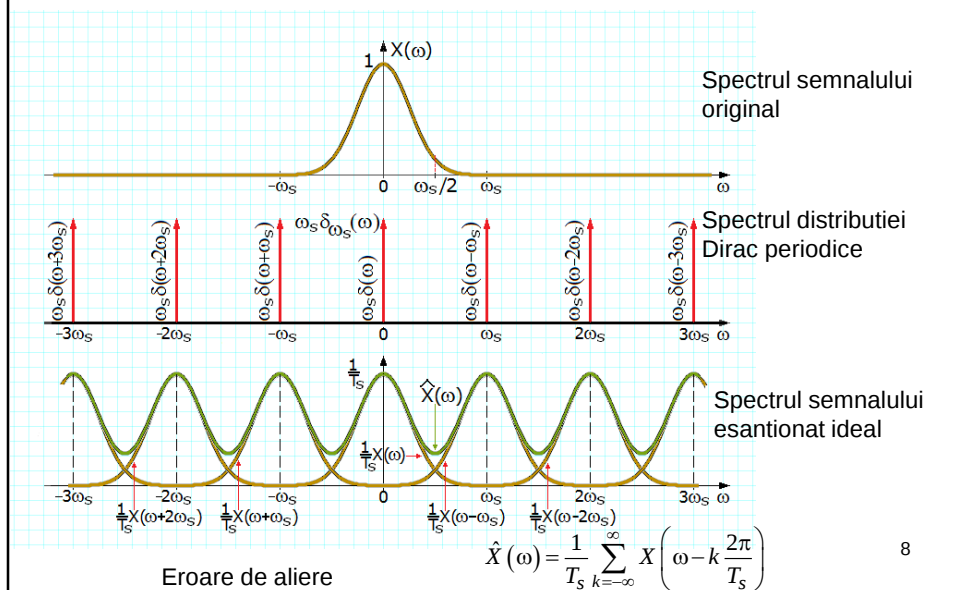
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

Spectrul semnalului esantionat ideal este repetitia periodica a spectrului semnalului original. Perioada este invers proportionala cu pasul de esantionare T_s .

Din spectrul semnalului esantionat ideal nu se mai poate recupera spectrul semnalului original, deoarece apare o "amestecare" spectrala (aliere).

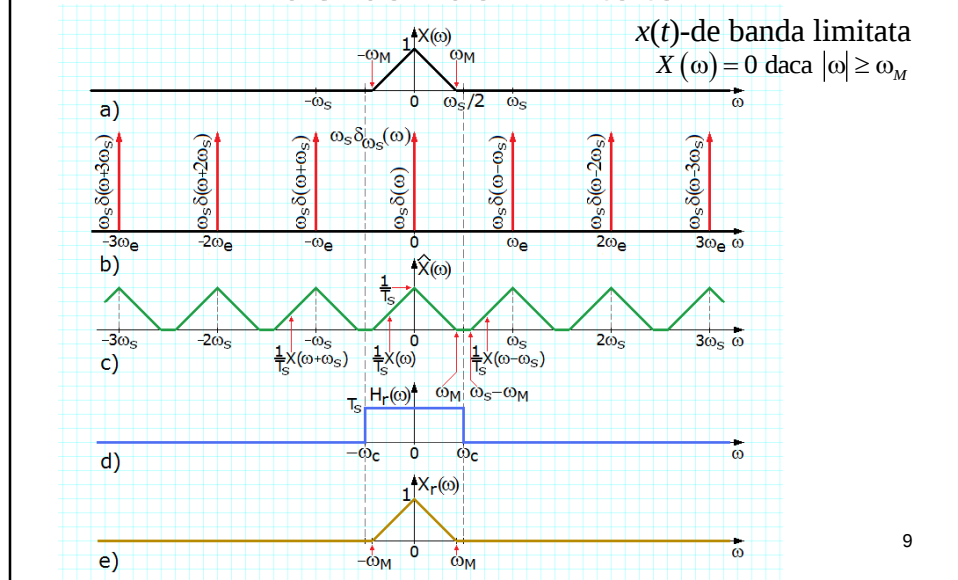
Semnalul original trebuie sa fie de banda limitata pentru ca aceste erori sa nu apara.



În figura sunt reprezentate de sus în jos,
spectrul semnalului de eşantionat,
spectrul distribuției Dirac periodice de perioadă T_s și
rezultatul convoluției lor, spectrul semnalului eşantionat ideal.

Se observă că spectre succesive ale semnalului de eşantionat se suprapun parțial în cadrul spectrului semnalului eşantionat. Această suprapunere parțială conduce la așa numita eroare de aliere.

Teorema esantionarii semnalelor de banda limitata



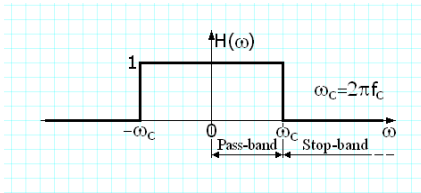
9

Dacă semnalul de eşantionat este de bandă limitată, spectrul său fiind identic nul la frecvențe superioare în modul lui ω_M și dacă se folosește o frecvență de eşantionare mai mare decât $2\omega_M$, atunci suprapunerea spectrelor consecutive în cadrul spectrului semnalului eşantionat nu mai are loc, așa după cum se vede în figură. Și în această figură sunt reprezentate spectrul semnalului de eşantionat (a) dar de această dată avem de-a face cu un semnal de bandă limitată ω_M , spectrul distribuției distribuției Dirac de perioadă T_s (b) dar de această dată se folosește un pas de eşantionare T_s care corespunde la o frecvență de eşantionare $\omega_s > 2\omega_M$. În figura c) se prezintă spectrul semnalului eşantionat și se constată că în acest caz nu mai apar suprapunerile care conduceau la eroarea de aliere. Dacă nu apare eroarea de aliere atunci spectrul semnalului de eşantionat poate fi reconstruit din spectrul semnalului eşantionat ideal folosind un filtru trece jos ideal, având răspunsul în frecvență reprezentat cu albastru în graficul d). Se observă că răspunsul în frecvență al filtrului de reconstrucție este o poartă frecvențială care se deschide la $-\omega_c$ și se închide la ω_c , înmulțită cu T_s . ω_c se numește frecvență de tăiere a filtrului trece-jos. Aceasta trebuie aleasă mai mare decât ω_M . Spectrul semnalului reconstruit este reprezentat în ultimul grafic e).

- Lobii spectrali successivi nu se suprapun si spectrul semnalului original poate fi recuperat prin FTJ din spectrul semnalului esantionat daca

$$\omega_s \geq 2\omega_M$$

FTJ ideal



$$H(\omega) = p_{\omega_c}(\omega) \leftrightarrow h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

Utilizam un filtru trece jos cu frecventa de taiere ω_c si amplificarea in banda T_s

Eroarea de aliare poate fi evitata.

$$\omega_s \geq 2\omega_M$$

Frecventa de esantionare

$$\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M$$

Frecventa de taiere pentru FTJ

Conditia de reconstructie perfecta: $|H_r(0)| = T_s$

Răspunsul în frecvență al filtrului de reconstrucție este:

$$|H_r(\omega)| = T_s p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad \omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M$$

Semnalul reconstruit este :

$$x_r(t) = \hat{x}(t) * h_r(t)$$

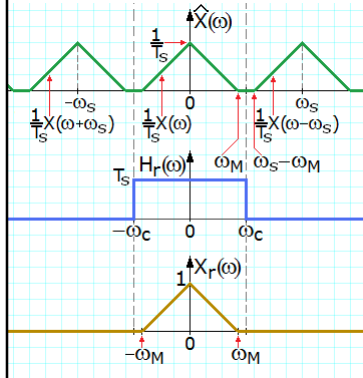
cu spectrul:

$$\begin{aligned} X_r(\omega) &= \hat{X}(\omega) \cdot H_r(\omega) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) T_s p_{\omega_c}(\omega) = X(\omega) \end{aligned}$$

Spectrele egale implica egalitatea aproape peste tot a semnalului reconstruit cu semnalul initial

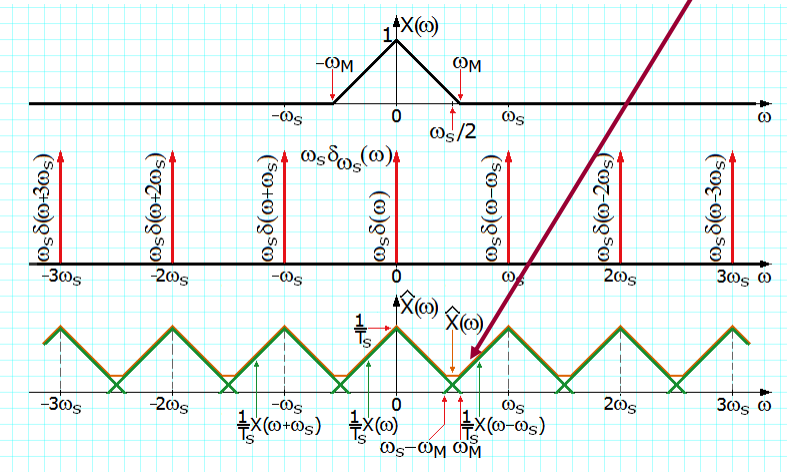
$$x_r(t) = x(t), \quad a.e.w.$$

12



Răspunsul în frecvență al filtrului de reconstrucție este exprimat în prima ecuație. Expresia semnalului reconstruit este dată de convoluția dintre semnalul eșantionat ideal și răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție (care se obține calculând transformata Fourier inversă a răspunsului în frecvență), așa cum se vede în cea de a doua ecuație. În consecință spectrul semnalului reconstruit se obține înmulțind spectrul semnalului eșantionat ideal cu răspunsul în frecvență al filtrului de reconstrucție (a treia ecuație). Așa cum se vede în figură, rezultatul acestei înmulțiri este tocmai spectrul semnalului de eșantionat. Revenind în domeniul timp rezultă că semnalul reconstruit este egal cu semnalul de eșantionat aproape peste tot (a.p.t).

Daca nu se respecta conditia de esantionare $\omega_s \geq 2\omega_M$, apar erorile de aliere.

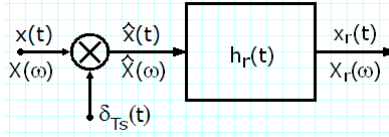


$$\omega_s - \omega_M < \omega_M$$

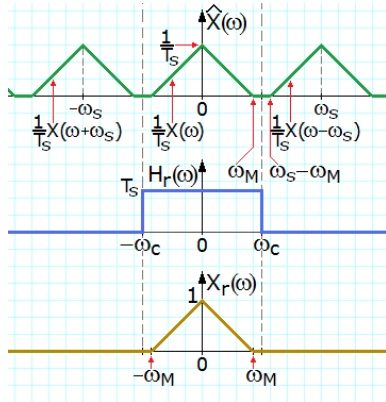
13

În cazul în care se eșantionează cu o frecvență de eșantionare mai mică decât ω_M alierea apare din nou și spectrul semnalului de eșantionat nu mai poate fi reconstrui din spectrul semnalului eșantionat ideal prin filtrare trece-jos ideală. Eroarea de aliere este dată de diferența dintre spectrul semnalului de eșantionat și spectrul semnalului reconstruit prin filtrarea trece jos ideală a semnalului eșantionat ideal.

Reconstructie



$$H_r(\omega) = T_s p_{\omega_c}(\omega) \leftrightarrow h_r(t) = T_s \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$



$$\begin{aligned} x_r(t) &= h_r(t) * \hat{x}(t) \\ &= T_s \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) T_s \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} * \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) T_s \frac{\sin \omega_c (t - kT_s)}{\pi (t - kT_s)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_c}{\omega_s} x(kT_s) \frac{\sin \omega_c (t - kT_s)}{\omega_c (t - kT_s)} \end{aligned}$$

14

Calculăm semnalul reconstruit prin filtrarea trece jos ideală a semnalului eșantionat ideal. Răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție se determină din tabelul de perechi semnal transformată Fourier. Semnalul reconstruit este dat de convoluția dintre semnalul eșantionat ideal și răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție. Ținând seama de liniaritatea operației de convoluție și de proprietățile convoluției cu distribuția Dirac și cu distribuția Dirac întârziată se obține suma de eșantioane ponderate din ultima ecuație. Am arătat deja că dacă semnalul de eșantionat este de bandă limitată la ω_M și că dacă folosim o frecvență de eșantionare mai mare decât $2\omega_M$ atunci semnalul de eșantionat poate fi reconstruit perfect din semnalul eșantionat ideal. În consecință valoarea minimă a frecvenței de eșantionare care asigură reconstrucția perfectă este $2\omega_M$ și se numește frecvență de eșantionare Nyquist.

Frecvența de esantionare minimă este $\omega_s = 2\omega_M$ și poartă denumirea de frecvență de esantionare Nyquist. În cazul esantionării la frecvența Nyquist formula de reconstrucție devine:

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \omega_M(t - kT_s)}{\omega_M(t - kT_s)}$$

În cazul eșantionării la frecvența Nyquist și al alegerii unei frecvențe de tăiere a filtrului de reconstrucție de valoare ω_M expresia semnalului reconstruit se simplifică devenind cea din ultima ecuație.

Teorema WKS (Whittaker, Kotelnikov, Shannon)

Daca semnalul $x(t)$ este de banda limitata la ω_M , in sensul ca $X(\omega) \equiv 0$ pentru $|\omega| > \omega_M$, atunci $x(t)$ este unic determinat de multimea esantioanelor sale $\{x(nT_s) | n \in \mathbb{Z}\}$, daca $\omega_s \geq 2\omega_M$, adica **frecventa de esantionare este cel putin dublul frecventei maxime**. In conditiile de mai sus semnalul initial $x(t)$ se poate reconstitui din esantioanele sale, a.p.t prin relatia:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{2\omega_c}{\omega_s} \frac{\sin \omega_c(t - kT_s)}{\omega_c(t - kT_s)}$$

cu conditia ca ω_c sa fie astfel ales incat sa satisfaca relatia : $\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M$.

Frecventa Nyquist: $\omega_s = 2\omega_M$

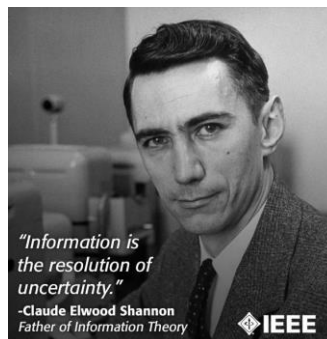
Acesta este enunțul teoremei de eșantionare a semnalelor analogice. Teorema a fost deja demonstrată în slide-urile anterioare.



Edmund Taylor Whittaker



Vladimir Kotelnikov



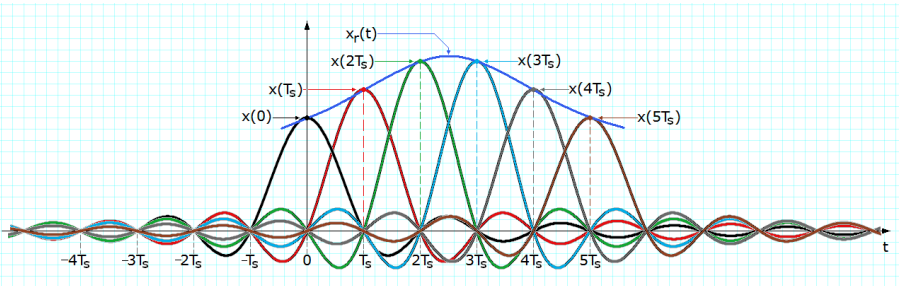
Claude Shannon

[Wikipedia, IEEE](#)

Aceștia sunt cercetătorii care au contribuit la enunțarea acestei teoreme.

Claude Shannon este părintele teoriei informației care stă la baza telecomunicațiilor moderne. Din acest motiv site-ul departamentului nostru de Comunicații îi poartă numele.

Reconstructia prin filtrare trece-jos ideala



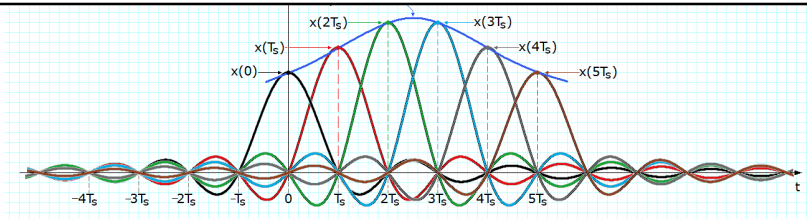
Semnalul se poate reconstrui din curbe de tipul $\sin x / x$.

- Intr-un punct de esantionare, kT_s , suma se reduce la $x(kT_s)$.
- Intre punctele de esantionare, reconstructia se obtine prin aportul tuturor termenilor sumei
- Operatia de reconstructie se mai numeste si interpolare.

18

În enunțul teoremei eșantionării apare formula de reconstrucție prin filtrare trece-jos ideală din prima ecuație. În figură este prezentată reconstrucția semnalului de eșantionat care corespunde la 6 termeni consecutivi ai formulei de reconstrucție corespunzători valorilor 0, 1, ..., 5 ale lui k . În figură sunt reprezentate cu culori diferite eșantioanele $x(0)$, $x(T_s)$... precum și termenii corespunzători din suma de reconstrucție.

La momentul de timp 0 valoarea sumei la momentul 0 este egală cu $x(0)$, restul având treceri prin zero; la momentul de timp T_s , valoarea sumei este egală cu $x(T_s)$ și așa mai departe.



- În punctele de esantionare, un singur esantion definește semnalul

$$x(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \omega_M T_s (n-k)}{\omega_M T_s (n-k)}$$

$$\omega_M = \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow x(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \pi (n-k)}{\pi (n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta_{n,k} = x(nT_s)$$

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = k \\ 0, & \text{pentru } n \neq k \end{cases}$$

- Esantionare cu frecvența Nyquist
- Între punctele de esantionare, reconstrucția se obține prin aportul tuturor termenilor sumei

19

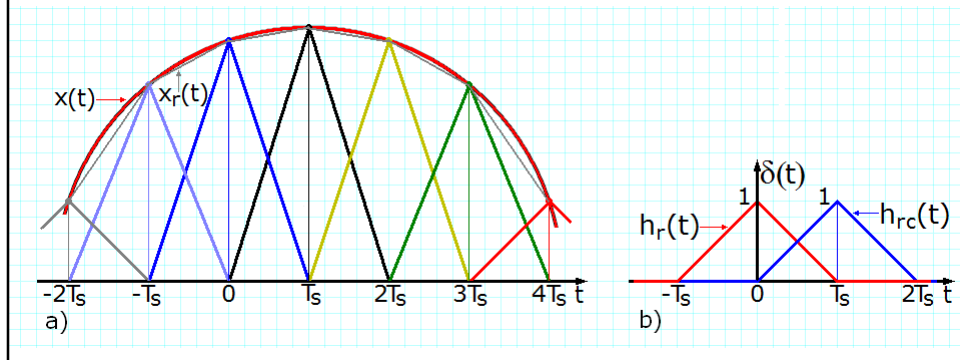
Considerând cazul eşantionării la frecvența Nyquist, frecvența de tăiere va fi egală cu frecvența maximă din spectrul semnalului de eşantionat și formula de reconstrucție se va simplifica.

Înlocuim în această formă simplificată t cu nT_s ;

Sinusul cardinal care reprezintă cel de al doilea factor al produsului din termenul generic al sumei este egal cu simbolul lui Kronecker care ia valoarea 1 pentru $n=k$ și valoarea 0 în rest. În consecință suma are un singur termen nenul, cel corespunzător lui $k=n$. Deci relația de reconstrucție din prima ecuație se verifică.

Reconstrucție prin interpolare liniară

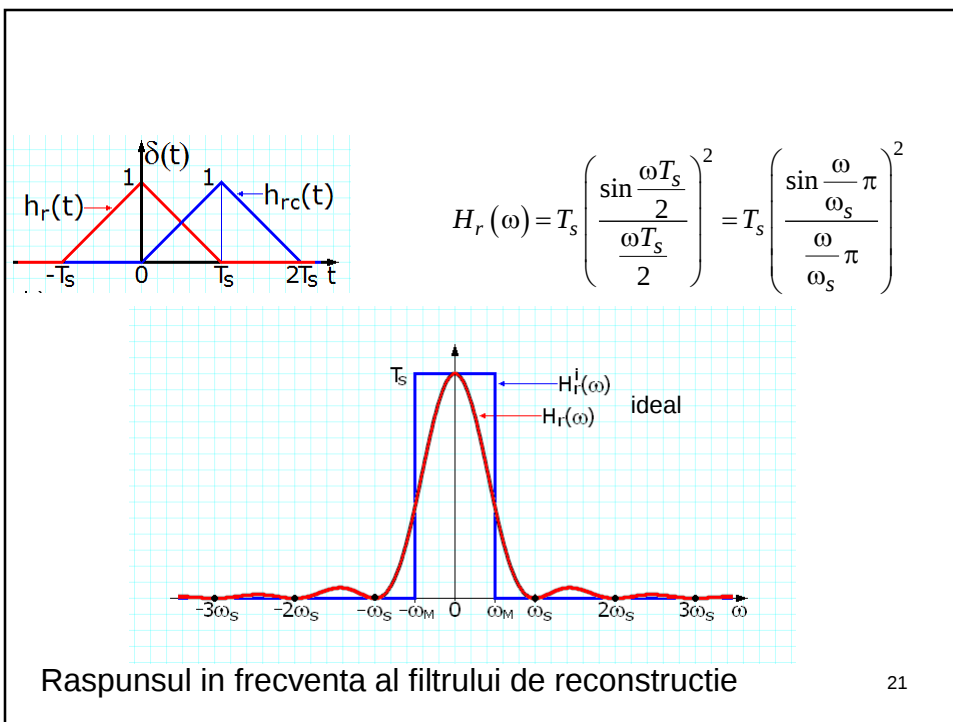
- Este posibilă și o reconstrucție aproximativă a semnalului, prin unirea punctelor determinate de valorile eșantioanelor cu linii drepte. Semnalul reconstruit $x_r(t)$ este doar aproximativ egal cu $x(t)$
- Răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție: triunghiular.



Interpolarea este un procedeu de completare a valorilor care lipsesc dintr-un semnal. Pornind de la semnalul eșantionat ideal ale cărui eșantioane au intensități egale cu valorile semnalului de eșantionat la momente multipli ai pasului de eșantionare T_s , este necesar să completăm valorile lipsă de la momente numere reale cuprinse între multiplii întregi de T_s . Interpolarea presupune să unim valorile eșantioanelor cu segmente de curbă. Dacă aceste curbe sunt drepte vorbim despre interpolare liniară sau de ordinul I.

Un exemplu de interpolare liniară este prezentat în figura din stânga. Rezultatul interpolării liniare este reprezentat cu gri iar semnalul de eșantionat este reprezentat cu roșu. Operația de interpolare liniară revine la convoluția dintre semnalul eșantionat ideal și răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție din dreapta. Rezultatul convoluției eșantioanelor cu răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție este reprezentat prin semnale triunghiulare (stanga) centrate pe 0, T_s , $2T_s$, ...

Prin adunarea acestor semnale se obține semnalul interpolat.

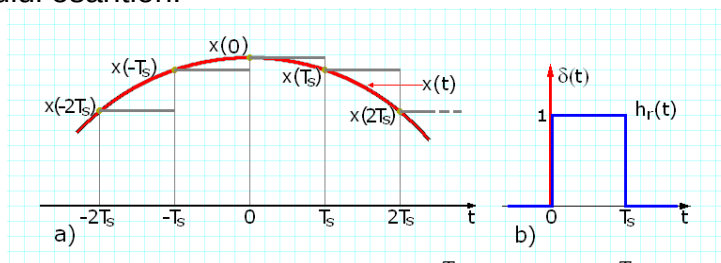


Răspunsul în frecvență al filtrului de reconstrucție are expresia din ecuație.

În figura se compară răspunsurile în frecvență ale filtrului trece jos ideal (reprezentat cu roșu) și ale filtrului de reconstrucție din cazul interpolatorului de ordinul I (reprezentat cu albastru). Diferența dintre aceste răspunsuri în frecvență justifică erorile de reconstrucție observate.

Reconstrucția prin extrapolare de ordinul zero

- Este posibilă reconstruirea prin extrapolare de ordin zero: valoarea esanționului curent se menține până la apariția noului esanțion.



$$h_r(t) = p_{\frac{T_s}{2}}\left(t - \frac{T_s}{2}\right) \longleftrightarrow e^{-j\omega\frac{T_s}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega T_s}{2}}{\omega} = e^{-j\omega\frac{T_s}{2}} \frac{\sin \frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}}$$

$$H_r(\omega) = e^{-j\omega\frac{T_s}{2}} \frac{\sin \frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}} = e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_s}} \frac{\sin \pi \frac{\omega}{\omega_s}}{\pi \frac{\omega}{\omega_s}}$$

22

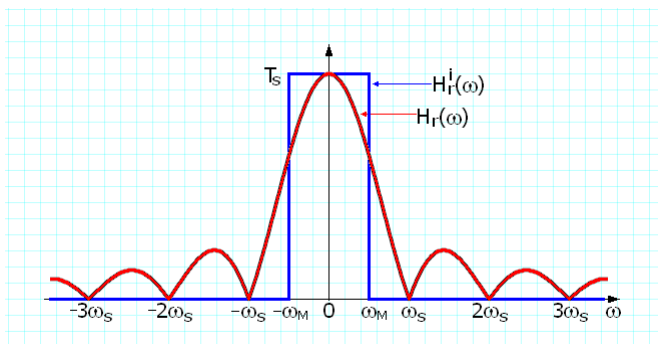
Operația de extrapolare este o operație de predicție. În cazul extrapolării de ordinul zero precizăm că valorile din intervalul $(kTs, (k+1)Ts)$ vor fi egale cu $x(kTs)$.

Reconstrucția semnalului de eșantionat din eșantioanele sale obținute în urma eșantionării sale ideale se face calculând convoluția dintre semnalul eșantionat ideal și răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție.

Un exemplu de reconstrucție prin extrapolare de ordinul 0 este prezentat în stanga. Cu roșu este reprezentat semnalul de eșantionat iar cu gri rezultatul reconstrucției prin extrapolare de ordinul zero. Se constată că pe intervalul $(0, Ts)$ rezultatul reconstrucției are valoarea $x(0)$, că pe intervalul $(Ts, 2Ts)$ rezultatul reconstrucției are valoarea $x(Ts)$ ș.a.m.d.

Expresia răspunsului la impuls al extrapolatorului de ordinul 0 este prezentat în ecuația de sus. Răspunsul său în frecvență este prezentat în ultima ecuație.

- Diferența dintre filtre (cel de reconstrucție și ideal) este semnificativă $\Rightarrow$ erori de reconstrucție mari



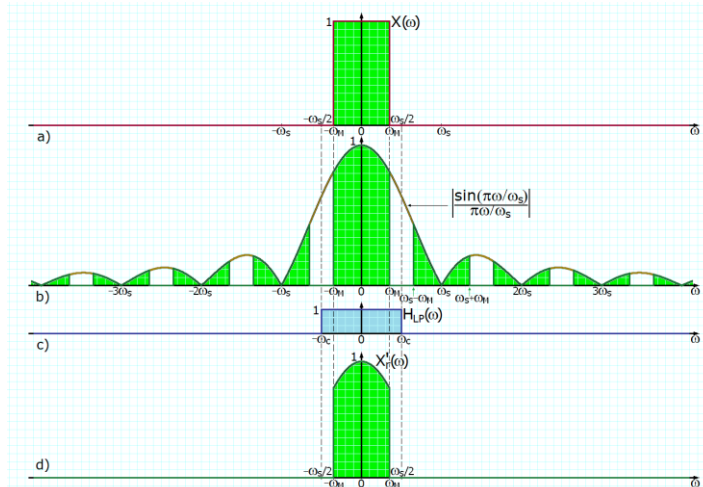
Modulul răspunsului în frecvență al filtrului de reconstrucție.

23

Modulul său este comparat cu modulul răspunsului în frecvență al filtrului trece-jos ideal în figura de jos. Modulul răspunsului în frecvență al filtrului trece jos ideal este reprezentat cu roșu iar modulul răspunsului în frecvență al filtrului de reconstrucție corespunzător extrapolatorului de ordinul zero este reprezentat cu albastru. Extrapolarea de ordinul I presupune aproximarea variației semnalului de eșantionat în intervalul $(kT_s, (k+1)T_s)$ cu o dreaptă care ia la momentul kT_s valoarea $x(kT_s)$.

Spectrul semnalului reconstruit:

$$X_r(\omega) = X(\omega)H_r(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_s}} \frac{\sin\pi\frac{\omega}{\omega_s}}{\pi\frac{\omega}{\omega_s}} X(\omega - k\omega_s)$$



24

Se prezinta:

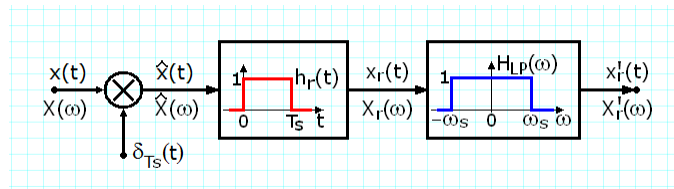
Spectrul semnalului de esantionat

Spectrul semnalului reconstruit prin extrapolare de ordinul zero

Spectrul semnalului reconstruit (dupa filtrare FTJ ideala)

Lobii spectrali sunt puternic deformati. Chiar daca dupa restructia de ordin zero am aplica un filtru suplimentar, trece jos ideal, tot nu s-ar putea recupera semnalul initial

Evident pentru $\omega_s \gg 2 \omega_M$, erorile din lobul central pot fi mult diminuate.



Esantionarea ideala a semnalelor periodice

- Consideram semnale periodice de banda limitata la a N -a armonica. Cea mai mare frecventa din spectrul lor este

$$\omega_M = N\omega_0; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

- Se esantioneaza semnalul cu o frecventa

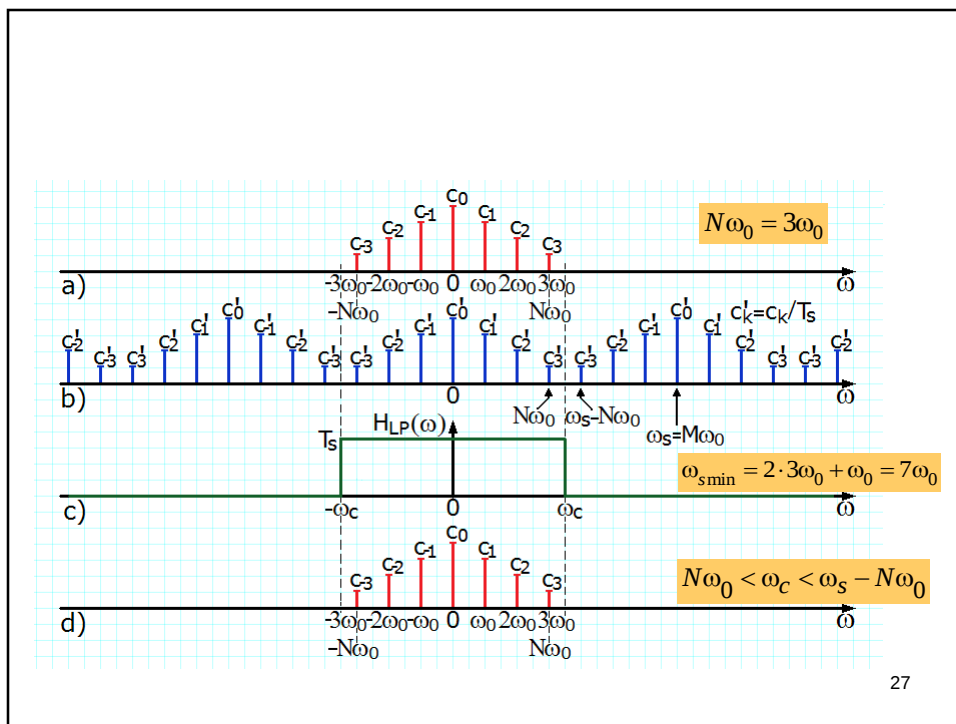
$$\omega_s = M\omega_0, \quad M \in \mathbb{N}$$

- Prin esantionare lobii spectrali se repeta.
- Pentru ca sa nu apara suprapunerea lobilor spectrali :

$$N\omega_0 < \omega_s - N\omega_0 = \omega_0 (M - N)$$

26

Se face o lucrare de laborator cu studiul eşantionării semnalelor periodice. În cazul acestora spectrul semnalului de eşantionat nu mai este o funcţie continuă în frecvenţă, obţinută prin calculul transformatei Fourier, ci o funcţie discretă în frecvenţă obţinută prin dezvoltarea în serie Fourier a semnalului de eşantionat.



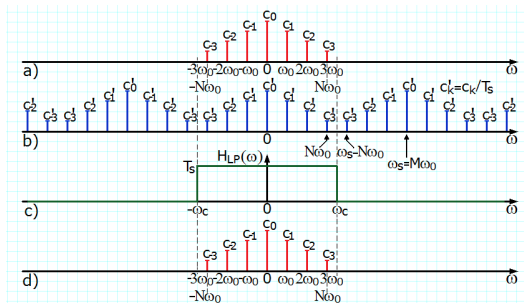
27

Spectrul de amplitudini al unui semnal periodic de eşantionat este dat în figura a). Şi în cazul semnalelor periodice este necesar ca semnalul de eşantionat să fie de bandă limitată, pentru a putea fi făcută reconstrucţia perfectă în urma eşantionării ideale cu ajutorul unui filtru trece jos ideal.

În cazul semnalelor periodice de frecvenţă fundamentală ω_0 , de bandă limitată, frecvenţa maximă din spectru este $\omega_M = N\omega_0$. În exemplu, $N=3$.

Se eşantionează ideal cu o frecvenţă $\omega_s = M\omega_0$; spectrul semnalului eşantionat ideal se obţine prin prelungirea prin periodicitate cu perioada ω_s a spectrului semnalului de eşantionat, graficul b). Pentru eşantionare s-a folosit o frecvenţă care corespunde la $M=7$, iar spectre succesive ale semnalului de eşantionat (lobi centrali) nu se suprapun.

Dacă s-a ales corect frecvenţa de eşantionare atunci semnalul de eşantionat poate fi reconstruit perfect în urma eşantionării sale ideale folosind un filtru trece jos ideal cu răspunsul în frecvenţă din figura c). Aşa după cum se constată din figura d), în urma filtrării trece jos ideale se obţine un semnal cu spectrul de amplitudini identic cu spectrul de amplitudini al semnalului de eşantionat (din figura a)).



$$N\omega_0 < \omega_s - N\omega_0 = \omega_0 (M - N)$$

Diferența dintre $\omega_0 (M - N)$ și $N\omega_0$ trebuie să fie de forma:

$$\omega_0 (M - N) - N\omega_0 = R\omega_0, \quad R = 1, 2, \dots$$

$$\omega_s = M\omega_0 = (2N + R)\omega_0 = 2\omega_M + R\omega_0, \quad R = 1, 2, \dots$$

Frecvența minimă de eșantionare

$$\omega_{s\min} = (2N + 1)\omega_0 = 2\omega_M + \omega_0$$

28

Condiția de nesuprapunere este exprimată matematic în prima inegalitate.

Deoarece atât $\omega_0(M-N)$ cât și $N\omega_0$ sunt multipli de ω_0 rezultă că și diferența lor trebuie să fie multiplu de ω_0 . În consecință se obține ecuația în care apare R număr natural. Din această ecuație rezultă că M trebuie să fie de forma $2N+R$.

Cea mai mică valoare a lui M este $2N+1$. Deci în cazul eșantionării ideale a semnalelor periodice de bandă limitată ω_M , cea mai mică valoare a frecvenței de eșantionare care permite reconstrucția perfectă a semnalului de eșantionat prin filtrare trece jos ideală (frecvența Nyquist) este $2\omega_M + \omega_0$ (mai mare decât frecvența Nyquist din cazul eșantionării ideale a semnalelor neperiodice, $2\omega_M$). În cazul în care pentru eșantionarea ideală a semnalelor periodice se folosește o frecvență de eșantionare de $2\omega_M$ sau mai mică apare eroarea de aliere. Pentru ca să nu apară eroarea de aliere e necesar să se folosească o frecvență de eșantionare de forma celei din ultima ecuație.

În exemplul considerat, $N = 3$ și s-a ales $R = 1$. S-a obținut $M = 7$.

Reconstrucție prin filtrare trece jos ideală

$$H_r(\omega) = T_s p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c; \\ 0, & |\omega| > \omega_c; \end{cases}$$

$$N\omega_0 < \omega_c < \omega_s - N\omega_0$$

Pentru a evita apariția erorilor de aliere este necesar ca:

$$\omega_s - N\omega_0 > N\omega_0$$

$$\omega_s > 2N\omega_0 = 2\omega_M$$

spre deosebire de semnalele aperiodice unde $\omega_s \geq 2\omega_M$

Pe perioada celei mai rapide componente spectrale, trebuie să prelevăm mai mult de două eșantioane din spectru.

Dacă eșantionarea menține periodicitatea atunci pe perioada celei mai rapide componente din spectru trebuie să prelevăm 3 eșantioane (cel puțin).

29

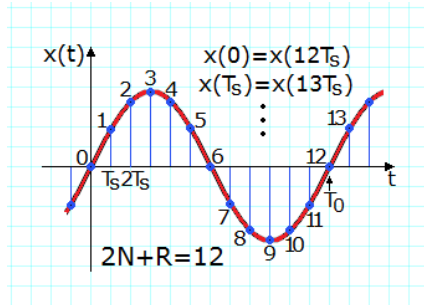
Expresia răspunsului în frecvență al filtrului de reconstrucție este prezentată în prima ecuație. Frecvența sa de tăiere, ω_c , trebuie aleasă ca în cea de a doua inecuație. Frecvența de eșantionare trebuie aleasă de forma $(2N+1)\omega_0$. Cea mai rapidă componentă spectrală din spectrul semnalului de eșantionat are perioada $2\pi/N\omega_0$. Pasul de eșantionare minim este de $T_s = 2\pi/\omega_s = 2\pi/[(2N+1)\omega_0]$. Numărul de eșantioane prelevat pe perioada celei mai rapide componente spectrale este deci egal cu $(2\pi/N\omega_0)/\{2\pi/[(2N+1)\omega_0]\} = 2N+1/N$. Pentru $N=1$ acest număr este 3. Pentru $N=2$ partea întreagă a acestui număr este tot 3, etc. Deci pentru o reconstrucție perfectă prin filtrare trece jos în urma unei eșantionări ideale este necesar să prelevăm mai mult de două eșantioane pe perioada celei mai rapide componente spectrale. În cazul lucrării de laborator se eșantionează un semnal armonic ($N=1$). Pot fi prelevate, 2, 4, 8 sau 16 eșantioane pe perioada semnalului armonic. Prin analiză spectrală se constată că în cazul în care se prelevează 2 eșantioane pe perioadă apare eroare de aliere.

T_0 - perioada fundamentalei

Esantionarea se face cu $\omega_s = (2N+R)\omega_0$ atunci:

$$\frac{2\pi}{T_s} = (2N+R) \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T_s = \frac{T_0}{2N+R}; \quad R=1, 2, \dots$$



Doar $2N+R$ esantioane pot fi distincte ca urmare a periodicitatii semnalului supus esantionarii. Toate pot fi prelevate intr-o singura perioada a fundamentalei T_0 .

30

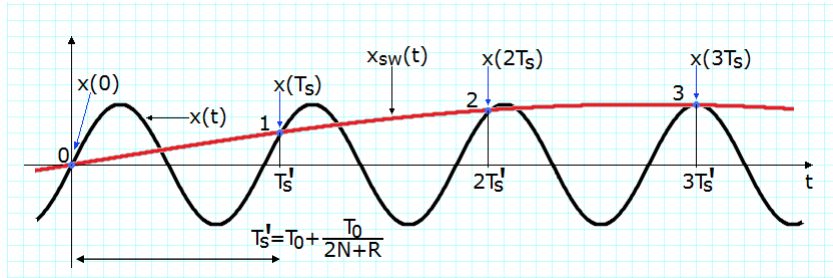
Pentru eşantionarea ideală a unui semnal periodic de bandă limitată pasul de eşantionare T_s trebuie ales ca o fracţiune din perioada semnalului de eşantionat T_0 , $T_s = T_0 / (2N+R)$. Deci se obţin $2N+R$ eşantioane distincte într-o perioadă. Întrucât şi semnalul eşantionat ideal este periodic de perioadă T_0 , în fiecare perioadă se vor obţine aceleaşi valori de eşantioane. Deci în urma eşantionării ideale a unui semnal periodic se obţin $2N+R$ valori de eşantioane distincte. Această proprietate este exemplificată şi în figură. Este vorba despre un semnal sinusoidal (deci $N=1$). S-a ales R de valoare 10. S-au obţinut $2N+R=12$ valori distincte de eşantioane. Acestea au fost prelevate dintr-o singură perioadă a semnalului de eşantionat. Semnalul de eşantionat este reprezentat cu albastru iar semnalul eşantionat ideal cu roşu. Primul eşantion din perioada următoare va avea valoarea $x(13T_s)$. Dar această valoare este egală cu $x(T_s)$, etc.

Principiul osciloscopului

Acelasi rezultat se poate obtine prelevand esantioanele succesive din perioade diferite.

$$x(kT_s) = x(T_0 + kT_s) = x(KT_0 + kT_s)$$

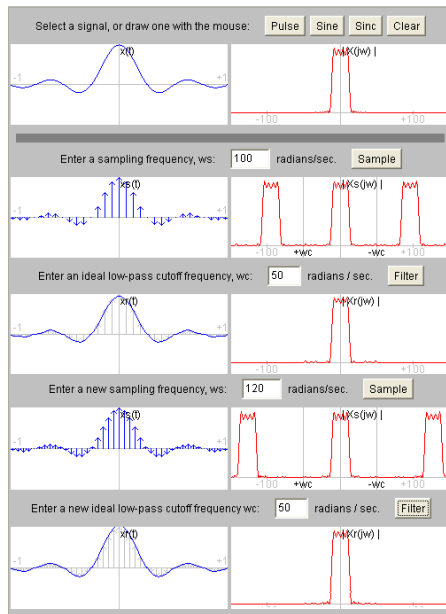
$$T'_s = KT_0 + kT_s = KT_0 + \frac{1}{2N+R}T_0$$



Aceasta posibilitate este valorificata in constructia osciloscopelor cu esantionare.

31

<http://www.jhu.edu/~signals/sampling>



$$\omega_s > 2N\omega_0$$

$$N\omega_0 < \omega_c < \omega_s - N\omega_0$$

$$\omega_s = 100 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\omega_c = 50 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\omega_s = 120 \text{ rad} / \text{s}$$

32

Relatii energetice

Pentru ***semnale aperiodice esantionate***, este valabila relatia de tip Rayleigh

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(kT_s)|^2$$

Pentru ***semnale periodice esantionate***, relatia de tip Parseval

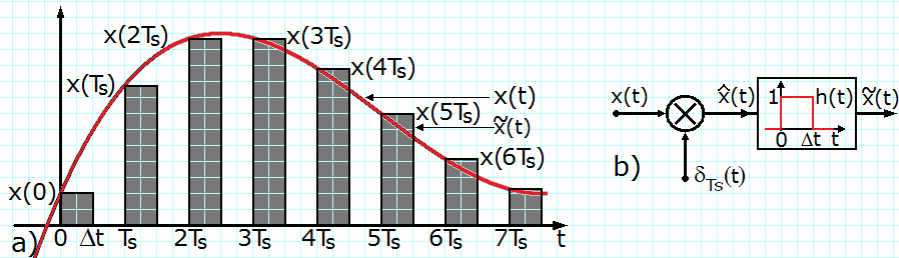
$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |x(kT_s)|^2; \quad M = 2N + R; \quad R = 1, 2, \dots$$

Energia sau puterea pot fi calculate fie din forma de variatie in timp, fie in frecventa.

Esantionarea cu memorare (reținere)

$$\tilde{x}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] * h(t) = \hat{x}(t) * h(t)$$

$$h(t) = p_{\Delta t}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \longleftrightarrow e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{2\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\omega} = e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \Delta t \frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}}$$



a) Semnal esantionat. b) Model matematic al sistemului de modulare a impulsurilor în amplitudine (PAM)

Valoarea esantionului prelevat se pastreaza pentru un interval de timp $\Delta t \leq T_s$

34

În figură este prezentat un exemplu de semnal $x(t)$ (curba rosie) eşantionat cu reținere/memorare (reprezentat cu negru).

În cazul eşantionării cu reținere, la momentele de timp multipli de T_s , kT_s , se obțin valorile $x(kT_s)$, la fel ca în cazul eşantionării ideale, dar aceste valori sunt memorate (reținute) un interval de timp de durată Δt . Forma de undă a semnalului eşantionat cu reținere este asemănătoare cu forma de undă a unui semnal modulată în amplitudine cu purtător tren de impulsuri dreptunghiulare. Acest tip de modulație se numește modulația impulsurilor în amplitudine (Pulse Amplitude Modulation – PAM).

Semnalul eşantionat cu reținere (notat cu $\hat{x}$) se obține prin convoluția semnalului eşantionat ideal cu impulsul de amplitudine unitară care se declanșează la momentul t egal cu 0 și are durată Δt (notat cu $h(t)$), figura b).

Expresia sa analitică este prezentată în prima ecuație. Expresia analitică a răspunsului la impuls $h(t)$ se obține prin întârzierea porții temporale cu $\Delta t/2$. Expresia răspunsului în frecvență se obține aplicând proprietatea de întârziere în timp a transformatei Fourier a porții temporale și este produsul dintre o exponențială complexă și un sinus cardinal.

Spectrul semnalului esantionat cu memorare

$$\tilde{x}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] * h(t) = \hat{x}(t) * h(t)$$

Spectrul semnalului esantionat cu memorare se poate scrie:

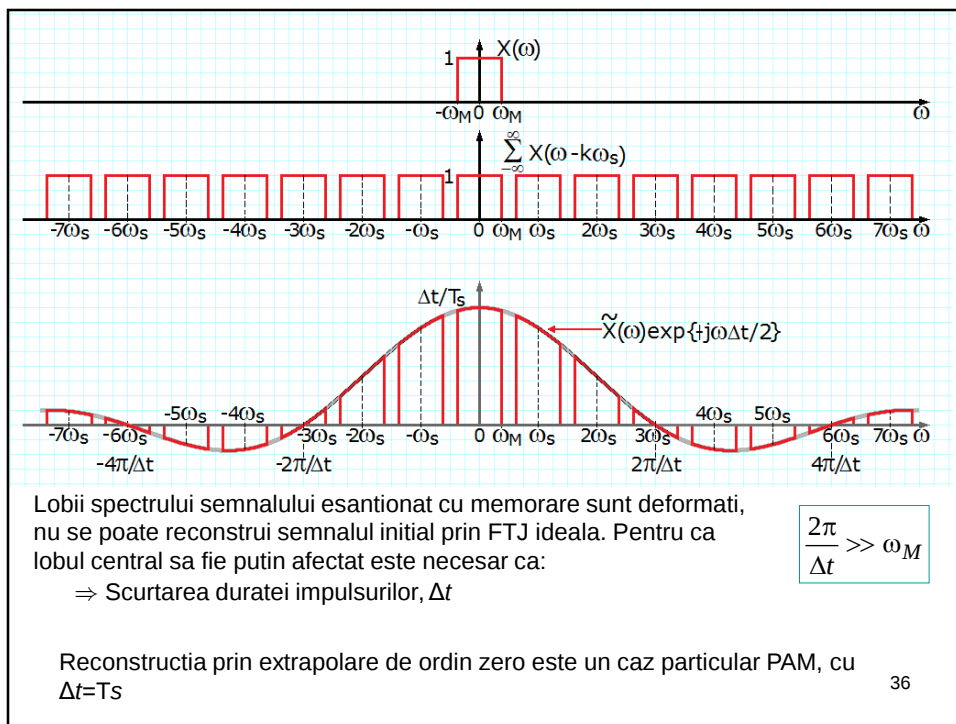
$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \Delta t \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_s)$$

$$\tilde{X}(\omega) e^{j\frac{\omega\Delta t}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_s)$$

35

Spectrul semnalului eşantionat cu memorare (reţinere) se obţine înmulţind spectrul semnalului eşantionat ideal cu răspunsul în frecvenţă al filtrului cu răspunsul la impuls calculat anterior.

Înmulţind în ambii membri ai primei ecuaţii cu exponenţiala complexă se obţine rezultatul din cea de a doua ecuaţie. În membrul drept al ultimei ecuaţii avem o sumă infinită de termeni care reprezintă produse dintre un sinus cardinal ponderat şi variante translatate în frecvenţă ale spectrului semnalului de eşantionat.



În prima figură este prezentat spectrul unui semnal de bandă limitată de eşantionat. În figura 2 este prezentat spectrul semnalului eşantionat ideal. Spectrul s-a obţinut prin prelungirea prin periodicitate cu perioada ω_s a spectrului semnalului din prima figură.

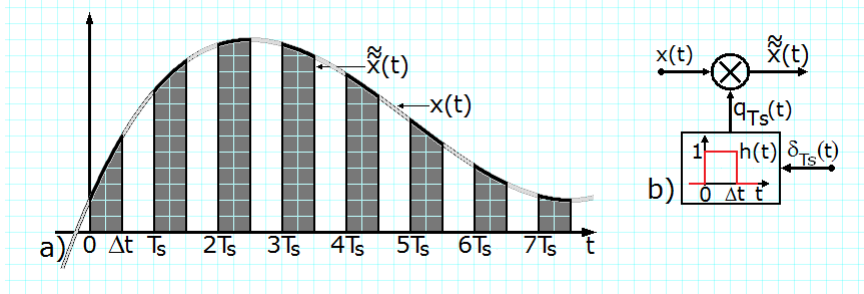
În figura 3 este prezentat spectrul semnalului eşantionat cu reţinere. La fel ca spectrul semnalului eşantionat ideal şi acesta este de bandă nelimitată. Termenii sumei din membrul drept al spectrului semnalului eşantionat cu reţinere se obţin înmulţind spectrul semnalului esantionat ideal cu sinusul cardinal ponderat, reprezentat cu gri în figura 3.

Se observă că şi în cazul spectrului semnalului eşantionat cu reţinere avem spectre de bandă limitată centrate pe multiplii de ω_s , dar că în acest caz aceste spectre au amplitudini diferite şi că apar chiar şi treceri prin 0 acolo unde se anulează sinusul cardinal. Datorită faptului că aceste replici spectrale (lobi) sunt separate în frecvenţă (dacă se respectă condiţiile teoremei WKS (semnalul de eşantionat să fie de bandă limitată ω_M şi frecvenţa de eşantionare să fie mai mare decât $2\omega_M$)) poate fi utilizat pentru reconstrucţie un filtru trece jos ideal şi în cazul eşantionării cu reţinere, separându-se lobul central. Pentru a limita erorile care afectează lobul spectral central ($k=0$ în ultima figură) e necesar ca trecerea prin 0 a sinusului cardinal să se facă la o frecvenţă mai mare decât frecvenţa maximă din spectrul semnalului de eşantionat ω_M . În consecinţă durata impulsurilor Δt trebuie aleasă cu grijă. Datorită sinusului cardinal, lobul central al spectrului semnalului eşantionat cu reţinere nu mai are forma spectrului semnalului de eşantionat, în consecinţă reconstrucţia prin

filtrare trece-jos ideală nu mai este perfectă. În cazul în care pasul de eşantionare T_e este egal cu durata impulsului Δt eşantionarea cu reţinere devine eşantionare cu memorare.

Esantionarea naturala

Esantionare cu “decuparea” unor portiuni din semnal; se aplica in multiplexarea in timp a semnalelor analogice -- time division multiplexing (TDM)



37

Acesta este tipul de eşantionare utilizată în practică. Atunci când comutatorul este închis, semnalul de ieşire este egal cu semnalul de intrare (se zice că semnalul de ieşire urmăreşte semnalul de intrare). Atunci când comutatorul este conectat la masă, semnalul de ieşire are valoarea 0. Semnalul de ieşire poate fi exprimat ca şi un produs dintre semnalul de intrare şi un tren de impulsuri dreptunghiulare de durată Δt , de perioadă T_s şi de amplitudine unitară $qT_s(t)$. Acest tren de impulsuri unitare poate şi obţinut prin convoluţia dintre distribuţia Dirac periodică de perioadă T_s şi impulsul singular $h(t)$ de durată Δt şi amplitudine unitară. Se obţine modelul matematic al eşantionării naturale din figura din dreapta şi expresia semnalului eşantionat cu memorare din prima ecuaţie. Răspunsul în frecvenţă al sistemului cu răspunsul la impuls $h(t)$ este $H(\omega)$ din ultima ecuaţie.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t)q_{T_s}(t) = x(t)\left[h(t)*\delta_{T_s}(t)\right] \\ &= x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)h(t-kT_s)\end{aligned}$$

•Semnalul este înmulțit cu un tren de impulsuri periodice $q_{T_s}(t)$.

$$h(t) = p_{\frac{\Delta t}{2}}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \longleftrightarrow H(\omega) = e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{2\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\omega}$$

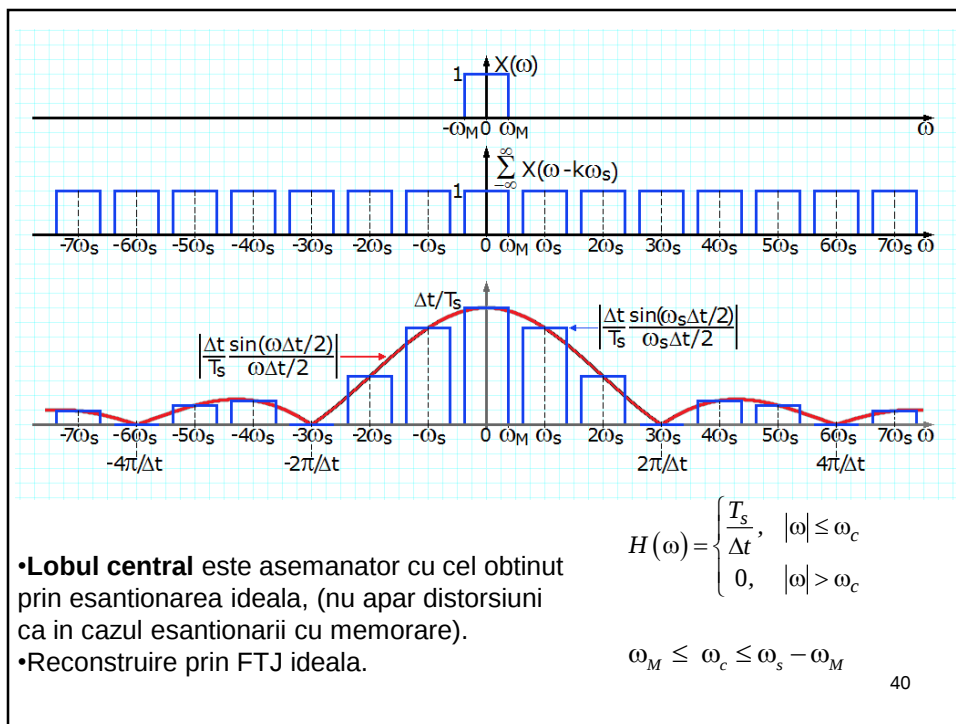
Spectrul semnalului esantionat natural

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}(\omega) &= \mathcal{F}\left\{x(t)\left[h(t)*\delta_{T_s}(t)\right]\right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \left[e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} \cdot \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right] \\
 &= X(\omega) * \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{k\omega_s\Delta t}{2}} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin\frac{k\omega_s\Delta t}{2}}{\frac{k\omega_s\Delta t}{2}} \cdot \delta(\omega - k\omega_s)}_{\text{factor numeric}} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-j\frac{k\omega_s\Delta t}{2}} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin\frac{k\omega_s\Delta t}{2}}{\frac{k\omega_s\Delta t}{2}}}_2 \cdot X(\omega - k\omega_s) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{factor numeric}}
 \end{aligned}$$

39

Spectrul semnalului eşantionat natural e dat de transformata Fourier a produsului dintre semnalul de eşantionat $x(t)$ şi rezultatul convoluţiei dintre răspunsul la impuls $h(t)$ şi distribuţia Dirac periodică de perioadă T_s . Acest spectru este proporţional cu convoluţia dintre spectrul semnalului de eşantionat $X(\omega)$ şi transformata Fourier a convoluţiei (care este produsul dintre $H(\omega)$ şi transformata Fourier a distribuţiei Dirac periodică de perioadă T_s (care este proporţională cu distribuţia Dirac periodică de perioadă ω_s)).

Dar produsul dintre o funcţie continuă şi distribuţia Dirac întârziată este egal cu produsul dintre valoarea funcţiei continue în punctul în care se anulează distribuţia Dirac şi distribuţia Dirac întârziată. De aceea se obţine cea de a treia egalitate. În sfârşit, pe baza distributivităţii convoluţiei în raport cu adunarea se obţine ultima egalitate. Spectrul semnalului eşantionat natural este o sumă ponderată de replici translatate cu multipli de frecvenţa de eşantionare ai spectrului semnalului de eşantionat $X(\omega)$. Ponderile se obţin din eşantionarea unui sinus cardinal cu pasul de eşantionare ω_s .



Dăm un exemplu de eșantionare naturală a semnalului cu spectrul din figura de sus. Este un semnal de bandă limitată la ω_M . În figura 2 este dat modulul spectrului semnalului eșantionat ideal (care se repetă prin periodicitate cu perioada ω_s).

În figura 3 este dat spectrul semnalului eșantionat natural în cazul $\Delta t = T_s/3$, rezulta $\omega_s \Delta t/2 = \pi/3$ și pentru $k =$ multipli de 3, termenii sumei din expresia spectrului semnalului eșantionat cu memorare se anulează.

Funcția pondere a replicilor spectrale, reprezentată cu roșu trece prin 0 la $k=3,6,\dots$ Pentru celelalte valori k , exponențiala care reprezintă primul factor al ponderilor ia valoarea $-j$. De aceea s-a reprezentat în figura 3, modulul spectrului semnalului eșantionat natural.

Dacă comparăm acest spectru cu spectrul semnalului eșantionat cu reținere constatăm că lobiile spectrale obținute în urma eșantionării naturale nu sunt deformați ca în cazul eșantionării cu reținere. Deci reconstrucția este mai ușor de realizat în cazul eșantionării naturale decât în cazul eșantionării cu reținere.

Reconstrucția în urma eșantionării naturale se face prin filtrare trece-jos ideală; spre deosebire de cazul eșantionării cu reținere, în cazul eșantionării naturale poate fi obținută o reconstrucție perfectă. Filtrul de reconstrucție are răspunsul în frecvență din ecuația de jos iar frecvența sa de tăiere trebuie să satisfacă o dubla inegalitate.

Relatia dintre spectrul unui semnal discret si spectrul semnalului analogic din care provine

$$\begin{array}{l} \text{Semnal analogic si spectrul sau} \\ x_a(t) \longleftrightarrow X_a(\omega); \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Semnal discret si spectrul sau} \\ x_d[n] = x_a(nT_s) \longleftrightarrow X_d(\Omega) \end{array}$$

Doua expresii echivalente pentru spectrul semnalului analogic:

$$\hat{x}(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) \longleftrightarrow \hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) &\longleftrightarrow \hat{X}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \right\} \\ &= x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) \delta(t - kT_s) \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) \mathcal{F} \{ \delta(t - kT_s) \} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\omega kT_s} \end{aligned} \quad 41$$

Există două formule pentru spectrul semnalului eșantionat ideal. Prima exprimă caracterul periodic al acestui spectru și am demonstrat-o deja (vezi prima ecuație).

Cea de a doua se obține aplicând transformata Fourier directă semnalului eșantionat ideal. Întrucât semnalul eșantionat ideal se exprimă ca produs dintre semnalul de eșantionat $x_a(t)$ și distribuția Dirac periodică de perioadă T_s și produsul dintre o funcție continuă și distribuția Dirac întârziată este egal cu produsul dintre valoarea funcției în punctul în care se anulează argumentul distribuției și distribuția Dirac întârziată, pe baza proprietății de liniaritate a transformatei Fourier și ținând seama de expresia transformatei Fourier a distribuției Dirac întârziată se obține expresia din membrul drept al ultimei egalități.

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\omega kT_s}$$

Spectrul semnalului discret este:

$$X_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k] e^{-j\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\Omega k}$$

Se observa ca:

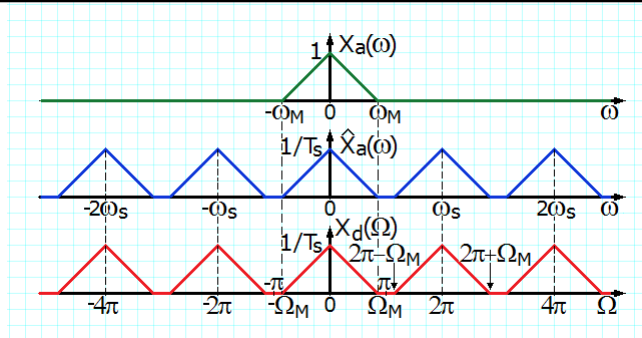
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\omega kT_s} \Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T_s}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\Omega k}$$

Relatia dintre spectrul unui semnal discret si spectrul semnalului analogic din care provine este :

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_s} - k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

42

Deci spectrul semnalului eșantionat ideal poate fi exprimat ca în membrul drept al ecuației de sus. Dar prin eșantionarea ideală a semnalului $x(t)$ se obțin eșantioanele sale $x_a(nT_s)$ care reprezintă valorile unui semnal în timp discret $x_d[n]$. Spectrul acestui semnal se calculează cu ajutorul transformatei Fourier în timp discret TFTD, care poate fi pusă în forma membrului drept al celei de a doua ecuații. Comparând membrii dreپți ai primelor două ecuații se constată că spectrul semnalului digital $x_d[n]$ obținut prin eșantionarea ideală a semnalului analogic $x_a(t)$ se obține din spectrul semnalului eșantionat ideal prin schimbarea de variabilă $\omega = \Omega/T_s$. Ținând seama de prima formulă pentru spectrul semnalului eșantionat ideal, spectrul semnalului digital obținut prin eșantionarea ideală a semnalului analogic ia forma din membrul drept al celei de a patra ecuații. Deci spectrul semnalului digital se obține prin repetarea periodică a spectrului semnalului analogic de eșantionat. Singura diferență dintre cele două spectre constă în faptul că spectrul semnalului eșantionat ideal este periodic de perioadă $2\pi/T_s$ în timp ce spectrul semnalului digital obținut prin eșantionare ideală este periodic de perioadă 2π (ca orice spectru de semnal digital).



Între cele două axe de frecvență corespunzătoare spectrului eșantionat respectiv semnalului discret există relația:

$$\Omega = \omega T_s$$

Se aplică și acum natura periodică a spectrului semnalului discret $X_d(\Omega)$

Între frecvențele maxime din spectru există relația:

$$\Omega_M = \omega_M T_s; \quad T_s \leq \frac{\pi}{\omega_M}$$

43

În figură se prezintă un exemplu. În primul grafic este prezentat spectrul semnalului de eșantionat. Este vorba despre un semnal de bandă limitată cu frecvența maximă din spectru de valoare ω_M . În cel de al doilea grafic este reprezentat spectrul semnalului eșantionat ideal. El se obține prin prelungirea prin periodicitate cu perioada ω_s a spectrului semnalului de eșantionat și înmulțire cu $1/T_s$. În graficul de jos este prezentat spectrul semnalului digital obținut prin eșantionarea ideală a semnalului analogic considerat.

Esantionarea semnalelor discrete

Problema: In prelucrarea numerica a semnalelor apar situatii in care, ulterior achizitionarii esantioanelor, se constata ca **frecventa de esantionare a fost prea mare**.

Solutie: In astfel de situatii, cand nu se mai poate esantiona semnalul analogic, este posibila esantionarea semnalului numeric, retinandu-se tot a N-a valoare. Se reduce astfel numarul de esantioane dupa ce semnalul a fost deja esantionat = esantionarea semnalului discret

Semnalul discret esantionat se obtine prin produsul:

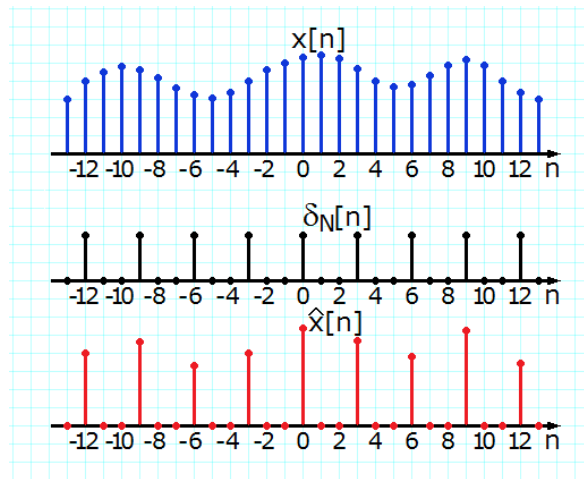
$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= x[n] \delta_N[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \delta[n - kN]\end{aligned}$$

44

In cazul in care frecventa de esantionare a fost prea mare, semnalul digital poate fi reesantionat. Astfel se reduce numarul de esantioane.

Acest lucru se face inmultind semnalul digital $x[n]$ cu distributia Dirac periodica in timp discret, de perioada N, efectul fiind ca se retine tot a N-a valoare.

Pas de esantionare $N=3$



45

Avem un exemplu : sus semnalul digital de re-esantionat

Mijloc: distributia Dirac periodica in timp discret, de perioada $N=3$. Astfel pasul de esantionare este $N=3$

Jos: semnalul esantionat

Spectrul semnalului esantionat

$$\delta_N[n] \longleftrightarrow \Omega_s \delta_{\Omega_s}(\Omega) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s); \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(\Omega) &= \mathcal{F}\{x[n]\delta_N[n]\} \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \otimes \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s); \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{N} \end{aligned}$$

Spectrul semnalului discret esantionat este periodic, de perioada Ω_s

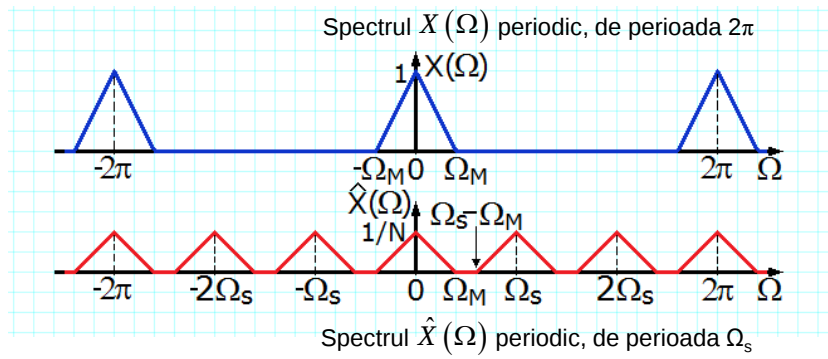
$$\hat{X}_r(\Omega) = \frac{1}{N} X_r(\Omega) * \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_r(\Omega - k\Omega_s), \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

Restrictia pe 2π (perioada spectrului semnalului $x[n]$)

46

Spectrul semnalului esantionat se obtine prin convolutie periodica a spectrului semnalului digital cu spectrul distributiei Dirac periodice, care este tot o distributie Dirac periodica, de perioada $\Omega_s = 2\pi/N$

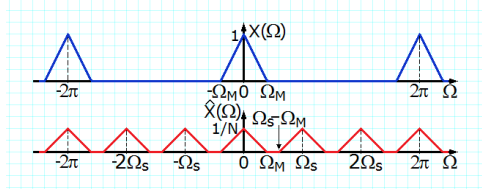
Pas de esantionare $N=3$



47

Spectrul semnalului digital de esantionat este de perioada 2π

Spectrul semnalului re-esantionat este periodic de perioada $\Omega_s = 2\pi/N$



Semnalul analogic, $x(t)$, de banda limitata ω_M , a fost esantionat ideal, cu pasul de esantionare $T_s \Rightarrow$ semnal numeric de banda limitata $x[n]$, care este si el esantionat cu pasul $N \Rightarrow$ semnal numeric esantionat $\hat{x}[n]$

Se dovedeste ca semnalul $x[n]$ este esantionabil cu pasul N adica lobii spectrali nu se suprapun, daca semnalul analogic $x(t)$ ar fi putut fi esantionat si cu perioada $T'_s = NT_s$ respectandu-se teorema WKS. Initial semnalul analogic a fost supra-esantionat.

Frecventa maxima este $\Omega_M = \omega_M T_s$, $\Omega_s = 2\pi/N$, atunci conditia de reconstruire perfecta este:

$$\Omega_s \geq 2\Omega_M$$

$$NT_s \leq \frac{\pi}{\omega_M}; \quad T'_s \leq \frac{\pi}{\omega_M} \quad T'_s = NT_s$$

48

Practic semnalul analogic $x(t)$ de banda limitata, la ω_M , a fost esantionat cu pasul de esantionare T_s (unde frecventa de esantionare ω_s este macar de doua ori frecventa maxima din spectru)

Rezulta semnalul $x[n]$ care la randul sau este re-esantionat cu pasul N , cu frecventa de esantionare $\Omega_s = 2\pi/N$

Pasul de esantionare echivalent este NT_s , sau frecventa de esantionare $2\pi/(NT_s)$

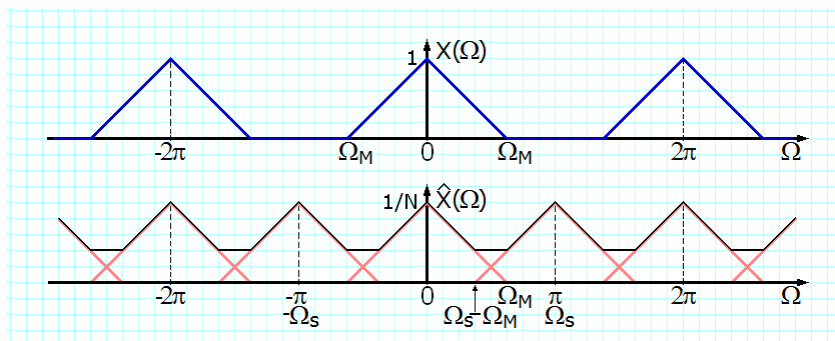
Conform teoremei de esantionare WKS, trebuie deci sa avem indeplinita conditia

$$2\pi/(NT_s) \geq 2\omega_M$$

Sau echivalent

$$NT_s \leq \pi/\omega_M$$

Eroarea de aliere

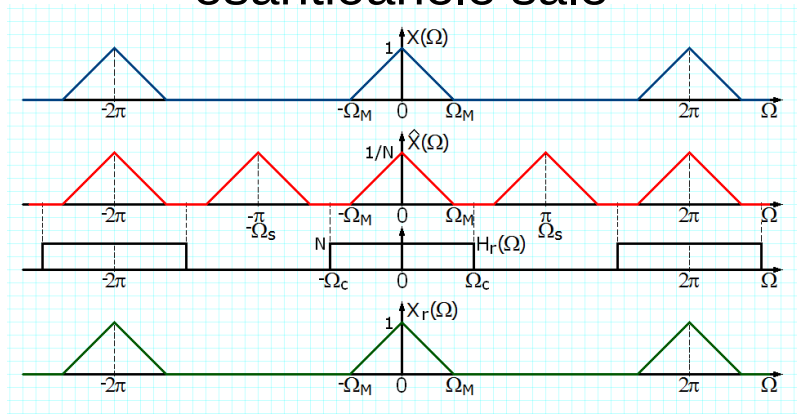


$$\Omega_S - \Omega_M < \Omega_M$$

49

Daca aceasta conditie nu este satisfacuta, apare eroarea de aliere

Reconstruirea semnalului discret din esantioanele sale



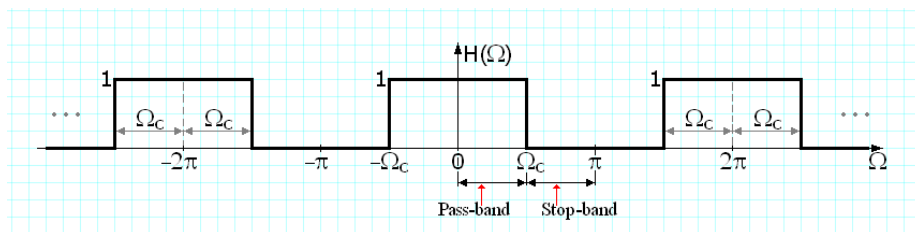
Daca lobii nu se suprapun, prin filtrare trece-jos ideala:

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} N, & |\Omega - 2k\pi| \leq \Omega_c \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad \Omega_M \leq \Omega_c \leq \Omega_s - \Omega_M$$

50

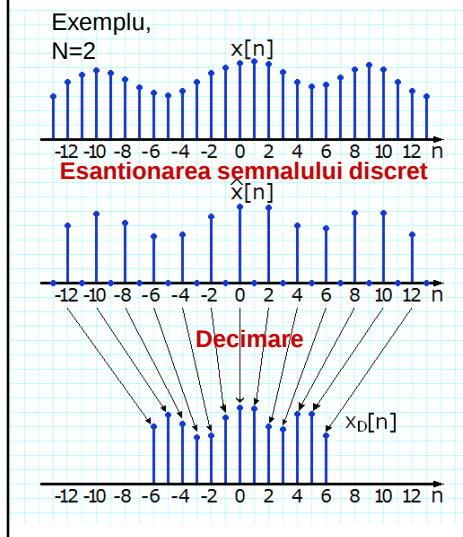
Reconstructia se face prin filtrare TJ ideala, in timp discret

Caracteristica in frecventa a FTJ ideal in timp discret (capitolul Filtrare)



$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega - 2k\pi| < \Omega_c, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \longleftrightarrow h[n] = \frac{\sin \Omega_c n}{\pi n}$$

Esantionarea si decimarea unui semnal discret



Dupa esantionarea unui semnal discret, intre doua valori retinute (esantioane) sunt intercalate $N-1$ zerouri, care nu aduc *nici o informatie* despre semnalul esantionat. Ele pot fi *omise*.

Rezulta **semnalul decimat** $\hat{x}_D[n]$.

Relatia dintre semnalul discret decimat si cel esantionat :

$$\hat{x}_D[n] = \hat{x}[Nn].$$

Din semnalul decimat se poate reconstrui semnalul nedecimat prin inserarea $N-1$ zerouri intre doua valori consecutive.

Spectrul **semnalul decimat** :

$$\hat{X}_D(\Omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}_D[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_D[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[nN] e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[m] e^{-j\frac{\Omega}{N}m} = \hat{X}\left(\frac{\Omega}{N}\right)$$

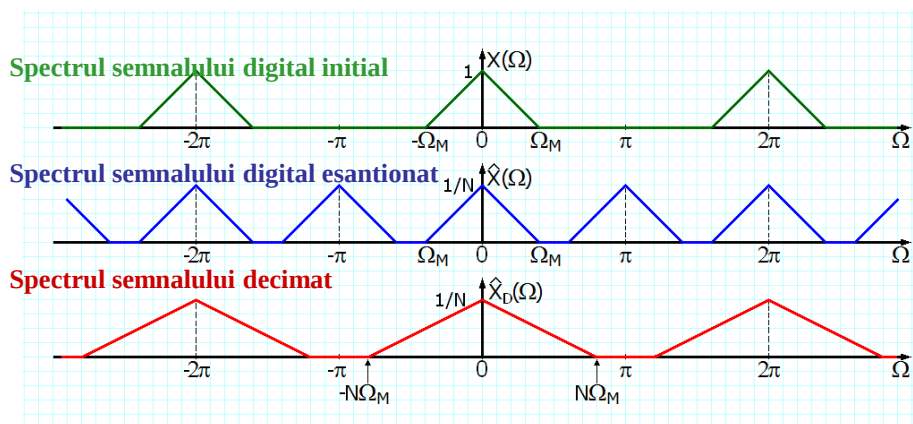
$$\text{Spectrul semnalul digital esantionat} \quad \hat{X}(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega - k\Omega_s) \quad \text{Spectrul semnalul digital initial } X(\Omega)$$

$$\hat{X}_{Dr}(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_r\left(\frac{\Omega - k2\pi}{N}\right)$$

$$k=0: (1/N) X(\Omega/N) \xrightarrow{\Omega \geq N\Omega_M} 0$$

Intinderea lobilor spectrali ai semnalului decimat este **de N ori mai mare** decat intinderea lobilor spectrali ai semnalului nedecimat $x[n]$.

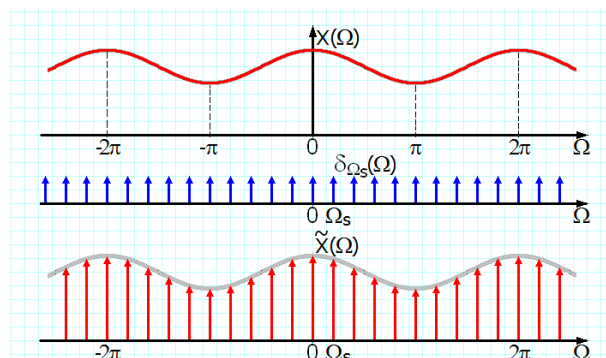
exemplu $N=2$.



Esantionarea spectrului unui semnal discret de durata finita

Discretizarea semnalelor a fost impusa de utilizarea calculatoarelor numerice (care nu pot prelucra decat marimi discrete in timp/frecventa). *Prelucrarea in domeniul spectrului este de multe ori mai simpla decat in domeniul timp.* Se pune intrebarea cu ce frecventa sa esantionam spectrul $X(\Omega)$ unui semnal discret $x[n]$.

$$\tilde{X}(\Omega) = X(\Omega) \delta_{\Omega_s}(\Omega) = X(\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_s) \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



55

Figura de sus: spectrul de esantionat, al semnalului in timp discret. Se observa ca spectrul este continuu

Figura din mijloc: distributia Dirac periodica, de perioada Ω_s , cu care se esantioneaza spectrul

Figura de jos: spectrul esantionat cu pasul Ω_s

$$\frac{1}{\Omega_s} \delta_N[n] \longleftrightarrow \delta_{\Omega_s}(\Omega) \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

$$\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1} \{ X(\Omega) \delta_{\Omega_s}(\Omega) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ X(\Omega) \} * \mathcal{F}^{-1} \{ \delta_{\Omega_s}(\Omega) \} = x[n] * \frac{1}{\Omega_s} \delta_N[n];$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

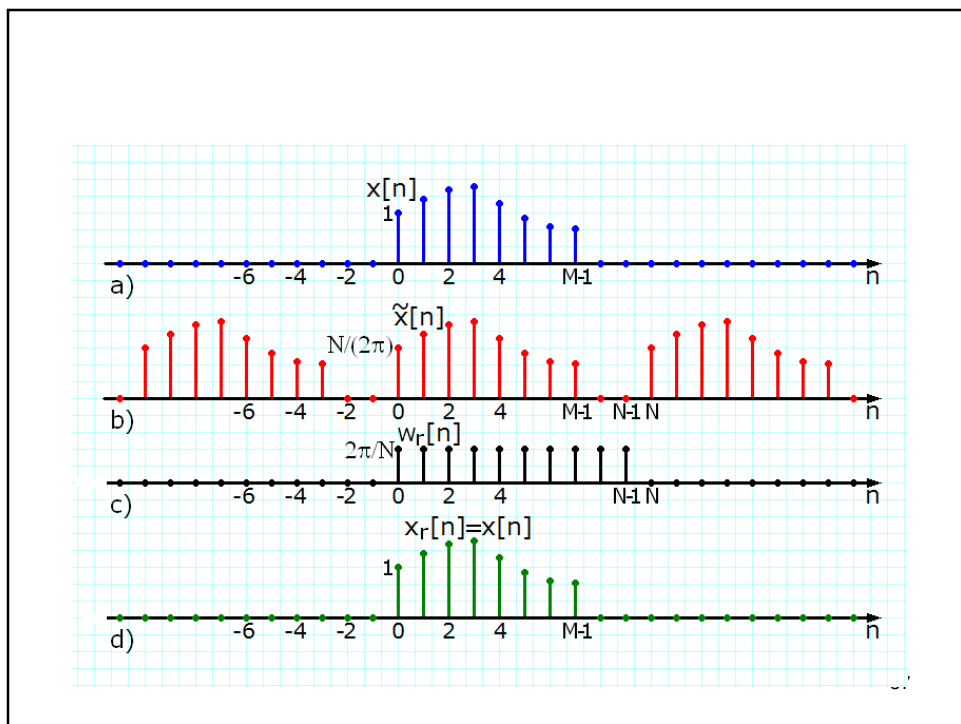
Fie semnalul $x[n]$ cu suportul $0, M-1$. Semnalul obtinut prin esantionarea spectrului semnalului $x[n]$ este o extensie prin repetare cu perioada N a semnalului original $x[n]$.

$$\tilde{x}[n] = \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

Conditia de reconstructie: $x[n]$ sa fie de durata finita, $M \leq N$.

56

Am presupus ca avem un semnal discret $x[n]$ cu suport limitat intre 0 si $M-1$ a carui spectru se esantioneaza



Esantionarea spectrului trebuie facuta in asa fel incat durata semnalului M sa nu depaseasca pasul de esantionare N (grupurile temporale sa nu se suprapuna):

$$M \leq N$$

Rezulta $2\pi/M \geq 2\pi/N$

Cum pasul de esantionare in frecventa este $\Omega_s = 2\pi/N$, conditia devine:

$$\Omega_s \leq 2\pi/M, M=\text{durata semnalului}$$

Se esantioneaza spectrul semnalului de durata finita $x[n]$ (zero pentru $n < 0$ si $n > M-1$) $\Rightarrow$ semnal periodic $\tilde{x}[n]$, perioada $N = 2\pi/\Omega_s$

Conditia de reconstructie : $N \geq M$, nu sunt suprapuneri ale grupurilor temporale din semnalul rezultat.

•Reconstructia se face prin inmultirea semnalului cu fereastra temporala rectangulara:

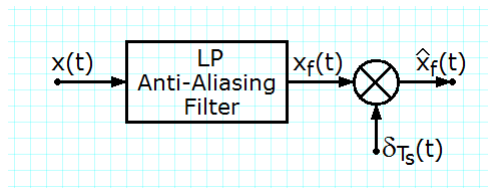
$$x_r[n] = x[n] = \tilde{x}[n] w_r[n]; \quad w_r[n] = \begin{cases} \frac{2\pi}{N}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Daca spectrul se esantioneaza prea rar, rezulta $N < M \Rightarrow$ apare suprapunerea grupurilor temporale; deci erori de aliere.

Semnalul $x[n]$ nu mai poate fi reconstruit din spectrul esantionat.

Masuri practice la esantionarea semnalelor analogice

- Nu se cunoaste largimea benzii unui semnal de banda limitata ce urmeaza a fi esantionat.
- Semnalul poate avea componente spectrale de frecvente mari, neinteresante in aplicatia considerata. Ele pot fi cauzate si de zgomot.
- Apare astfel riscul erorilor de aliere. Acestea se evita folosind un filtru trece-jos numit si filtru **anti-aliere** prevazut in structura lantului de prelucrare a semnalului, inainte de circuitului de esantionare si memorare



59

În practică nu se cunoaște frecvența maximă din spectrul semnalului de eșantionat, ωM . De aceea ar fi necesară a frecvență de eșantionare cât mai mare. Creșterea frecvenței de eșantionare are ca efect creșterea numărului de eșantioane ceea ce conduce la ocuparea unei capacități ridicate de memorie (în care se stochează datele ce urmează a fi prelucrate) și în consecință a timpului necesar pentru prelucrarea acestor eșantioane. De aceea se prevede în structura lanțului de prelucrare a semnalului, înainte de circuitul de eșantionare, a unui filtru trece-jos care fixează valoarea maximă a frecvenței semnalului care urmează să fie eșantionat.

•**Sisteme de telefonie numerica (semnal audio) :**

- Frecventa maxima din spectru: $f_M = 3.4 \text{ kHz}$
- Frecventa Nyquist de esantionare: $f_s = 6.8 \text{ kHz}$
- Frecventa standard de esantionare: $f_s = 8 \text{ kHz}$

•**Sisteme de televiziune (semnalul video):**

- Frecventa maxima din spectru: $f_M = 5 \text{ MHz}$
- Frecventa Nyquist de esantionare: $f_s = 10 \text{ MHz}$
- Frecventa standard de esantionare: $f_s = 18 \text{ MHz}$

60

Există semnale de bandă limitată cu frecvența maximă din spectru cunoscută. De exemplu în cazul telefoniei digitale se consideră că frecvența maximă din spectrul semnalului vocal este de 3,4 kHz. În cazul sistemelor de telefonie digitală se folosește o frecvență de eșantionare de 8 kHz. Se constată că în acest caz este respectată teorema WKS. În realitate, banda semnalului vocal este de 20 kHz.

În cazul sistemelor de înregistrare audio : CD, DVD, se folosește o frecvență de eșantionare de 44 kHz și calitatea înregistrării este de înaltă fidelitate. Banda semnalului de televiziune este de aproximativ 5 MHz și frecvența de eșantionare folosită în sistemele de televiziune digitală este de 18 MHz. Se constată că și în cazul sistemelor de televiziune digitală este respectată teorema WKS.



Semnal vocal fara aliere.



Semnal vocal cu aliere



Semnal muzical fara aliere.



Semnal muzical cu aliere.

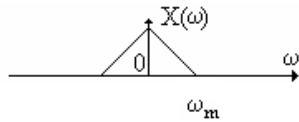


Esantionarea semnalelor trece-banda

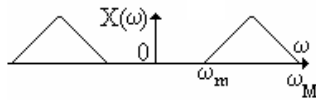
Semnale de tip "trece jos" - spectrul concentrat in benzi care includ frecventa nula.

Semnale de tip "trece banda" - au suportul spectrului de forma

$$\text{supp}\{X(\omega)\} = [-\omega_M, -\omega_m] \cup [\omega_m, \omega_M]$$



Low-pass signal.



Band-pass signal.

Reconstructia perfecta a unui semnal trece banda esantionat ideal se poate realiza pe baza teoremei WKS: $\omega_s \geq 2\omega_M$.

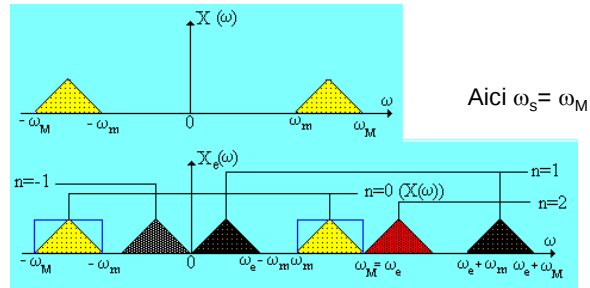
Uneori semnalele trece banda pot fi reconstruite din esantioanele lor chiar daca s-a folosit o *frecventa de esantionare mai mica decat frecventa Nyquist*.

Cazul semnalelor trece banda de banda ingusta

Semnal trece banda de banda ingusta : $\frac{\omega_M - \omega_m}{\omega_m} < 1$

Suportul spectrului unui semnal trece banda de banda ingusta esantionat ideal este de forma:

$$\text{supp}\{X_s(\omega)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ [-\omega_M + n\omega_s, -\omega_m + n\omega_s] \cup [\omega_m + n\omega_s, \omega_M + n\omega_s] \right\}$$



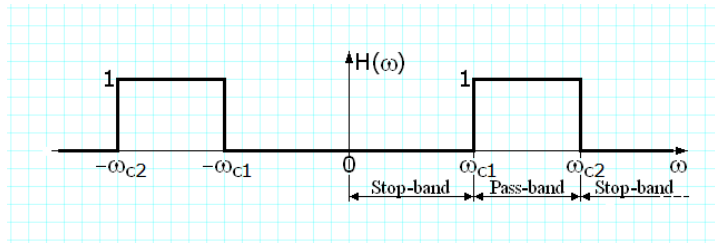
Reconstructie perfecta: filtrare trece-banda ideala chiar daca s-a folosit o frecventa de esantionare inferioara frecventei Nyquist

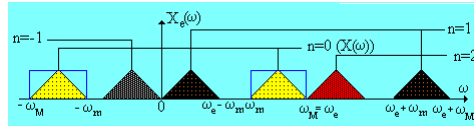
63

Filtrul trece-banda ideal

$$H_{TB}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} = p_{\omega_{c2}}(\omega) - p_{\omega_{c1}}(\omega)$$

$$h_{BP}(t) = \frac{\sin \omega_{c2} t}{\pi t} - \frac{\sin \omega_{c1} t}{\pi t}$$





Reconstructie perfecta :

$$\left[-\omega_M + k\omega_s, -\omega_m + k\omega_s \right] \cap \left[\omega_m + l\omega_s, \omega_M + l\omega_s \right] = \emptyset \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

Deplasare in intervalul $[-\omega_M, -\omega_m]$ cu $k\omega_s$ Deplasare in intervalul $[\omega_m, \omega_M]$ cu $l\omega_s$

Pentru $l=0$:

$$\left[-\omega_M + k\omega_s, -\omega_m + k\omega_s \right] \cap \left[\omega_m, \omega_M \right] = \emptyset, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} -\omega_M + k\omega_s \leq \omega_m \\ -\omega_M + (k+1)\omega_s \geq \omega_M \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\omega_M}{k+1} \leq \omega_s \leq \frac{2\omega_m}{k}$$

Daca exista valori intregi ale lui k pentru care aceasta conditie este satisfacuta, atunci exista valori ale frecventei de esantionare inferioare frecventei Nyquist pentru care semnalele trece banda de banda ingusta pot fi reconstruite in urma esantionarii ideale.

Solutia din multimea numerelor intregi a dublei inecuatii obtinute este

$$0 < k \leq \frac{\omega_m}{\omega_M - \omega_m} = n_0$$

frecventa de esantionare va apartine unor intervale de forma:

$$\left[\frac{2\omega_M}{k+1}, \frac{2\omega_m}{k} \right] \quad \text{cu } k \in \{1, \dots, n_0\}$$

Exemplu

$\omega_m = 8\pi$ si $\omega_M = 10\pi$ atunci $n_0 = \frac{\omega_m}{\omega_M - \omega_m} = 4 \Rightarrow$ Valorile admisibile pentru k sunt 1,2,3, 4.

Intervalele corespunzatoare pentru frecventa de esantionare:

$$\omega_s \in \{4\pi\} \cup [5\pi, 5.33\pi] \cup [6.66\pi, 8\pi] \cup [10\pi, 16\pi] \cup [20\pi, \infty]$$