

8. Filtrarea semnalelor

- Filtrare - Modificarea relativa a amplitudinilor componentelor armonice ale unui semnal periodic sau chiar eliminarea sau selectarea anumitor componente armonice;
- Modificarea densitatii spectrale a unui semnal aperiodic, in sensul favorizarii sau defavorizarii unor segmente spectrale.

1

O metodă de prelucrare a semnalelor pe care o studiem în cadrul cursului de PS este filtrarea semnalelor. Prin filtrarea unui semnal periodic are loc modificarea relativă a amplitudinilor componentelor spectrale ale acelui semnal (unele sunt atenuate) sau chiar eliminarea unor componente spectrale. Prin filtrarea unui semnal aperiodic se modifică forma spectrului acelui semnal fiind favorizate unele benzi și defavorizate altele.

- Inginerul român Augustin Maior a observat ca pe un **circuit telefonic** s-ar putea transmite mai multe convorbiri simultan.
- Pentru aceasta a transferat spectrul vocal al unei convorbiri într-o banda de frecventa, distincta de al altei convorbiri, prin **modulare**.
- La **receptie**, separarea convorbirilor se realizeaza printr-o operatie de **atenuare** a tuturor componentelor spectrale cu exceptia cate unei benzi, in care a fost plasata convorbirea.
- In acest mod, **prin filtrare**, se separa convorbirile ce au fost amestecate.

- Filtrarea se realizeaza cu ajutorul unor sisteme liniare si invariante in timp continuu sau discret.
- Filtrele sunt sisteme de convolutie continue sau discrete.

3

Filtrarea se realizează de obicei cu ajutorul unor sisteme liniare și invariante în timp numite filtre. Putem filtra atât semnale analogice cât și semnale digitale. În primul caz folosim filtre analogice iar în cel de al doilea caz folosim filtre digitale.

Filtrarea ideala

- Filtrele ideale nu pot fi realizate deoarece sunt necauzale.
- Nu este respectata teorema Paley-Wiener:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |X(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega \text{ nu converge}$$
$$\text{pentru } |\omega| > \omega_c, \quad |\log |X(\omega)|| \rightarrow \infty$$

4

Există cinci tipuri de filtre : trece-jos, trece-sus, trece-bandă, oprește bandă și trece-tot. Fiecare are un model de răspuns în frecvență care corespunde unui sistem ideal.

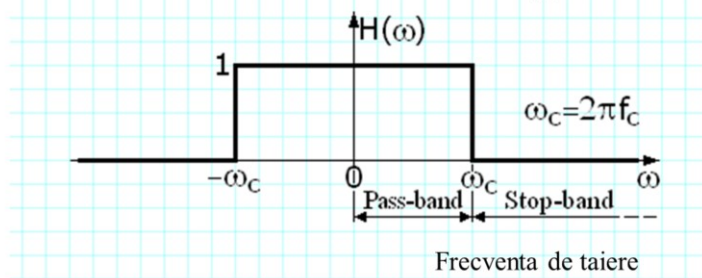
Filtrul trece-jos ideal analogic are răspunsul în frecvență de tipul poartă frecvențială.

Răspunsul la impuls al unui filtru trece-jos ideal este de tipul sinus cardinal. Întrucât acesta ia valori diferite de zero și la momente de timp negative rezultă că filtrul trece-jos ideal este un sistem ne-cauzal. De aceea el nu poate fi realizat în practică.

Tipuri de filtre ideale

- Filtrul trece jos FTJ ideal

$$H(\omega) = p_{\omega_c}(\omega) \leftrightarrow h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad \text{Necauzal}$$



Atenuare:

$$a = \frac{1}{|H(\omega)|} = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ \text{infinita} & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad a[dB] = 20 \log \frac{1}{|H(\omega)|} = -20 \log |H(\omega)|$$

5

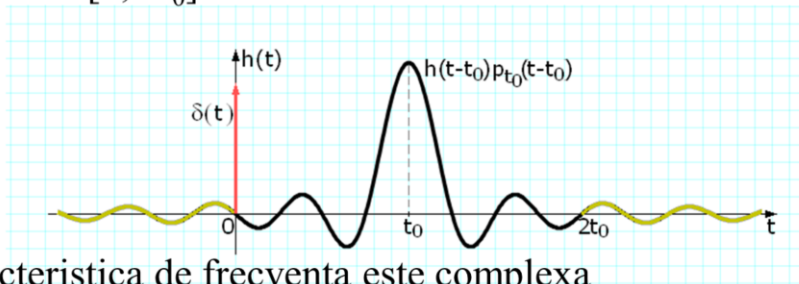
Filtrul trece-jos ideal analogic are răspunsul în frecvență de tipul poartă frecvențială.

Pe baza tabelului de perechi semnal – transformată Fourier se constată că răspunsul la impuls al unui filtru trece-jos ideal este de tipul sinus cardinal. Întrucât acesta ia valori diferite de zero și la momente de timp negative rezultă că filtrul trece-jos ideal este un sistem ne-cauzal.

În figură este prezentat răspunsul în frecvență al filtrului trece-jos ideal. Se constată că acesta are două benzi de frecvență, banda de trecere cuprinsă între 0 și ω_c (dacă frecvența semnalului de intrare este mai mică decât ω_c atunci acest semnal trece neatenuat) și banda de blocare care se întinde de la ω_c la dreapta (dacă frecvența semnalului de intrare este mai mare decât ω_c atunci acel semnal nu este lăsat să treacă).

Aproximarea unui filtru ideal printr-un filtru realizabil

- Răspunsul la impuls $h(t)$ se întârzie cu t_0 și se trunchiază în intervalul $[0, 2t_0]$.



- Caracteristica de frecvență este complexă

$$h(t-t_0) = \frac{\sin \omega_c (t-t_0)}{\pi (t-t_0)} \longleftrightarrow H_{t_0}(\omega) = e^{-j\omega t_0} p_{\omega_c}(\omega)$$

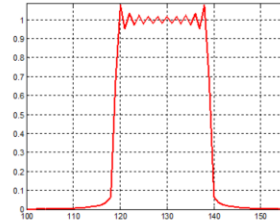
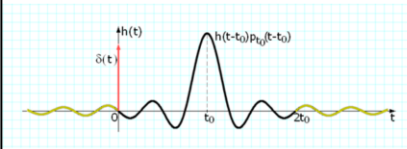
$$|H_{t_0}(\omega)| = |H(\omega)| = p_{\omega_c}(\omega); \quad \Phi_{t_0}(\omega) = -\omega t_0$$

- Modulul este același, dar faza nu rămâne zero

6

În continuare se arată cum se poate construi un filtru realizabil care să aibă un răspuns în frecvență cât mai apropiat de cel al filtrului trece-jos ideal.

Pentru a obține un sistem cauzal se translatează răspunsul la impuls al filtrului trece-jos ideal la dreapta cu cantitatea t_0 obținându-se răspunsul la impuls $h(t-t_0)$ (reprezentat cu roșu în figură) după care se trunchiază acest răspuns la impuls în așa fel încât să se obțină valoarea 0 pentru t negativ. Trunchierea se realizează cu ajutorul porții temporale $p_{t_0}(t-t_0)$. Deci răspunsul la impuls al filtrului realizabil este $h(t-t_0)p_{t_0}(t-t_0)$. Se observă că translația în timp a răspunsului la impuls al filtrului trece-jos ideal nu afectează modulul răspunsului în frecvență ci doar faza răspunsului în frecvență. Timpul de întârziere de grup al noului filtru este egal cu t_0 .



Timpul de intarziere de grup (modulatie)

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}$$

$$\tau_g = t_0$$

- Raspunsul la impuls $h(t-t_0)p_{t0}(t-t_0)$: cauzal deci sistem realizabil.
- Raspunsul in frecventa este afectat de fenomenul lui Gibbs.
- Cu cat t_0 este mai mare cu atat aproximarea este mai buna
- Se poate folosi in calcule FTJ ideal, ca o limita ce poate fi aproximata oricat de bine in eroare medie patratica.

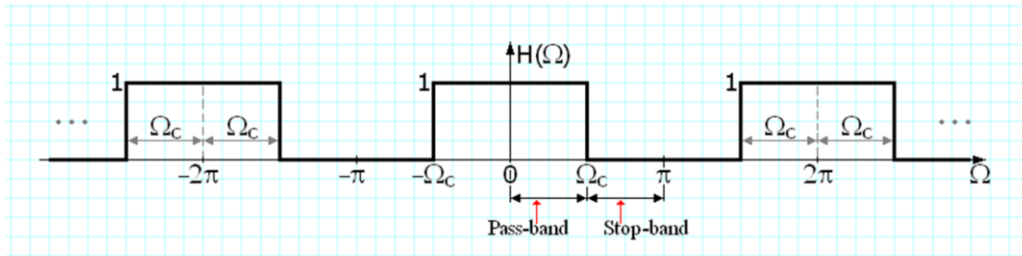
7

Trunchierea însă afectează și modulul răspunsului în frecvență manifestându-se fenomenul Gibbs.

- Spectrul semnalului de la iesirea FTJ ideal in functie de spectrul semnalului de intrare

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Filtrul trece jos ideal in timp discret

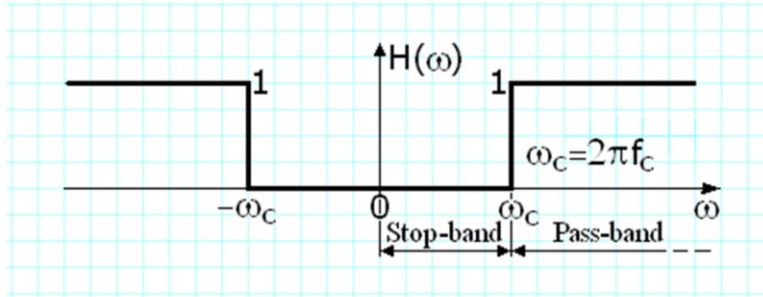


$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega - 2k\pi| < \Omega_c, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad h[n] = \frac{\sin \Omega_c n}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

9

Filtrul trece-jos ideal în timp discret are răspunsul în frecvență din figură. El se obține prin prelungirea prin periodicitate cu perioada 2π a unei variante scalate a răspunsului în frecvență al filtrului trece-jos ideal în timp continuu. Expresia analitică a răspunsului în frecvență al filtrului trece-jos ideal este prezentată în prima ecuație iar expresia răspunsului la impuls în cea de a doua ecuație.

Filtrul trece sus ideal



$$H_{TS}(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ 1, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} = 1 - p_{\omega_c}(\omega) \longleftrightarrow h_{TS}(t) = \delta(t) - \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

10

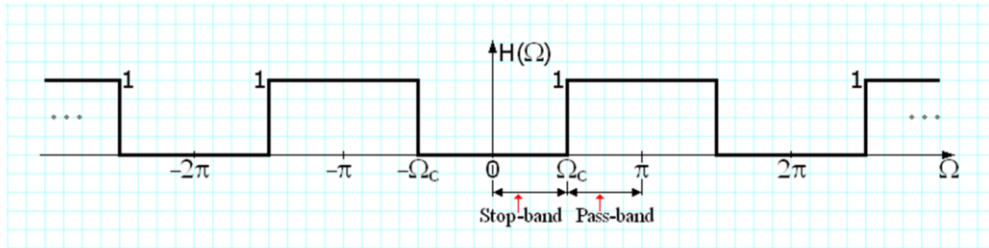
În cazul filtrului trece-sus ideal, frecvențele joase (mai mici decât ω_c) sunt blocate, răspunsul în frecvență al filtrului, $H_{TS}(\omega)$, având valoarea 0 în banda de blocare, iar frecvențele înalte (mai mari decât ω_c) nu sunt afectate, răspunsul în frecvență al filtrului având valoarea 1 în banda de trecere.

Se constată că răspunsul în frecvență al filtrului trece sus ideal se poate exprima pe baza răspunsului în frecvență al filtrului trece jos ideal cu ecuația :

$$H_{TS}(\omega) = 1 - H_{TJ}(\omega).$$

Întrucât răspunsul în frecvență al filtrului trece jos se exprimă ca și o poartă frecvențială, prin inversarea acestui răspuns în frecvență se obține răspunsul la impuls al filtrului trece-sus din cea de a doua ecuație.

Filtrul trece sus ideal in timp discret



$$H_{TS}(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega - (2k+1)\pi| < \Omega_c \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} = 1 - p_{\Omega_c}(\Omega) * \delta_{2\pi}(\Omega - \pi)$$

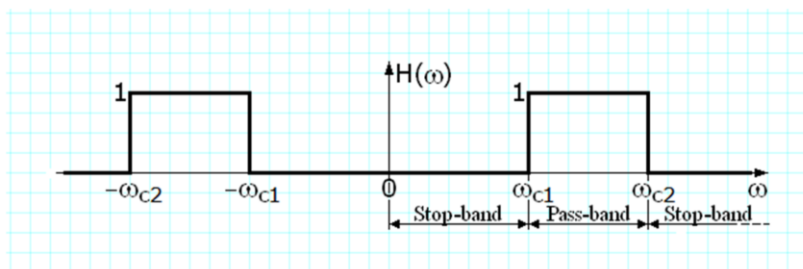
$$h_{TS}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \Omega_c n}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

11

Filtrul trece-sus ideal în timp discret are răspunsul în frecvență din figură. El se obține prin prelungirea prin periodicitate cu perioada 2π a unei variante scalate a răspunsului în frecvență al filtrului trece-sus ideal în timp continuu.

Expresia analitică a răspunsului în frecvență al filtrului trece-sus ideal este prezentată în prima ecuație iar expresia răspunsului la impuls în cea de a doua ecuație.

Filtrul trece banda ideal



$$H_{TB}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} = p_{\omega_{c2}}(\omega) - p_{\omega_{c1}}(\omega)$$

$$h_{TB}(t) = \frac{\sin \omega_{c2} t}{\pi t} - \frac{\sin \omega_{c1} t}{\pi t}$$

Doua frecvente de taiere, inferioara si superioara

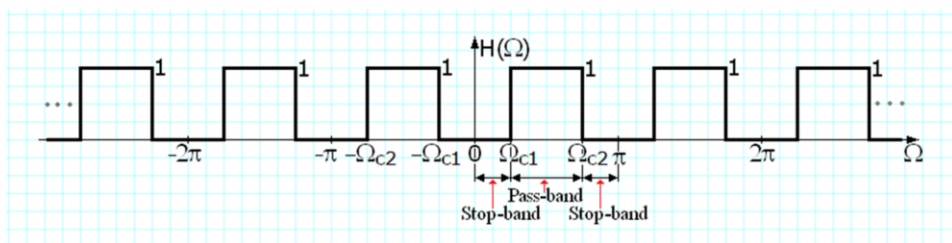
12

Filtrul trece banda ideal are o banda de trecere intre cele doua frecvente de taiere, inferioara si superioara, ω_{c1} respectiv ω_{c2}

Restul frecventelor sunt blocate.

Prima ecuatie da raspunsul in frecventa iar a doua raspunsul la impuls al filtrului trece banda ideal.

Filtrul trece banda ideal in timp discret



$$H_{TB}(\Omega) = \begin{cases} 1, & \Omega_{c1} < |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}, \quad \Omega \in [-\pi, \pi) = H_0(\Omega) * \delta_{2\pi}(\Omega)$$

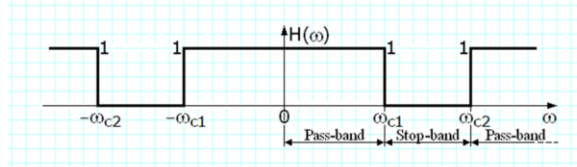
$$h_{TB}[n] = \frac{\sin \Omega_{c2} n}{\pi n} - \frac{\sin \Omega_{c1} n}{\pi n}$$

13

Filtrul trece-banda ideal în timp discret are răspunsul în frecvență din figură. El se obține prin prelungirea prin periodicitate cu perioada 2π a unei variante scalate a răspunsului în frecvență al filtrului trece-banda ideal în timp continuu.

Expresia analitică a răspunsului în frecvență al filtrului trece-banda ideal este prezentată în prima ecuație iar expresia răspunsului la impuls în cea de a doua ecuație.

Filtrul oprește banda ideal



$$H_{OB}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 1, & \text{in rest} \end{cases}$$

$$h_{OB}(t) = \delta(t) - \frac{\sin \omega_{c2}t}{\pi t} + \frac{\sin \omega_{c1}t}{\pi t}$$

14

Filtrul oprește bandă ideal are două benzi de trecere:

-la frecvențe joase (între 0 și ω_{c1}) și

-la frecvențe înalte (la dreapta lui ω_{c2});

precum și o bandă de oprire (între ω_{c1} și ω_{c2}).

Răspunsul său în frecvență este exprimat în prima ecuație și se poate calcula ca diferență între 1 și răspunsul în frecvență al unui filtru trece bandă. De aceea se obține expresia răspunsului la impuls din cea de a doua ecuație.

Aproximarea filtrelor ideale

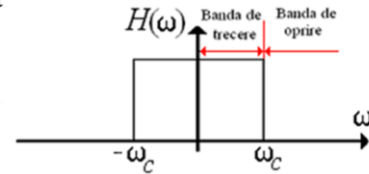
Caracteristicile de frecvență ale filtrului trece jos ideal au trei proprietăți remarcabile:

1. Modulul răspunsului în frecvență este perfect plat (constant) în banda de trecere
2. Tranziția din banda de trecere în banda de blocare este făcută abrupt la frecvențele $\pm\omega_C$
3. Caracteristica de fază este zero. Aceasta provine din cerința ca orice componentă din banda de trecere să fie distorsionată.

Un caz special de fază nenulă rezulta într-o distorsiune deseori acceptabilă: faza liniară (aceasta înseamnă în timp o deplasare).

$$\Phi_{t_0}(\omega) = -\omega t_0$$

Circuitele reale, cu răspunsul în frecvență $H(\omega)$, care simulează filtrul trece jos ideal, pot fi construite pe baza unor criterii de aproximare care minimizează eroarea de aproximare a caracteristicilor de frecvență ale filtrului ideal într-o anumită bandă de frecvență.



Așa după cum s-a constatat în transparentele anterioare, caracteristicile de frecvență ale filtrelor trece jos ideale au trei proprietăți remarcabile:

1. Răspuns în frecvență plat în banda de trecere,
2. Tranziție abruptă din banda de trecere în banda de blocare,
3. Caracteristică de fază liniară. De fapt răspunsurile în frecvență ale filtrelor trece jos ideale sunt funcții reale și au faza identic nulă. O condiție mai puțin restrictivă este ca faza să fie liniară în raport cu frecvența. În acest caz se obține un timp de întârziere de grup constant și deci întârzierea introdusă de filtru este constantă. De aceea semnalul de la ieșirea filtrului nu va distorsiona armonicele semnalului de la intrare. Evident, amplitudinile acestor armonici vor fi afectate.

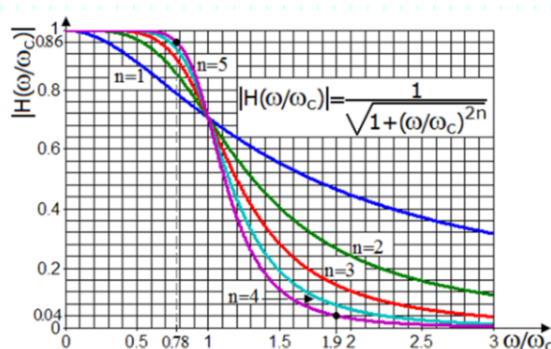
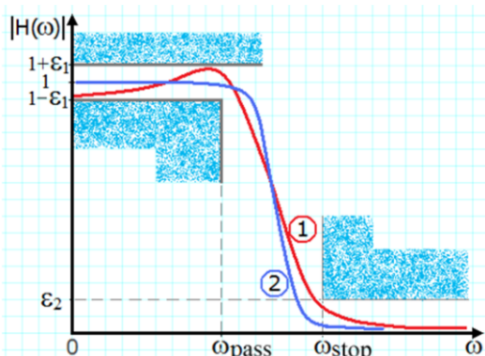
În practică nu pot fi construite filtre ideale deoarece acestea sunt sisteme necauzale. De aceea au fost concepute tehnici de aproximare a filtrelor ideale. Pentru fiecare dintre cele trei caracteristici ale filtrelor trece jos ideale amintite deja există câte o tehnică specifică de aproximare. Amănunte suplimentare despre metodele de aproximare ale filtrelor trece jos ideale găsiți în "Dorina Isar, Alexandru Isar, Filtre, Editura Politehnica, 2004, ISBN 973-625-128-4"

- Un filtru analogic poate fi : pasiv sau activ.
- Filtre pasive sunt compuse din elemente pasive: rezistente R , condensatoare C si bobine L .
- Filtrele active sunt in general amplificatoare operationale cu rezistente R si condensatoare C conectate extern.

Aproximarea de tip Butterworth

Se obține un filtru trece jos maxim plat (fara riplu) în banda de trecere, cu funcția de transfer $H_B(\omega)$, cu proprietatea:

$$\left| |H_i(\omega)|^2 - |H_B(\omega)|^2 \right| = \min_{H(\omega)} \left\{ \left| |H_i(\omega)|^2 - |H(\omega)|^2 \right| \right\}, \quad |\omega| \leq \omega_p$$



stanga: caracteristica de modul a unui filtru Chebyshev (1) si filtru Butterworth (2).

dreapta: caracteristica de modul a filtrului Butterworth pentru diverse ordine ale filtrului

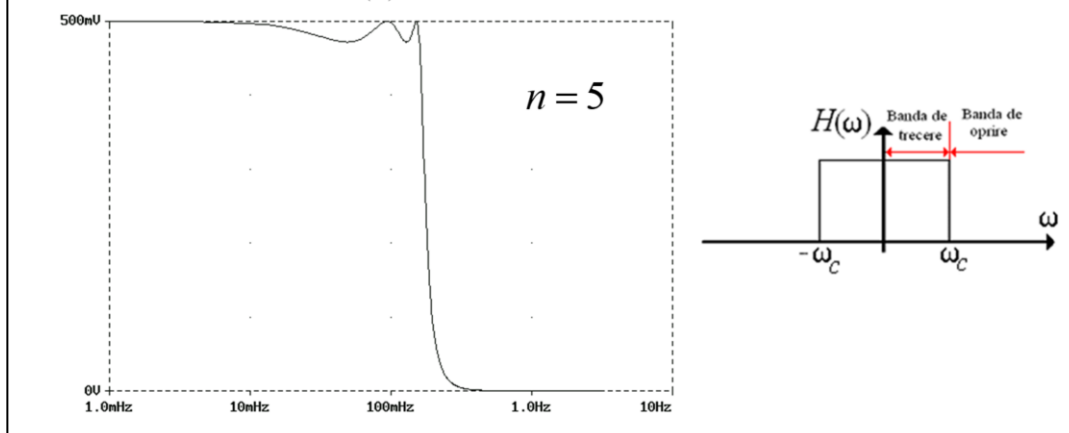
Prima caracteristica a filtrelor trece jos ideale este caracterul plat al modulului răspunsului în frecvență în banda de trecere. Aproximarea de tip Butterworth este o aproximare de tip maxim plat. Criteriul de aproximare este prezentat în ecuație. Cu $H_i(\omega)$ s-a notat răspunsul în frecvență al filtrului trece jos ideal. Cu $H(\omega)$ s-a notat răspunsul în frecvență al unui filtru realizabil, iar cu $H_B(\omega)$ s-a notat răspunsul în frecvență al unui filtru Butterworth. Ecuația ne spune că dintre toate filtrele realizabile (cu răspunsul în frecvență generic $H(\omega)$), filtrul care minimizează modulul diferenței dintre pătratele modulelor răspunsurilor în frecvență ale filtrului trece jos ideal și al filtrului generic, în banda de trecere $(0, \omega_c)$, este filtrul Butterworth. În figură este dată expresia pătratului modulului răspunsului în frecvență al unui filtru Butterworth de ordinul n și sunt reprezentate pătratele caracteristicilor de modul ale unor filtre Butterworth de diferite ordine, $n=1, \dots, 5$. ω_c reprezintă frecvența de tăiere a filtrului Butterworth. Frecvența, de pe axa orizontală din figură, este normată la frecvența de tăiere. ϵ_1 reprezintă diferența dintre pătratele modulelor răspunsurilor în frecvență ale filtrelor trece jos ideal și Butterworth. Valoarea acceptată pentru această eroare fixează valoarea benzii în care este valabilă aproximarea, ω_p . Aceasta poate fi considerată drept bandă de trecere a filtrului Butterworth. Așa după cum se constată din analiza figurii pe măsură ce ordinul filtrului n crește, crește și banda de trecere a filtrului. Banda de blocare a filtrului (la dreapta lui ω_s) este fixată prin intermediul valorii ϵ_2 . Și banda de blocare crește cu creșterea lui n . Între benzile de trecere și de blocare (între frecvențele ω_p și ω_s) se găsește banda de tranziție a filtrului Butterworth. Se constată că banda de tranziție se îngustează odată cu creșterea ordinului filtrului. Deci trecerea din banda de trecere în banda de blocare se face

tot mai abrupt pe măsură ce crește ordinul filtrului Butterworth.

Aproximarea de tip Cebâșev

Se obține un filtru trece jos cu răspunsul în frecvență $H_C(\omega)$, cu proprietatea:

$$|H_i(\omega) - H_C(\omega)| \approx \min_{H(\omega)} \left\{ \max |H_i(\omega) - H(\omega)| \right\} \quad |\omega| \leq \omega_T$$



Cea de a doua caracteristică a filtrelor trece jos ideale este trecerea bruscă din banda de trecere în banda de blocare. Aproximarea acestei caracteristici se face cu ajutorul polinoamelor Cebâșev. Folosind aceleași notații ca în cazul aproximării de tip Butterworth pentru filtrul trece jos ideal și pentru filtrul generic, aproximarea de tip Cebâșev folosește criteriul din ecuație. Răspunsul în frecvență al filtrului de tip Cebâșev se notează cu $H_C(\omega)$. Dintre toate filtrele realizabile, filtrul Cebâșev minimizează maximul modulului diferenței dintre răspunsurile în frecvență ale filtrului trece jos ideal și al filtrului realizabil în banda de trecere ω_T . Spre deosebire de filtrul Butterworth, răspunsul în frecvență al filtrului Cebâșev nu mai este maxim plat în banda de trecere. El are niște oscilații (așa cum se vede în figură, unde este reprezentat modulul răspunsului în frecvență al unui filtru Cebâșev de ordinul 5). Diferența dintre valorile maximă și minimă ale acestor oscilații în banda de trecere ne dă maximul modulului diferenței $H_i(\omega) - H(\omega)$. Minimizarea acestui maxim se face la o valoare impusă, care caracterizează tipul de filtru Cebâșev. Dacă valoarea impusă este de 0,5 dB atunci vorbim despre un filtru Cebâșev de 0,5 dB. Analizând figura se constată că într-adevăr trecerea din banda de trecere în banda de blocare se face foarte abrupt în cazul filtrului Cebâșev.

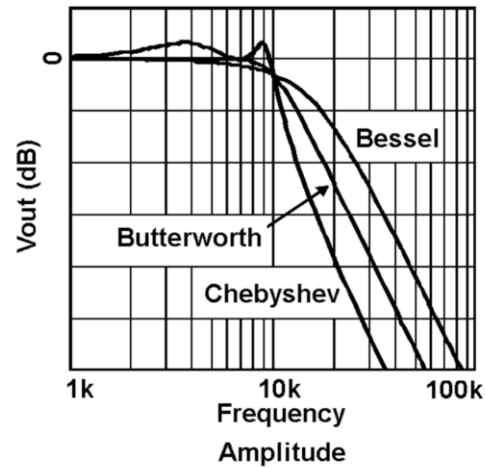
Aproximarea de tip Bessel

Se obține un filtru trece jos cu răspunsul în frecvență $H_{Be}(\omega)$, cu proprietatea:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\arg \{ H_{Be}(\omega) \} \right] \approx \text{const.}$$

$$\Phi_{t_0}(\omega) = -\omega t_0$$

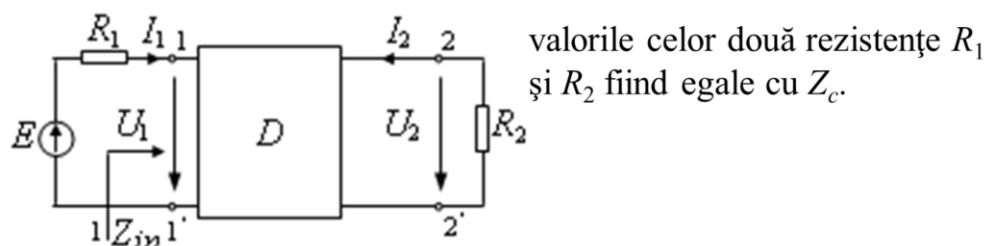
fază liniară



Cea de a treia caracteristică de interes a filtrelor trece jos ideale este liniaritatea caracteristicii de fază. Această caracteristică poate fi aproximată cu ajutorul aproximării de tip Bessel. Notând cu $H_{Be}(\omega)$ răspunsul în frecvență al filtrului Bessel, criteriul de aproximare al fazei liniare este prezentat în ecuație. În membrul stâng al ecuației apare întârzierea de grup introdusă de filtru. Aproximarea de tip Bessel realizează o întârziere de grup aproximativ constantă. Filtrele cu fază liniară sunt frecvent utilizate în prelucrarea imaginilor.

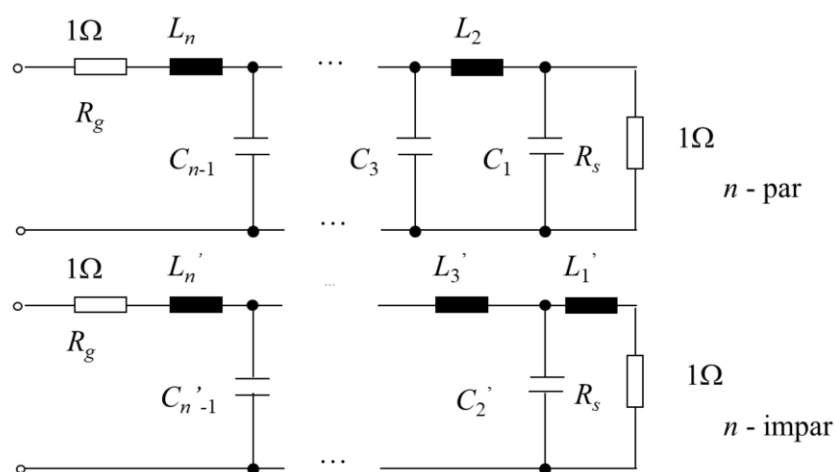
Filtre pasive în scară

Filtrele de tip Butterworth, Cebâșev sau Bessel pot fi implementate pe baza funcțiilor lor de transfer, cu ajutorul unor rețele pur reactive conectate între terminații neideale. În telecomunicații, aceste filtre se conectează pe linii de impedanță caracteristică cunoscută, Z_c . Considerând această impedanță pur rezistivă, conectarea filtrului pe linie se face după modelul din figură:



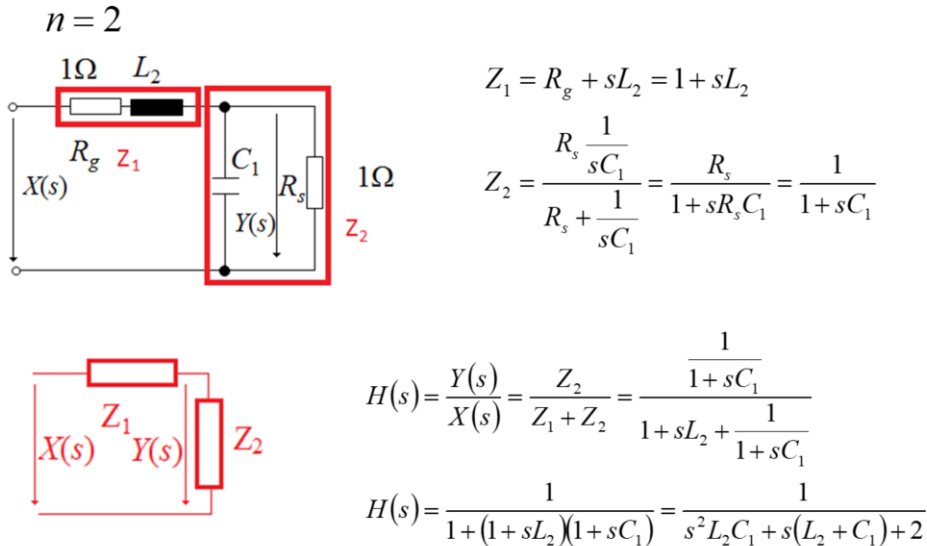
O categorie de filtre des utilizate în practică este constituită de filtrele pasive. Filtrele pasive sunt construite cu dispozitive pasive : rezistoare, condensatoare și bobine. Ele se folosesc atât la frecvențe joase (de exemplu filtrele de rețea folosite pentru protecția rețelei de alimentare cu energie electrică de emisiile parazite de frecvență mai ridicată ale echipamentelor electronice) cât și la frecvențe mai înalte (de exemplu în televiziune). Și în cazul filtrelor pasive se folosesc aproximările de tip Butterworth, Cebâșev sau Bessel. De obicei se proiectează inițial niște filtre trece jos prototip având funcții de transfer normalizate în frecvență și impedanță, apoi se face denormalizarea de frecvență și impedanță obținându-se filtre trece jos cu frecvența de tăiere dorită terminate între impedanțe de valoare dorită, după care, folosind transformări de frecvență și de reactanță se obțin filtrele de tip trece sus sau trece bandă sau oprește bandă dorite. În telecomunicații se folosesc rețele pur reactive conectate pe linii de transmisiuni de impedanță Z_c cunoscută. Dacă considerăm că impedanța liniei este pur rezistivă atunci filtrul pasiv de tip rețea pur reactivă este un diport (notat cu D în figură) care se conectează pe linia de transmisiuni ca în figură. Cele două rezistoare R_1 și R_2 au rezistența egală cu Z_c .

Pentru proiectarea acestor filtre se utilizează prototipuri normalizate în frecvență și în impedanță. Schemele unor filtre prototip normalizate în impedanță la valoarea $R_g = R_s = 1 \Omega$ și în frecvență la pulsația de 1 rad/s sunt prezentate în figură.



Așa după cum s-a amintit deja, pentru proiectarea unui filtru pasiv se folosesc prototipuri trece jos normalizate în frecvență la 1 rad/s și în impedanță la 1Ω . Acestea sunt rețele “în scară” de componente pur reactive (bobine și condensatoare). Există două tipuri de rețea în scară, reprezentate în cele două figuri, un tip corespunde unui filtru trece jos de ordin (n) par (figura de sus) iar cel de al doilea tip corespunde unui filtru trece jos de ordin impar (figura de jos). Cele două structuri sunt foarte asemănătoare (singura diferență structurală se referă la modul în care se cuplează rețeaua la sarcina R_s). În cazul lui n par, ultimul element al rețelei pur reactive este condensatorul C_1 . În cazul lui n impar, ultimul element al rețelei este bobina L_1' . Din punct de vedere al valorilor componentelor, acestea sunt diferite pentru valori diferite ale lui n . Valorile componentelor sunt tabelate pentru tipuri diferite de aproximare a răspunsului în frecvență al unui filtru trece jos ideal.

Exemplu de filtru trece jos de ordinul 2



Pentru $n=2$ se obține schema din figura de sus. Cele două impedanțe au formulele din dreapta sus. Schema echivalentă este prezentată în figura de jos. Este vorba despre un divizor a cărui funcție de transfer este dedusă în ecuațiile din dreapta jos. Se observă că s-a obținut într-adevăr un filtru trece jos de ordinul doi.

Butterworth										
n	C ₁	L ₂	C ₃	L ₄	C ₅	L ₆	C ₇	L ₈	C ₉	L ₁₀
	L ₁ '	C ₂ '	L ₃ '	C ₄ '	L ₅ '	C ₆ '	L ₇ '	C ₈ '	L ₉ '	C ₁₀ '
2	1,4142	1,4142								
3	1	2	1							
4	0,7654	1,8478	1,8478	0,7654						
5	0,6180	1,6180	2	1,6180	0,6180					
6	0,5176	1,4142	1,9319	1,9319	1,4142	0,5176				
7	0,4450	1,2470	1,8019	2	1,8019	1,2470	0,4450			
8	0,3902	1,1111	1,6629	1,9616	1,9616	1,6629	1,1111	0,3902		
9	0,3473	1	1,5321	1,8794	2	1,8794	1,5321	1	0,3473	
10	0,3129	0,9080	1,4142	1,7820	1,9754	1,9754	1,7820	1,4142	0,9080	0,3129

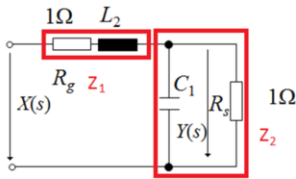
Cebășev										
n	C ₁	L ₂	C ₃	L ₄	C ₅	L ₆	C ₇	L ₈	C ₉	L ₁₀
	L ₁ '	C ₂ '	L ₃ '	C ₄ '	L ₅ '	C ₆ '	L ₇ '	C ₈ '	L ₉ '	C ₁₀ '
3	1,5963	1,0967	1,5963							
5	1,7058	1,2296	2,5408	1,2296	1,7058					
7	2,1666	1,1115	3,0926	1,1735	3,0936	1,1115	2,1666			
9	1,7504	1,2690	2,6678	1,3673	2,7239	1,3693	2,6698	1,2690	1,7504	

Bessel										
n	C ₁	L ₂	C ₃	L ₄	C ₅	L ₆	C ₇	L ₈	C ₉	L ₁₀
	L ₁ '	C ₂ '	L ₃ '	C ₄ '	L ₅ '	C ₆ '	L ₇ '	C ₈ '	L ₉ '	C ₁₀ '
2	1,5774	0,4226								
3	1,2550	0,5029	0,1972							
4	1,0598	0,5116	0,3181	0,1104						
5	0,9303	0,4577	0,8812	0,2090	0,0718					
6	0,8377	0,4116	0,3158	0,2364	0,1460	0,0505				
7	0,7677	0,3744	0,2844	0,2378	0,1778	0,1104	0,0375			
8	0,7125	0,3446	0,2735	0,2297	0,1867	0,1367	0,085	0,289		
9	0,6678	0,3703	0,2547	0,2184	0,1859	0,1506	0,1111	0,0682	0,0230	
10	0,6305	0,3008	0,2384	0,2066	0,1809	0,1539	0,1240	0,0911	0,0577	0,0187

În tabelul de sus sunt prezentate valorile capacităților și inductivităților pentru aproximarea de tip Butterworth pentru valori ale lui n cuprinse între 2 și 10. Se observă că pentru n=2, capacitatea C₁ și inductivitatea L₂ au valori identice și egale cu radical din doi. Și valorile din cazul n=3 sunt ușor de reținut, inductivitățile L₁' și L₃' au valoarea de 1 H iar capacitatea C₂' are valoarea de 2F. În cel de al doilea tabel sunt prezentate valorile capacităților și inductivităților pentru filtre de tip Cebășev de ordinele 3, 5, 7 și 9. În tabelul al treilea sunt prezentate valorile capacităților și inductivităților din cazul aproximării de tip Bessel pentru ordine cuprinse între doi și zece.

Exemplu: filtru trece jos de ordinul 2 tip Butterworth

$$n = 2$$



Butterworth

n	C ₁	L ₂
2	1,4142	1,4142

Funcția de transfer este

$$H(s) = \frac{1}{s^2 L_2 C_1 + s(L_2 + C_1) + 2} = \frac{1}{2s^2 + 2\sqrt{2}s + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\underbrace{s^2 + \sqrt{2}s + 1}_{H_1(s)}}$$

Rezultă răspunsul în frecvență:

$$\Rightarrow H_1(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\sqrt{2}\omega} \Rightarrow |H_1(\omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \omega^2)^2 + (\sqrt{2}\omega)^2}$$

$$\Rightarrow |H_1(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^4}$$

Acest răspuns în frecvență pt $n = 2$ este confirmat de definiția anterioară, dacă considerăm frecvența 1 rad/s

$$|H_{B_n}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \longrightarrow |H_{B_2}(\omega)|^2_{\omega_c=1, n=2} = \frac{1}{1 + \omega^4}$$

$H_1(\omega) \rightarrow$ filtru trece jos de tip Butterworth de ordinul 2 cu pulsația de tăiere 1 rad/s.

Denormalizarea în impedanță

Dacă se dorește proiectarea unui filtru trece jos pe o linie cu impedanța caracteristică diferită de 1, de exemplu cu impedanța caracteristică egală cu R , atunci valorile din structura noului filtru L_{k-nou} (L'_{k-nou}) și C_{k-nou} (C'_{k-nou}), se obțin din valorile vechiului filtru L_k și C_k , prin denormalizare în impedanță cu formulele:

$$L_{k-nou} = RL_k,$$

$$L'_{k-nou} = RL'_k,$$

$$C_{k-nou} = C_k / R,$$

și

$$C'_{k-nou} = C'_k / R,$$

Temă de curs: Proiectați un filtru pasiv trece jos de tip Butterworth de ordinul 2 cu pulsația de tăiere de 1 rad/s care să se conecteze pe o linie cu impedanța caracteristică de 50 Ω .

Filtrele trece jos prototip prezentate erau terminate pe rezistențe de 1 Ω și aveau frecvența de tăiere de 1 rad/s. Dacă se dorește obținerea unor filtre trece jos cu frecvența de tăiere de 1 rad/s care să lucreze pe rezistențe terminale de $R \Omega$ atunci trebuie realizată denormalizarea în impedanță a valorilor capacităților și inductivităților din schema filtrului trece jos prototip. Asta presupune înmulțirea valorilor inductivităților cu R și împărțirea valorilor capacităților cu R .

Denormalizarea în frecvență

Dacă se dorește proiectarea unui filtru trec jos cu pulsația de tăiere ω_s' , atunci valorile din structura noului filtru L_k'' și C_k'' , se obțin din valorile vechiului filtru L_k și C_k , prin denormalizare în frecvență cu formulele:

$$L_k'' = L_k / \omega_s'$$

$$C_k'' = C_k / \omega_s', \text{ pentru } n \text{ par și}$$

$$L_k'' = L'_k / \omega_s'$$

$$C_k'' = C'_k / \omega_s', \text{ pentru } n \text{ par.}$$

Temă de curs: Proiectați un filtru pasiv trece jos de tip Butterworth de ordinul 2 cu pulsația de tăiere de 100 rad/s care să se conecteze pe o linie cu impedanța caracteristică de 50 Ω .

Dacă se dorește proiectarea unui filtru trece jos terminat între rezistențe de 1 Ω dar care să aibă frecvența de tăiere de ω_s' rad/sec atunci trebuie făcută denormalizarea în frecvență a filtrului trece jos prototip, ceea ce presupune împărțirea valorilor capacităților și inductivităților din schema filtrului trece jos prototip la ω_s' .

În cazul în care se dorește obținerea unui filtru trece-jos care să lucreze între terminații de impedanță R Ω și care să aibă frecvența de tăiere de ω_s' rad/sec atunci trebuie făcute pe rând ambele denormalizări de impedanță și de frecvență.

Tabelul 7.1 Relațiile de normare și de denormare aplicate la filtre

Valoarea nenormată	ω	R	L	C
Relația de normalizare	$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_c}$	$R_n = \frac{R}{R_o}$	$L_n = \frac{\omega_c L}{R_o}$	$C_n = \omega_c C R_o$
Relația de denormalizare	$\omega = \omega_n \omega_c$	$R = R_n R_o$	$L = \frac{L_n R_o}{\omega_c}$	$C = \frac{C_n}{\omega_c R_o}$

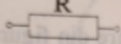
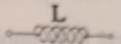
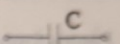
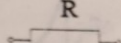
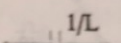
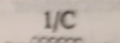
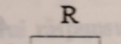
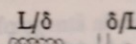
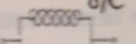
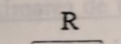
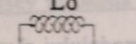
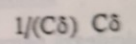
Transformări de frecvență și reactanță

Pornind de la filtre trece jos prototip, prin transformări de frecvență și reactanță, se pot obține filtre de tip trece sus, trece bandă sau oprește bandă prototip, din care, prin denormalizare de impedanță și frecvență, se pot obține filtre trece sus, trece bandă sau oprește bandă, cu orice frecvență de tăiere (centrală) și terminate pe orice rezistențe de valoare egală.

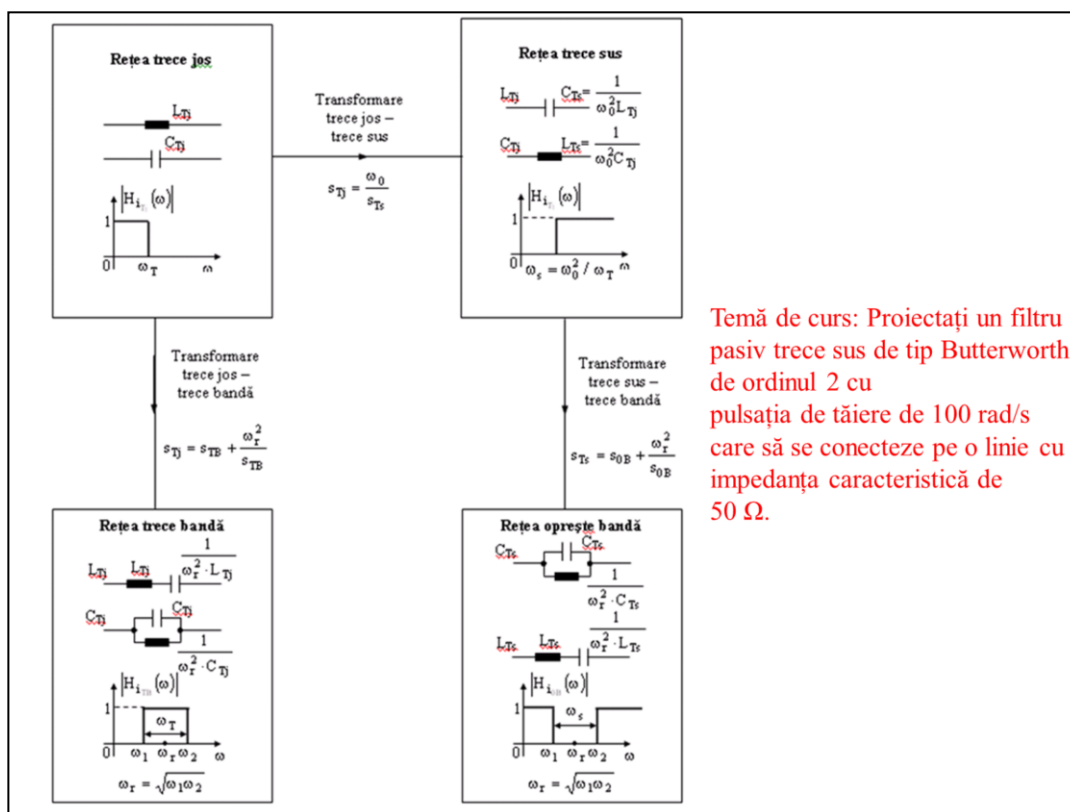
În cazul în care se dorește proiectarea unui filtru de tip trece-sus, trece-bandă sau oprește bandă de un anumit ordin, se proiectează în primul rând un filtru trece jos prototip și apoi se aplică transformări de frecvență și de reactanță obținându-se filtrul trece-sus, trece-bandă sau oprește bandă prototip de ordinul dorit. Apoi prin denormalizare de impedanță și de frecvență se ajunge la filtrul dorit.

Transformările de frecvență constau în schimbarea de variabilă în cadrul funcției de transfer a filtrului trece jos prototip. Noua funcție de transfer se obține din vechea funcție de transfer dacă se aplică transformări de reactanță componentelor din schema filtrului care corespunde vechii funcții de transfer.

Tabelul 7.2 Transformările elementelor FTJ pentru schemele de tip TS, TB și OB

Compo- nentele din filtrul :	Componenta din FTJ			
TS				
TB				
OB				

$$\delta = \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}}$$



Temă de curs: Proiectați un filtru pasiv trece sus de tip Butterworth de ordinul 2 cu pulsația de tăiere de 100 rad/s care să se conecteze pe o linie cu impedanța caracteristică de 50 Ω .

În figură se prezintă transformările de frecvență și de reactanță care permit trecerea de la un filtru trece jos cu frecvența de tăiere ω_T la un filtru trece sus cu frecvența de tăiere ω_S . ω_0 este un parametru. Transformările de reactanță corespunzătoare sunt: L_T se transformă în $C_T = 1/(\omega_0^2 L_T)$ iar C_T se transformă în $L_T = 1/(\omega_0^2 C_T)$.

În figură se prezintă și transformarea rețelei trece jos într-o rețea trece bandă. Transformarea de frecvență asociată este $s_T = s_B + \omega_r^2/s_B$. Ea transformă funcția de transfer a unui filtru trece jos cu frecvența de tăiere ω_T în funcția de transfer a unui filtru trece bandă cu frecvența centrală ω_r și cu banda de trecere cuprinsă între ω_1 și ω_2 . Transformările de reactanță corespunzătoare sunt următoarele: Bobina de inductivitate L_T din schema filtrului trece jos se înlocuiește în schema filtrului trece bandă cu un circuit LC serie în care bobina are inductivitatea L_T iar condensatorul are capacitatea de valoare $1/(\omega_r^2 L_T)$. Condensatorul de capacitate C_T din schema filtrului trece jos se înlocuiește cu un circuit LC paralel în schema filtrului trece bandă în care condensatorul are capacitatea C_T iar bobina are inductivitatea de valoare $1/(\omega_r^2 C_T)$. În sfârșit, un filtru oprește bandă se poate obține dintr-un filtru trece sus făcând schimbarea de frecvență $s_T = s_B + \omega_r^2/s_B$. Filtrul oprește bandă va avea frecvența centrală ω_r și capetele benzii de blocare ω_1 și ω_2 . Transformările de reactanță corespunzătoare sunt următoarele: Condensatorul de capacitate C_T din schema filtrului trece sus se înlocuiește cu un circuit LC paralel în schema filtrului oprește bandă în care condensatorul are capacitatea C_T iar bobina are inductivitatea $1/(\omega_r^2 C_T)$ iar bobina de inductivitate L_T din schema filtrului trece sus se înlocuiește cu un circuit LC serie în care

bobina are inductivitatea L iar condensatorul are capacitatea $1/(\omega^2 L^2)$.

Acum sunteți în măsură să proiectați o gamă largă de filtre analogice care funcționează corect într-o gamă largă de frecvență de la câțiva Herti până la câteva sute de Mhz și care nu consumă energie de la surse externe. Dezavantajul acestor filtre este că în special la frecvențe joase dimensiunile bobinelor și condensatoarelor sunt foarte mari și că nu există soluții de miniaturizare. Dacă se dorește realizarea unor filtre de dimensiuni mai mici atunci trebuie să recurgem la folosirea componentelor active (amplificatoare operaționale) și să proiectăm filtre active (vezi cursul de CIA sau să simulăm bobinele și condensatoarele cu ajutorul amplificatoarelor operaționale vezi bibliografia indicată la începutul semestrului II).