



Departamentul de Comunicații
UNIVERSITATEA POLITEHNICA
TIMIȘOARA

Facultatea de Electronică & Telecomunicații

Prelucrarea semnalelor

Facultatea de Electronica, Telecomunicatii, si
Tehnologii Informationale, UPT

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/>

1

În semestrul trecut am învățat metodele de analiză a semnalelor și sistemelor în domeniile timp și frecvență.

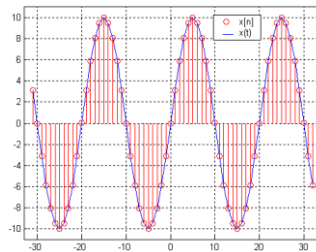
În acest semestru vom învăța

- câteva metode de analiză mai generale: transformata Laplace, transformata z
- câteva metode de prelucrare a semnalelor: eșantionarea, filtrarea și modulația.
- stabilitatea sistemelor analogice și digitale.

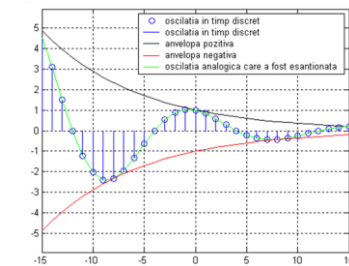
Transformarea Laplace

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap7.pdf>

Pierre Simon Laplace



Regim permanent – Transformata Fourier



Regim tranzitoriu – Transformata Laplace

2

Transformata Laplace reprezintă o generalizare a transformatei Fourier. Transformata Fourier poate fi utilizată pentru analiza de regim permanent a sistemelor liniare și invariante în timp. Transformata Laplace permite atât analiza de regim permanent cât și analiza de regim tranzitoriu. În figura din stânga se prezintă semnalul generat de un generator sinusoidal în regim permanent iar în figura din dreapta se prezintă semnalul generat de același generator în regim tranzitoriu de oprire.

- Transformarea Laplace bilaterala

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t), \sigma \in \text{DC}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt; s = \sigma + j\omega; \sigma, \omega \in \mathbb{R}$$

- Transformarea Laplace unilaterala

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \leftrightarrow \mathcal{X}(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt; \text{Re}\{s\} > \sigma_0$$

- Relatia dintre cele doua:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}_u\{x(-t)\}(-s)$$

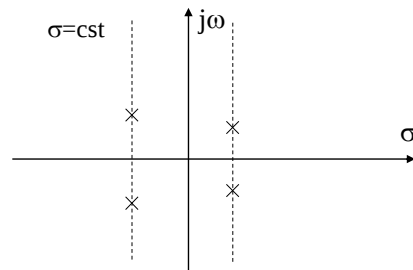
3

Cateva definitii folosite in acest capitol

Trasformata Laplace generalizează transformata Fourier în tot planul complex.

Pentru variabila complexă se utilizează notația:

$$s = \sigma + j\omega \quad \sigma \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$



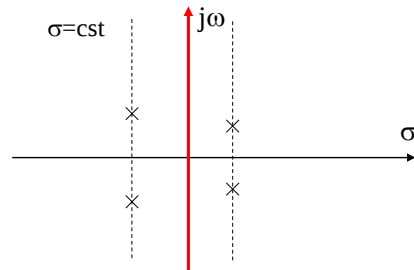
4

Transformata Laplace generalizeaza transformata Fourier in tot planul complex (s);
Partea reală a variabilei complexe s, se notează cu σ și este utilă pentru caracterizarea regimului tranzitoriu.

Partea imaginara se noteaza cu ω

În figură sunt reprezentate în planul complex 4 numere complexe, mai precis doua perechi complex conjugate, precum și dreptele de ecuație $\sigma = \text{ct}$, corespunzătoare acestor puncte.

Pentru $\sigma=0$ transformata Laplace este
spectrul semnalului adică transformata
Fourier.



5

Pentru $\sigma=0$, $s=j\omega$ și transformata Laplace devine transformata Fourier a semnalului

1. Răspunsul unui sistem liniar și invariant în timp la o exponențială cu exponent complex

Semnalul exponențială complexă, cu exponent complex:

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{\sigma_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t}, \quad (1.2)$$

se aplică la intrarea unui SLIT caracterizat prin răspunsul la impuls $h(t)$.

La ieșirea sistemului se obține semnalul:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{(\sigma_0 + j\omega_0)(t-\tau)} d\tau = \\ &= e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)\tau} d\tau = e^{s_0 t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \Big|_{s=s_0} \end{aligned}$$

În ipoteza că este convergentă, se notează cu $H(s)$ integrala:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-\sigma\tau} \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.3)$$

- depinde numai de $h(\tau)$,
- în anumite condiții caracterizează complet SLIT.

6

Transformata Laplace poate fi introdusă la fel ca și transformata Fourier, studiind răspunsul unui sistem liniar și invariant în timp la o exponențială complexă. În cazul transformatei Fourier s-a folosit o exponențială complexă cu exponent pur imaginar $\exp(j\omega_0 t)$.

În cazul transformatei Laplace se folosește o exponențială complexă cu exponent complex, $\exp(s_0 t)$.

Răspunsul $y(t)$ al SLIT :

$$y(t) = e^{s_0 t} \cdot H(s_0) = x(t) \cdot H(s_0) \quad (1.4)$$

care ne arată că : $-e^{s_0 t}$ este o funcție proprie a SLIT,
- $H(s_0)$ este valoarea proprie asociată ei.

Dacă semnalul de intrare este o combinație liniară de forma:

$$x(t) = \sum_k c_k e^{s_k t}, \quad (1.5)$$

rezultă :

$$y(t) = \sum_k c_k H(s_k) e^{s_k t}, \quad (1.6)$$

operatorul S care modelează sistemul fiind liniar.

Se poate vedea că o funcție $H(s)$ definită prin expresia (1.3) permite calculul răspunsului unui SLIT la care semnalul de intrare poate fi pus sub forma (1.5).

7

Semnalul de la ieșirea sistemului liniar și invariant în timp considerat este proporțional cu semnalul de intrare. În consecință exponențiala complexă cu exponent complex este funcție proprie pentru orice sistem liniar și invariant în timp continuu. Funcția $H(s)$ se numește funcție de transfer a sistemului. Pentru $\sigma=0$, $s=j\omega$ și $H(s)$ devine transformata Fourier a răspunsului la impuls, adică răspunsul în frecvență al sistemului. Într-adevăr transformata Laplace reprezintă generalizarea transformatei Fourier pentru $\sigma \neq 0$.

Valoarea sa în punctul s_0 reprezintă valoarea proprie asociată funcției proprii considerate.

Formula (1.6) ne permite să calculăm răspunsurile unui sistem liniar și invariant în timp la o clasă largă de semnale de intrare.

2. Transformarea Laplace bilaterală

Prin definiție transformata Laplace bilaterală a unui semnal $x(t)$ este:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt; \quad s = \sigma + j\omega; \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

Legătura între transformarea Laplace bilaterală și transformarea Fourier:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t) e^{-\sigma t}\}(\omega) \quad (1.8)$$

Transformata Laplace bilaterală a unui semnal $x(t)$ este transformata Fourier a semnalului $x(t)e^{-\sigma t}$.

Dacă $\sigma=0$, se obține:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \quad (1.9)$$

Transformata Laplace bilaterală evaluată pe axa imaginară $j\omega$ ($\sigma=0$) este egală cu transformata Fourier a aceluiași semnal.

8

Deci transformata Laplace reprezintă într-adevăr o generalizare a transformatei Fourier.

Notății:

În loc de a scrie $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, se scrie (din rațiuni tipografice) $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ și prin urmare: $\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$.

În continuare, vom nota cu $X(s)$ transformata Laplace bilaterală, tolerând două notații pentru transformata Fourier și anume $X(\omega)$ când este definită direct și $X(j\omega)$ când rezultă prin particularizarea transformatei Laplace bilaterale:

$$X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega) \equiv X(\omega) \quad (1.10)$$

Vom accepta din punct de vedere formal ultima identitate deși ea nu este corectă din punct de vedere matematic.

Example:

1.) Considerăm semnalul cauzal $x(t) = e^{-\omega_0 t} \sigma(t)$. Transformata sa Fourier există și este: $\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \frac{1}{\omega_0 + j\omega}$.

Transformata Laplace bilaterală a semnalului $x(t)$ este:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_0 t} \sigma(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} dt.$$

Integrala este convergentă numai pentru $\omega_0 + \sigma > 0$, deci $\sigma > -\omega_0$, care se mai scrie și $\text{Re}\{s\} > -\omega_0$. Avem deci:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{\sigma + \omega_0 + j\omega} = \frac{1}{\omega_0 + s}; \quad \sigma = \text{Re}\{s\} > -\omega_0. \quad (1.11)$$

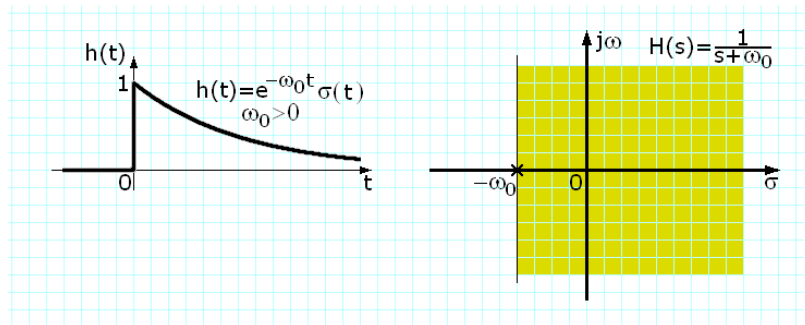
Se poate constata că, dacă $-\omega_0 < 0$ atunci dreapta $\sigma = 0$, axa imaginară, este în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale și:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = \frac{1}{\omega_0 + j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega), \quad \omega_0 < 0. \quad 10$$

Transformata Fourier a acestui semnal se găsește în tabelul de perechi semnal – transformată Fourier.

Se numește domeniu de convergență (DC) al unei transformate Laplace mulțimea valorilor lui s pentru care integrala din definiția transformatei Laplace este convergentă.

Deci în cazul în care axa imaginară a planului complex aparține domeniului de convergență al transformatei Laplace a unui semnal atunci acel semnal are și transformată Fourier.



11

Stanga: semnalul causal

Dreapta: domeniul de convergenta DC corespunzator

2.) Se consideră semnalul anticauzal din Fig.1.1, având expresia:

$$y(t) = -e^{-\omega_0 t} \sigma(-t), \quad \omega_0 > 0$$

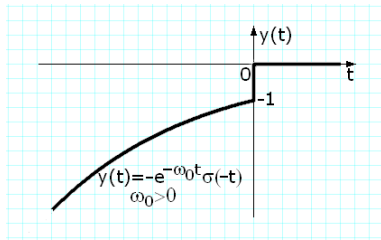


Fig.1.1 Semnal anticauzal, ce nu are transformată Fourier dar are transformată Laplace.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\omega_0 t} \sigma(-t) e^{-st} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

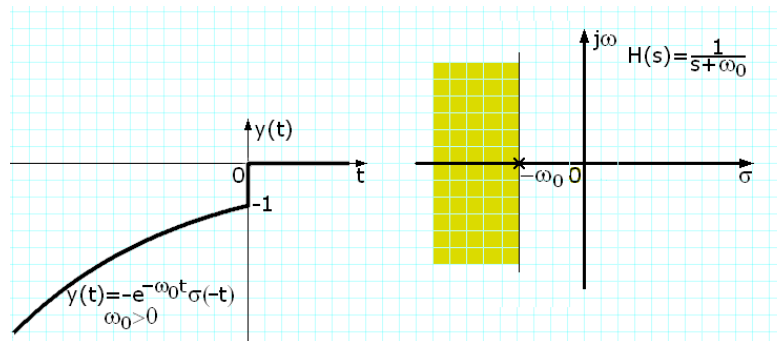
Pentru ca integrala să fie convergentă este necesar și suficient să avem $\omega_0 + \sigma < 0$ sau $\sigma < -\omega_0$. În aceste condiții:

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_{-\infty}^0 -e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t}}{\omega_0 + \sigma + j\omega} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{\omega_0 + s} \quad (1.12)$$

12

Semnalul considerat nu are transformată Fourier deoarece este strict crescător. Transformata sa Laplace se calculează pe baza definiției. Ținând seama de faptul că treapta unitară are valoarea 0 pentru t pozitiv, e suficient să integrăm doar până la 0. Integrala va fi convergentă dacă integrandul este descrescător. Pentru aceasta este necesar ca exponentul exponențialei să fie negativ. Având în vedere că t este negativ este deci necesar ca factorul care îl înmulțește în expresia exponentului să fie pozitiv. În consecință este necesar ca expresia din paranteză să fie negativă.

Din aceste prime două exemple se constată că două semnale diferite (unul cauzal și unul anticauzal) au aceeași transformată Laplace. Asta ne-ar putea face să credem că transformata Laplace nu este inversabilă. Diferența dintre cele două transformate Laplace rezidă din domeniile de convergență diferite. De aceea domeniul de convergență al transformatei Laplace este o informație foarte importantă.



$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_{-\infty}^0 -e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t}}{\omega_0 + \sigma + j\omega} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{\omega_0 + s}$$

13

Stanga: semnalul

Dreapta: domeniul de convergenta DC

2.1 Proprietățile domeniului de convergență (DC) al transformatei Laplace bilaterale

- I. DC al transformatei Laplace bilaterale, dacă există, este **format din benzi** ale planului s **paralele cu axa imaginară $j\omega$** .
- II. DC al transformatei Laplace bilaterale **nu poate conține nici un pol** al acesteia.
- III. Dacă $x(t)$ **are durată finită** și dacă există cel puțin o valoare s_0 din planul variabilei complexe pentru care transformata Laplace bilaterală converge, atunci domeniul de convergență este **întreg planul complex**.
- IV. Dacă $x(t)$ este un **semnal cu întindere spre dreapta** (Fig.1.2) și dacă dreapta de ecuație $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ este în domeniul de convergență, atunci toate punctele s din planul complex ce satisfac $\text{Re}\{s\} \geq \sigma_0$ sunt în domeniul de convergență. Semnalele cu întindere spre dreapta au **domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale cu întindere spre dreapta**.

14

I Domeniul de convergență al transformatei Laplace din exemplul 1 este un semiplan cu întindere infinită spre dreapta. Domeniul de convergență al transformatei Laplace din exemplul 2 este un semiplan cu întindere infinită spre stânga. Aceste semiplane sunt benzi din planul complex paralele cu axa imaginară.

II Transformatele Laplace din primele două exemple sunt funcții raționale. Rădăcinile numărătorului se numesc zerouri. Rădăcinile numitorului se numesc poli. E clar că polii transformatei nu pot aparține domeniului său de convergență deoarece atunci când s ia valoarea unui pol numitorul funcției de transfer se anulează și valoarea funcției de transfer devine infinită.

III În cazul semnalelor de durată finită integrala din definiția transformatei Laplace se calculează între două limite finite, ea devine o integrală obișnuită a unei funcții complexe, deci nu se mai pune problema convergenței transformatei Laplace.

IV. Așa după cum rezultă din exemplul I, domeniile de convergență ale transformatelor Laplace de semnale cauzale au întindere infinită spre dreapta.

V. Dacă $x(t)$ este un semnal cu întindere spre stânga (Fig.1.3) și dacă dreapta de ecuație $\operatorname{Re}\{s\}=\sigma_0$ este în domeniul de convergență, atunci toate punctele s din planul complex ce satisfac $\operatorname{Re}\{s\} \leq \sigma_0$ sunt în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale cu întindere spre stânga.

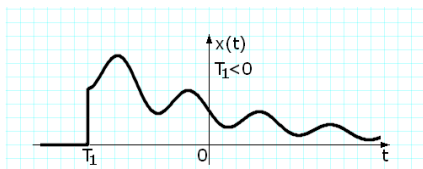


Fig.1.2 Semnal de durată infinită cu suportul nemărginit la dreapta.

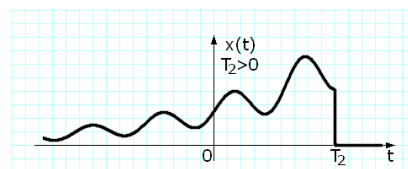


Fig.1.3 Semnal de durată infinită cu suportul nemărginit la stânga.

VI. Dacă suportul semnalului $x(t)$ este toată axa reală și dacă dreapta de ecuație $\operatorname{Re}\{s\}=\sigma_0$ este în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale, atunci DC al acesteia este o bandă paralelă cu axa imaginară, conținând dreapta $\operatorname{Re}\{s\}=\sigma_0$.

15

V. Așa după cum rezultă din exemplul 2, domeniile de convergență ale transformatelor Laplace ale semnalelor anticauzale au întindere infinită spre stânga.

VI. Dacă semnalul considerat are întindere infinită atât spre dreapta cât și spre stânga atunci el poate fi descompus într-o sumă de semnale dintre care primul este cu întindere infinită spre stânga iar cel de al doilea este cu întindere infinită spre dreapta. Domeniul de convergență al transformatei Laplace a primului semnal va avea întindere infinită spre stânga iar domeniul de convergență a transformatei Laplace a celui de al doilea semnal va avea întindere infinită spre dreapta. Domeniul de convergență al transformatei Laplace a semnalului considerat va fi deci intersecția a două semiplane unul cu întindere infinită la stânga iar celălalt cu întindere infinită la dreapta. Aceasta intersecție poate fi sau o bandă paralelă cu axa verticală sau mulțimea vidă.

În continuare se exemplifică și proprietățile III și VI.

Exemple:

1.) Semnalul de durată finită $x(t) = e^{-\omega_0 t} [\sigma(t) - \sigma(t-T)]$ are transformata Laplace bilaterală:

$$H(s) = \int_0^T e^{-(s+\omega_0)t} dt = \frac{1 - e^{-(s+\omega_0)T}}{s + \omega_0}$$

Zerourile transformatei sunt $s_{zk} = -\omega_0 + j(2k\pi/T)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Transformata are un singur pol $s_p = -\omega_0$, compensat de zero $k=0$, $s_{z0} = -\omega_0$. Așadar, $X(s)$ are ca DC tot planul complex.

2.) Semnalul de durată infinită, cu suportul confundat cu axa

reală $x(t) = e^{-\omega_0 |t|}$, $\omega_0 > 0$, se poate scrie sub forma:

$x(t) = e^{-\omega_0 t} \sigma(t) + e^{\omega_0 t} \sigma(-t)$, egalitatea fiind valabilă aproape peste tot (cu excepția punctului $t=0$).

16

Ecuția obținută egalând numărătorul cu zero poate fi scrisă astfel :

$$\exp(-(s+\omega_0)T) = 1$$

sau ținând seama că $\exp(j2k\pi) = 1$, rezultă că $s + \omega_0 = j2k\pi/T$ și deci zerourile transformatei sunt de forma specificată.

2) S-a descompus semnalul în două componente, una cu întindere infinită spre stânga și cea de a doua cu întindere infinită spre dreapta.

Semnalul cu întindere spre dreapta are transformata Laplace:

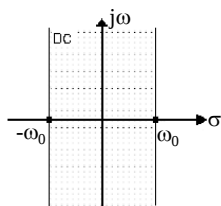
$$\mathcal{L}\{e^{-\omega_0 t} \sigma(t)\} = \frac{1}{s + \omega_0}, \quad \text{Re}\{s\} > -\omega_0$$

Semnalul cu întindere spre stânga are transformata Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{\omega_0 t} \sigma(-t)\} = -\frac{1}{s - \omega_0}, \quad \text{Re}\{s\} < \omega_0$$

În consecință:

$$\mathcal{L}\{e^{-\omega_0 |t|}\} = \frac{1}{s + \omega_0} - \frac{1}{s - \omega_0} = \frac{-2\omega_0}{s^2 - \omega_0^2}, \quad -\omega_0 < \text{Re}\{s\} < \omega_0$$



Dacă $\sigma=0$, rezultă:

$$\mathcal{F}\{e^{-\omega_0 |t|}\} = \frac{-2\omega_0}{(j\omega)^2 - \omega_0^2} = \frac{2\omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2}.$$

Fig.1.4 DC pentru transformata semnalului $\exp(-\omega_0 |t|)$.

17

Transformata Laplace este o transformare liniară. În consecință transformata Laplace a sumei este egală cu suma transformatelor Laplace ale termenilor. Transformatele Laplace ale celor doi termeni se pot calcula pe baza exemplelor 1 și 2.

Deoarece axa imaginară aparține domeniului de convergență al transformatei Laplace, semnalul considerat are și transformată Fourier care se poate particulariza din transformata Laplace dându-i lui s valoarea $j\omega$.

2.2 Transformarea Laplace inversă

Transformarea Laplace bilaterală directă este o transformare Fourier directă aplicată semnalului $x(t)e^{-\sigma t}$, σ fixat, deci pe o paralelă la axa $j\omega$.

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}(\omega) \quad (1.8)$$

Semnalul $x(t)e^{-\sigma t}$, σ fixat, poate fi recuperat prin transformarea Fourier inversă:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.13)$$

Integrala (1.13) se efectuează pe o **paralelă** dusă în planul s **la axa $j\omega$** ($\sigma = \text{constant}$ în raport cu ω , $ds = d(\sigma + j\omega) = jd\omega$),

18

La fel ca și transformata Fourier și transformata Laplace este inversabilă.

Transformata Laplace a semnalului $x(t)$ este identică cu transformata Fourier a semnalului $x(t)\exp(-\sigma t)$, care poate fi inversată.

Diferențiala lui s este proporțională cu diferențiala lui ω , deoarece σ se consideră constantă. Atunci când ω crește de la $-\infty$ la ∞ , s se deplasează pe dreapta paralelă cu axa imaginară care trece prin σ .

sau:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{j\omega t} ds$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t), \sigma \in \text{DC} \quad (1.14)$$

Integrala se efectuează pe o paralelă la axa imaginară conținută în DC.

Relațiile (1.7) și (1.14) definesc o pereche Laplace (bilaterală):

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad (1.15)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt; \quad s = \sigma + j\omega; \quad \sigma, \omega \in \mathfrak{R} \quad (1.7)$$

Pentru determinarea transformării inverse se folosește mai des metoda **descompunerii în fracții simple** și se caută funcțiile temporale în **tabele**.

19

Dacă trecem în prima relație de la variabila ω la variabila s , obținem relația (1.14). Utilizarea în practică a acestei ecuații este delicată, făcând apel la teorema reziduurilor. Din fericire, toate transformatele Laplace cu care vom avea de a face sunt funcții raționale, deci pot fi descompuse în fracții simple. Așa cum s-a văzut în primele două exemple de calcul a transformatei Laplace, s-au obținut fracții simple. De fapt, în tabelul de perechi semnal – transformată Laplace, apar fracții simple. În consecință vom putea inversa transformatele Laplace cu care vom avea de a face, prin descompunere în fracții simple.

Exemple:

1.) Se cere să se inverseze funcția $X(s)=1/[(s+2)(s+3)]$. Dacă DC nu este precizat problema este nedeterminată, având 3 soluții posibile.

În DC nu poate intra nici un pol. Se exclud așa cum se arată în Fig.1.5 dreptele $\sigma=-2$ și $\sigma=-3$. Se descompune $X(s)$ în fracții simple:

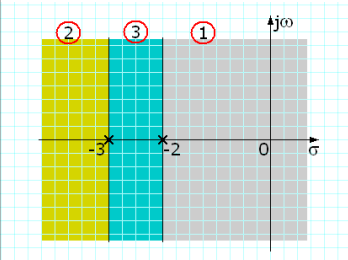


Fig.1.5 Cele 3 DC posibile pentru $X(s)=1/[(s+2)(s+3)]$.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}. \quad (1.16)$$

i) Dacă DC este 1, $\sigma > -2$, atunci fiecare termen al relației (1.16) va fi inversat într-un semnal causal:

$$\sigma > -2 : \frac{1}{s+2} \rightarrow e^{-2t} \sigma(t);$$

$$\sigma > -3 : \frac{1}{s+3} \rightarrow e^{-3t} \sigma(t)$$

Rezultă:

$$\sigma > -2 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \rightarrow (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot \sigma(t). \quad (1.17) \quad 20$$

Transformata Laplace din exemplul 1 este o funcție rațională. Primul lucru pe care trebuie să îl facem pentru a inversa $X(s)$ este să ghicim domeniul de convergență. Determinăm polii, rezolvând ecuația numitorul egal cu zero. Este o ecuație de gradul doi cu rădăcinile -2 și -3. Deoarece polii nu pot aparține regiunii de convergență, avem trei domenii de convergență posibile, la stânga lui -3, între -3 și -2 și la dreapta lui -2. Folosind tabelele de perechi semnal transformată Laplace, putem inversa $X(s)$ în fiecare dintre aceste cazuri.

Pentru primul domeniu de convergență (1) ambele fracții simple se inversează ca în exemplul 1.

ii) Dacă DC este 2, $\sigma < -3$, atunci fiecare termen al relației (1.16) se inversează prin câte un semnal anticauzal:

$$\sigma < -2 : \frac{1}{s+2} \rightarrow -e^{-2t}\sigma(-t); \sigma < -3 : \frac{1}{s+3} \rightarrow -e^{-3t}\sigma(-t)$$

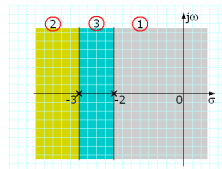


Fig.1.5

Rezultă:

$$\sigma < -3 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \rightarrow (-e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(-t). \quad (1.18)$$

iii) Dacă DC este 3, $-3 < \sigma < -2$ atunci rezultă:

$$\text{semnal anticauzal: } \sigma < -2 : \frac{1}{s+2} \rightarrow -e^{-2t}\sigma(-t);$$

$$\text{semnal cauzal: } \sigma > -3 : \frac{1}{s+3} \rightarrow e^{-3t}\sigma(t);$$

$$-3 < \sigma < -2 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \rightarrow -e^{-2t}\sigma(-t) - e^{-3t}\sigma(t). \quad (1.19)$$

21

Pentru cel de al doilea domeniu de convergență (2) ambele fracții simple se inversează ca în exemplul 2.

Pentru cel de al treilea domeniu de convergență (3) prima fracție simplă se inversează ca în exemplul 2 iar cea de a doua fracție simplă ca în exemplul 1.

Concluzii:

- Aceiași transformată Laplace bilaterală, (1.16) poate fi inversată în trei moduri distincte, după cum este ales DC.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}. \quad (1.16)$$

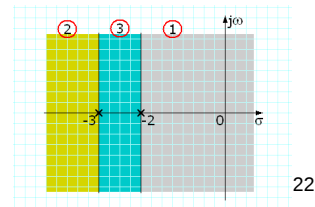
- Numai în cazul i) $j\omega \subset \text{DC}$ și, prin urmare, numai pentru semnalul (1.17) există transformata Fourier.

$$\sigma > -2 : x(t) = (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot \sigma(t).$$

- Semnalele (1.18) și (1.19) deși au transformate Laplace bilaterale, nu au transformate Fourier, axa imaginară nefiind inclusă în DC.

$$\sigma < -3 : x(t) = (-e^{-2t} + e^{-3t}) \sigma(-t).$$

$$\sigma > -2 : x(t) = (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot \sigma(t).$$



22

În urma inversării poate fi obținut un semnal cauzal (dacă se consideră domeniul de convergență 1), un semnal anticauzal (dacă se consideră domeniul de convergență 2) sau un semnal cu întindere de la $-\infty$ la ∞ (dacă se consideră domeniul de convergență 3). Doar primul semnal (cel cauzal) are și transformată Fourier.

2.3 Definirea transformatei Laplace bilaterale prin constelația de poli și zerouri

Dacă transformata Laplace bilaterală este o fracție rațională:

$$X(s) = K \frac{\prod_{k=1}^M (s - s_{0k})}{\prod_{k=1}^N (s - s_{pk})}, \quad (1.20)$$

se observă că este suficientă cunoașterea polilor s_{pk} și a zerourilor s_{0k} pentru a cunoaște, cu rezerva unei constante multiplicative K , pe $X(s)$. Dacă, în plus, se cunoaște și valoarea transformatei $X(s)$ într-un punct $s_0 \in DC$ poate fi determinată și constanta K .

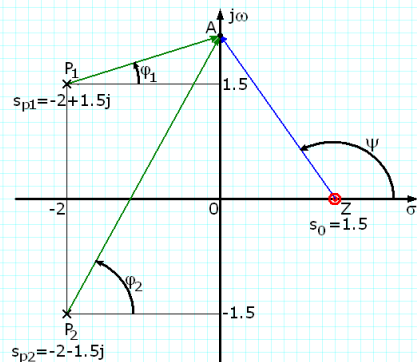
Polii și zerourile pot fi dați prin valorile lor complexe sau printr-o diagramă a “constelației” de poli și zerouri, CPZ.

23

Așa după cum s-a amintit deja, zerourile transformatei Laplace reprezintă rădăcinile numărătorului iar polii reprezintă rădăcinile numitorului.

Constelația de poli și zerouri reprezintă amplasarea în planul complex a polilor și zerourilor. Polii se reprezintă cu simbolul x iar zerourile cu simbolul o .

Exemplu de reprezentare a unei CPZ pentru o transformată Laplace bilaterală, $X(s)$.



$$X(s) = K \frac{s - 1,5}{(s + 2 - j1,5)(s + 2 + j1,5)},$$

$$X(s) = K \frac{s - 1,5}{s^2 + 4s + 6,25}$$

Dacă se specifică faptul că $x(t)$, semnalul temporal, este cauzal, atunci DC este $\sigma > -2$, situat la dreapta verticalei ce trece prin poli.

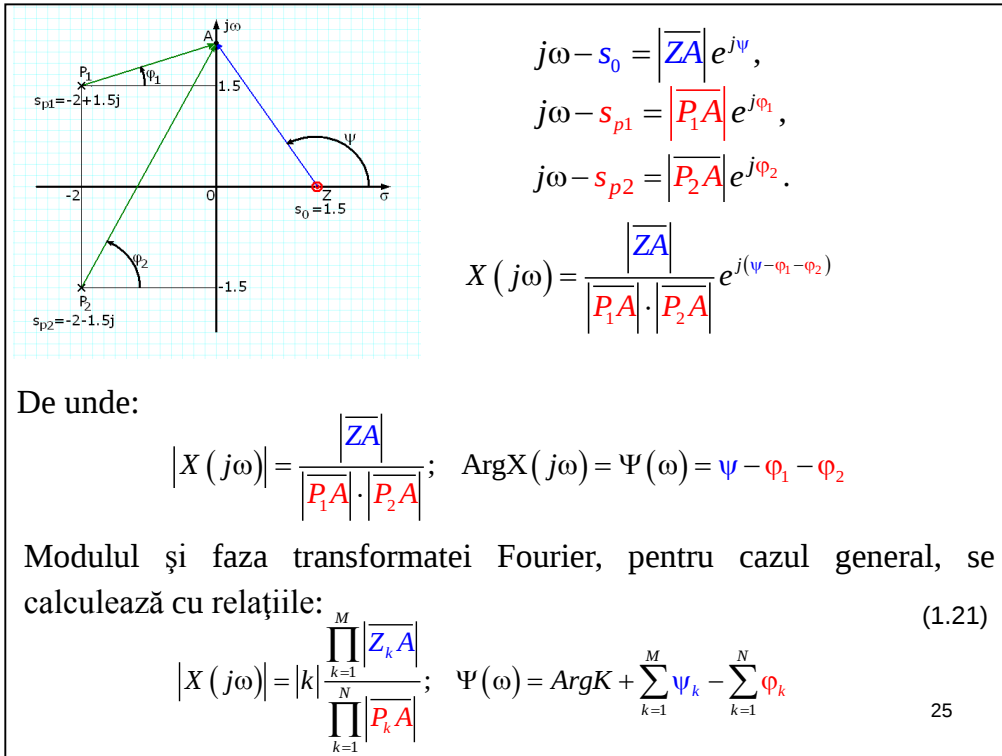
Axa $j\omega$ este inclusă în DC **există și transformata Fourier** a semnalului:

$$F\{x(t)\}(\omega) = \left. \frac{s - s_0}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})} \right|_{s=j\omega} = \frac{j\omega - s_0}{(j\omega - s_{p1})(j\omega - s_{p2})}.$$

Transformarea Fourier este particularizarea lui $X(s)$ for $s=j\omega$. Ea poate fi calculata pentru diferite valori ale ω . Pentru fiecare valoare, punctul A ia o pozitie diferita pe axa imaginara.

24

Pe constelația de poli și zerouri din figura polii sunt notați cu P1 și P2 iar zeroul este notat cu Z (s_0). Cu ajutorul constelației de poli și zerouri a transformatei Laplace a unui semnal poate fi determinată transformata Fourier a acestuia și aceasta poate fi reprezentată în planul complex (rezultând hodograful). Se consideră un punct mobil pe axa imaginară, notat în figură cu A. Pentru acest punct $s=j\omega$ și transformata Laplace se particularizează la transformata Fourier. Se reprezintă vectorii cu originile în poli și zero și cu vârful în A : P1A, P2A și ZA. Acești vectori formează cu axa reală unghiurile : ϕ_1 , ϕ_2 și ψ . Vectorul ZA reprezintă numărătorul transformatei Fourier a lui $x(t)$ la frecvența particulară corespunzătoare poziției curente a punctului A pe axa imaginară. Produsul vectorilor P1A și P2A reprezintă numitorul transformatei Fourier a lui $x(t)$ la frecvența particulară corespunzătoare poziției curente a punctului A pe axa imaginară. În consecință măsurând cei trei vectori (modul și unghi) poate fi determinată valoarea transformatei Fourier a semnalului $x(t)$ la frecvența corespunzătoare poziției curente a punctului A de pe axa imaginară. Amplasând punctul A în diferite puncte ale axei imaginare, se pot calcula mai multe valori ale transformatei Fourier a semnalului $x(t)$ și se poate trasa hodograful.



În consecință modulul transformatei Fourier la frecvența ω este egal cu raportul dintre modulul vectorului ZA și produsul modulelor vectorilor P1A și P2A iar argumentul transformatei Fourier a semnalului $x(t)$ la frecvența ω este egal cu diferența dintre unghiul ψ și suma unghiurilor φ_1 și φ_2 .

În cazul general, când avem M zerouri și N poli, se obține formula (1.21).

Transformarea Laplace unilaterala

Studiul sistemelor cauzale ce nu sunt initial in starea de repaus (nu au conditii initiale nule) se face utilizand transformarea definita prin relatia :

$$\mathcal{L}_u \{x(t)\}(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt.$$

Ea exista si este analitica in semiplanul $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ daca $x(t)$ satisface conditiile :

- i) Cauzalitate $x(t) \cdot \sigma(t) = x(t)$;
- ii) Continue cu exceptia eventual a unei multimi numarabile de puncte in care au discontinuitati de speta intai;
- iii) $|x(t)| \leq M e^{-\sigma_0 t}$, $M > 0$, $\sigma_0 \geq 0$,

26

spre deosebire de cazul transformatei Fourier sau al transformatei Laplace bilaterale, folosind transformata Laplace unilaterala pot fi rezolvate si probleme cu conditii initiale nenule, acesta fiind un motiv pentru care cu ajutorul transformatei Laplace unilaterale poate fi analizat si regimul tranzitoriu.

Transformarea inversa este definita de:

$$x(t) = \mathcal{L}_u^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds, \text{ Re}\{s\} > \sigma_0$$

pereche Laplace unilaterala:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} X(s)$$

3.1 Relatia dintre transformata Laplace bilaterala si transformata Laplace unilaterala

-Pentru cazul semnalelor **cauzale**, $x(t)=x(t)\sigma(t)$, intre cele doua transformate nu exista diferente :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sigma(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s)\end{aligned}$$

-Pentru semnale cu suportul plasat si in $t < 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 x(t) \cdot e^{-st}dt + \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}dt, \\ &= \int_0^{\infty} x(-t)e^{-(s)(-t)}dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \\ \mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}_u\{x(-t)\}(-s)\end{aligned}$$

28

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}_u\{x(-t)\}(-s)$$

Transformata Laplace bilaterala este suma dintre transformata Laplace unilaterala a semnalului si transformata Laplace unilaterala reflectata (-s) a semnalului reflectat (-t).

In cazul transformarii unilaterale, specificarea domeniului de convergenta nu este necesara.

Transformata unilaterala se refera nu mai la partea din dreapta originii a oricarui semnal si, deci, domeniul de convergenta va fi un semiplan delimitat de o dreapta paralela cu axa imaginara, ce trece prin polul plasat in extrema dreapta, intinzandu-se spre dreapta.

4. Transformarea Laplace a distribuțiilor

Transformata Laplace a unei distribuții $f \in \mathcal{S}'$ poate fi definită utilizând transformata ei Fourier:

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{F}\{e^{-\sigma t} f\} \quad (1.26)$$

Pentru **distribuția Dirac** $\delta(t)$ se aplică definiția sub forma:

$$\mathcal{L}\{\delta\} = \mathcal{F}\{\delta(t)e^{-\sigma t}\}$$

Pentru $\forall \sigma \in \mathbb{R}$, $e^{-\sigma t}\delta(t) = e^0\delta(t) = \delta(t)$ și, deci:

$$\mathcal{L}\{\delta\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (1.27)$$

Considerând **distribuția Dirac deplasată** $\delta(t-t_0)$ rezultă:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \mathcal{F}\{\delta(t-t_0)e^{-\sigma t}\} = e^{-s t_0}, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (1.28)$$

30

Transformata Laplace a distribuției f este identică cu transformata Fourier a distribuției obținută prin înmulțirea funcției exponențiale (care este continuă) cu distribuția f . În cazul distribuției Dirac, acest produs este egal tocmai cu distribuția Dirac. Întrucât transformata Fourier a distribuției Dirac este unitară și transformata sa Laplace va fi unitară. În cazul distribuției Dirac deplasate, produsul este egal cu exponențiala de argument $-\sigma t_0$ înmulțită cu distribuția Dirac deplasată. Primul factor iese factor comun deoarece se integrează după t iar cel de al doilea factor reprezintă transformata Fourier a distribuției Dirac deplasate (cărui i se aplică proprietatea de deplasare în timp a transformatei Fourier. În final se obține rezultatul din membrul drept al formulei (1.28).

Pentru **treapta unitară** $\sigma(t)$ se poate aplica direct definiția (1.7):

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt; \quad s = \sigma + j\omega; \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt.$$

Integrala este convergentă numai dacă $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, caz în care:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0. \quad (1.29)$$

Dacă treapta unitară este reflectată $x(t) = \sigma(-t)$, atunci:

$$\mathcal{L}\{\sigma(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(-t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = -\frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < 0.$$

și, deci:

$$\mathcal{L}\{-\sigma(-t)\} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < 0. \quad (1.30)$$

$$\mathcal{L}_u\{\delta\} = \mathcal{L}\{\delta\} = 1, \quad \mathcal{L}_u\{\sigma(t)\} = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}_u\{-\sigma(-t)\} = 0 \quad (1.31)_{31}$$

Primul membru al șirului de egalități din relația (1.31) reprezintă transformata Laplace unilaterală a distribuției Dirac. Transformata Laplace unilaterală (despre care vom vorbi pe larg ceva mai târziu) se definește ca integrală de la 0 la infinit. E clar că aceasta are valoarea 0 pentru treapta unitară reflectată (care este un semnal anticauzal).

5. Proprietati ale celor doua tipuri de transformate Laplace

Se noteaza:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad s \in \text{DC}_x; \quad x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} X(s)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) \quad s \in \text{DC}_y; \quad y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} Y(s)$$

1. Liniaritatea:

$$\begin{aligned} ax(t) + by(t) &\leftrightarrow aX(s) + bY(s) \quad s \in \text{DC}_x \cap \text{DC}_y \text{ cel putin} \\ ax(t) + by(t) &\leftrightarrow aX_u(s) + bY_u(s). \end{aligned} \quad (1.32)$$

2. Translatia in timp:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad s \in \text{DC}_x, \forall t_0, \quad (1.33)$$

Teorema intarzierii: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X_u(s) \quad t_0 > 0.$

3. Modularea in timp:

$$\begin{aligned} e^{s_0 t} x(t) &\leftrightarrow X(s - s_0) \quad s \in \text{DC deplasat cu } \sigma_0 \\ e^{s_0 t} x(t) &\leftrightarrow X_u(s - s_0). \end{aligned} \quad (1.34)$$

32

La fel ca și transformata Fourier și transformata Laplace are proprietățile de liniaritate, translație în timp și modulare în timp. Proprietățile se demonstrează aplicând definiția transformatei Laplace. În cazul transformatei Laplace trebuie specificat însă, de fiecare dată și domeniul de convergență. De exemplu, în cazul proprietății de liniaritate dacă domeniul de convergență al transformatei Laplace a semnalului x este DC_x și dacă domeniul de convergență al transformatei Laplace a semnalului y este DC_y atunci domeniul de convergență al transformatei Laplace a combinației liniare $ax + by$ va fi intersecția lui DC_x și DC_y . Câteva dintre aceste proprietăți sunt demonstrate în seminarul nr. 1 de PS, http://www.tc.etc.upt.ro/teaching/ps/1_laplace_2009.pdf

4. Scalarea variabilei timp:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), a \in \mathbb{R}^*, \frac{s}{a} \in \text{DC}. \quad (1.35)$$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_u\left(\frac{s}{a}\right), a > 0.$$

5. Teorema convolutiei:

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s)Y(s) \quad s \in \text{DC}_x \cap \text{DC}_y \text{ cel puțin.} \quad (1.36)$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X_u(s)Y_u(s).$$

6. Derivarare în timp:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) \quad s \in \text{DC cel puțin.} \quad (1.37)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_u(s) - x(0^+)$$

33

În cazul proprietății de derivare în timp apar diferențe între transformata Laplace bilaterală și transformata Laplace unilaterală. În cazul transformării Laplace unilaterale apare și valoarea inițială $x(0^+)$. În consecință, spre deosebire de cazul transformatei Fourier sau al transformatei Laplace bilaterale, folosind transformata Laplace unilaterală pot fi rezolvate și probleme cu condiții inițiale nenule, acesta fiind un motiv pentru care cu ajutorul transformatei Laplace unilaterale poate fi analizat și regimul tranzitoriu.

7. Derivarare in domeniul variabilei s:

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad s \in \text{DC.} \quad (1.38)$$

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX_u(s)}{ds}.$$

8. Integrarea semnalului in domeniul timp:

Fie $y(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * \sigma(t).$$

Se deduce:

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

Cum $(1/s)$ are DC $\text{Re}\{s\} > 0$ rezulta:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s} \quad s \in \text{DC} \cap (\text{Re}\{s\} > 0) \text{ cel putin} \quad (1.39)$$

$$\int_{0^+}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X_u(s)}{s} \text{ sau } \int_{0^+}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X_u(s) + x^{(-1)}(0^+)}{s}$$

daca exista un impuls in origine. $x^{(-1)}(0^+)$ - valorarea integralei in 34 origine.

În cazul transformatei Laplace unilaterale a integralei integrarea nu se mai face de la $-\infty$ la t ci doar de la 0 la t . Transformata Laplace unilaterală a integralei se poate calcula pe baza proprietății de derivare a semnalului $y(t)$, ținând seama de faptul că derivata integralei unui semnal este egală cu acel semnal. În relația (1.39) valoarea $y(0^+)$ s-a notat cu x la -1 de 0 . Și de această dată în calculul transformatei Laplace unilaterale se ține seama de valoarea inițială.

9. Teorema valorii initiale a unui semnal cauzal:

Pentru semnalul cauzal $x(t)=x(t)\sigma(t)$, cele doua transformate sunt identice $X(s)\equiv X_u(s)$.

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX_u(s) \quad (1.40)$$

10. Teorema valorii finale a unui semnal cauzal:

Semnalul $x(t)$ fiind cauzal: $x(t)=x(t)\sigma(t)$, avem: $X(s)\equiv X_u(s)$.

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (1.41)$$

35

În conformitate cu teorema valorii inițiale (proprietatea 9) valoarea lui $x(0^+)$ se poate calcula chiar dacă nu se cunoaște expresia analitică a acestui semnal dar se cunoaște expresia analitică a transformatei sale Laplace.

6. Studiul sistemelor liniare si invariante in timp prin intermediul transformarii Laplace

6.1 Functia de transfer a unui SLIT

Pentru un SLIT: $y(t)=h(t)*x(t)$.

Aplicand transformarea Laplace bilaterala rezulta:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s); \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s). \quad (1.42)$$



Fig.1.7a SLIT caracterizat de
raspunsul la impuls $h(t)$.



Fig.1.7b SLIT caracterizat de
functia de sistem $H(s)$.

Raspunsul la impuls caracterizeaza complet comportarea unui SLIT in domeniul timp, iar functia $H(s)$, caracterizeaza complet comportarea sa in domeniul complex.

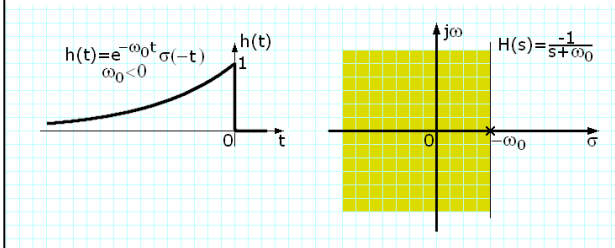
Denumiri pentru $H(s)$: - functie (de) sistem sau **functie de transfer**.

36

Transformata Laplace a răspunsului la impuls al unui sistem liniar și invariant în timp continuu, $h(t)$, se numește funcție de transfer a acelui sistem și se notează cu $H(s)$. Funcția de transfer a sistemului se calculează împărțind transformata Laplace a semnalului de ieșire la transformata Laplace a semnalului de intrare.

Consideram un **sistem SLIT stabil**. Atunci exista transformata sa Fourier $\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega) = \mathcal{L}\{h(t)\}(j\omega)$ si axa imaginara este inclusa in domeniul de convergenta al functiei sistem $H(s)$.

Exemplu: un sistem anticauzal



Conditia de convergenta:

$$\text{Re}\{s\} < -\omega_0$$

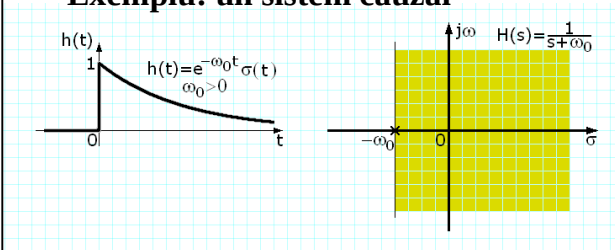
$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) = -1/(\omega_0 + j\omega)$$

Raspunsul la impuls $h(t)$ al unui sistem necauzal si functia sistem $H(s)$ impreuna cu domeniul de convergenta.

37

Exemple de sisteme stabile, unul cauzal si unul anticauzal

Exemplu: un sistem cauzal



Conditia de convergenta:
 $\text{Re}\{s\} > -\omega_0$

Raspunsul la impuls $h(t)$ al unui sistem cauzal si functia sistem $H(s)$ impreuna cu domeniul de convergenta.

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = 1/(\omega_0 + j\omega)$$

6.3 Sisteme liniare si invariante in timp caracterizate prin ecuatii diferentiale liniare cu coeficienti constanti

Fie SLIT caracterizat prin ecuatia diferentiala:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad a_0 \neq 0, \quad (1.52)$$

cu conditii initiale nenule.

Aplicand transformata Laplace bilaterala, rezulta:

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s). \quad (1.53)$$

Functia de transfer $H(s)=Y(s)/X(s)$:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (1.54)$$

39

Sistemele liniare și invariante în timp continuu (SLIT) sunt descrise prin ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. Forma generală a unei astfel de ecuații este prezentată în ecuația (1.52). Condițiile inițiale pot fi nenule. Aplicând în ambii membri ai ecuației diferențiale transformata Laplace bilaterală și ținând seama de proprietatea de derivare (transformata Laplace bilaterală a derivatei întâi este egală cu produsul dintre s și transformata Laplace a semnalului nederivat; transformata Laplace bilaterală a derivatei a doua este egală cu produsul dintre s la pătrat și transformata Laplace a semnalului nederivat, etc.) se obține ecuația (1.53). În membrul stâng se poate da factor comun $X(s)$ iar în membrul drept $Y(s)$. Funcția de transfer a sistemului se obține împărțind $Y(s)$ la $X(s)$, rezultând expresia din ecuația (1.54). Așa după cum se constată analizând ecuația (1.54), funcția de transfer a oricărui sistem liniar și invariant în timp continuu este o funcție rațională (un raport de polinoame în s). De aceea este ușor de inversat prin descompunere în fracții simple și folosirea tabelului de perechi semnal transformată Laplace bilaterală. În cazul în care sistemul este în regim tranzitoriu, ecuația are condiții inițiale nenule și se folosește transformata Laplace unilaterală.

Radacinile ecuatiei:

$$D(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0, \quad (1.55)$$

dau **polii sistemului**, s_{pk} , in numar de N , incluzand si ordinele de multiplicitate:

Radacinile ecuatiei:

$$N(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k = 0, \quad (1.56)$$

dau **zerourile sistemului**, s_{0k} , in numar de M , incluzand si ordinele de multiplicitate:

Se presupune ca sistemul este cauzal ($h(t)\sigma(t) = h(t)$), asadar: $H_u(s) = H(s) = \mathcal{L}_u\{h(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\}$.

Teorema valorii initiale a unui semnal cauzal, aplicata raspunsului la impuls (si el cauzal), conduce la:

$$h(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H_u(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sN(s)}{D(s)}. \quad (1.57)$$

40

În continuare ne referim la sisteme cauzale. Funcția de transfer a acestora este transformata Laplace unilaterală a răspunsului la impuls. De aceea putem folosi teorema valorii inițiale din ecuația (1.57).

Daca $h(0^+)$ este finit, deci nu exista impulsuri Dirac in origine, atunci se poate deduce ca $M+1 \leq N$. Tinand seama de forma expresie(1.54), avem:

$$h(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_M s^{M+1} + b_{M-1} s^M + \dots + b_1 s^2 + b_0 s}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Daca $M+1 > N$, atunci limita nu poate fi finita. Ramane, in consecinta: $h(0^+) < \infty$, $M+1 \leq N$, $M \leq N-1$.

Gradul numaratorului unei functii sistem ce nu are impulsuri Dirac in origine este cu cel putin o unitate mai mic decat al numitorului.

Daca $M+1 > N$ expresia lui $h(t)$ prezinta impulsuri Dirac in origine.

Exemplu:

$$H_u(s) = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1} \quad h(t) = \delta(t) + e^{-t} \sigma(t).$$

41

după cum se știe de semestrul trecut, pentru ca sistemul să fie stabil este necesar ca răspunsul său la impuls să fie de clasă L1.

Întrucât un răspuns la impuls care conține impulsuri Dirac nu este de clasă L1 rezultă că sistemele cauzale ale căror funcții de transfer au gradul numărătorului mai mare decât gradul numitorului nu sunt stabile.

In mod normal numarul polilor unei functii sistem intrece cu cel putin o unitate numarul zerourilor ei.

Polii unui **sistem stabil** sunt plasati doar in **semiplanul stang**, iar zerourile sale pot fi plasate oriunde.

Sistemele ce au atat **polii cat si zerourile plasate in semiplanul stang** se numesc **sisteme de faza minima**.

Exemplu. Fie: $h(t) = e^{-t}\sigma(t) \leftrightarrow H_u(s) = \frac{1}{s+1}$.

Raspunsul in frecventa al acestui sistem este:

$$H(\omega) = 1/(1 + j\omega), \quad |H(\omega)| = 1/\sqrt{1 + \omega^2}, \quad \Phi(\omega) = -\arctg\omega.$$

si fie sistemul cu raspunsul in frecventa:

$$H_{\omega_0}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \leftrightarrow h_{\omega_0}(t) = \frac{1}{\omega_0 - 1} \left[(\omega_0 + 1)e^{-t} - 2\omega_0 e^{-\omega_0 t} \right] \sigma(t),$$

42

pentru ca sistemul cauzal să fie stabil este necesar ca gradul numitorului funcției sale de transfer să fie mai mare (cu cel puțin 1) decât gradul numărătorului și toți polii să fie amplasați în semiplanul stâng. Zerourile pot fi amplasate oriunde în planul complex. Există o categorie specială de sisteme liniare și invariante în timp continuu, cauzale și stabile, așa numite de fază minimă, pentru care atât polii cât și zerourile sunt amplasate în semiplanul stâng. În continuare se justifică pe baza unui exemplu denumirea acestor sisteme.

Se consideră sistemul liniar și invariant în timp continuu cauzal cu răspunsul la impuls $h(t)$. Funcția sa de transfer este $H_u(s)$ iar răspunsul său în frecvență este $H(\omega)$. Această funcție de transfer are un singur pol în -1 (în semiplanul stâng). Comparăm acest sistem cu sistemul cu răspunsul în frecvență $H_{\omega 2}(\omega)$. Acesta este produsul dintre răspunsul în frecvență $H(\omega)$ și un alt răspuns în frecvență de modul unitar. Inversând răspunsul în frecvență $H_{\omega 2}(\omega)$ obținem răspunsul la impuls al celui de al doilea sistem, $h_{\omega 2}(t)$.

Se poate observa ca raspunsul in frecventa al celui de al doilea sistem are acelasi modul ca si sistemul caracterizat de $H(\omega)$.

Funcția sa faza-frecvență este:

$$\Phi_{\omega_0}(\omega) = -\arctg \omega - 2\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = \Phi(\omega) - 2\arctg \frac{\omega}{\omega_0}.$$

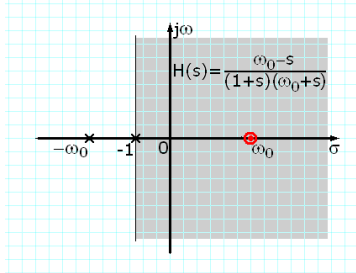


Fig.1.12 Funcție sistem și domeniul ei de convergență, DC.

Funcția sistem corespunzătoare lui $h_{\omega_0}(t)$:

$$H_{\omega_0 u}(s) = \frac{\omega_0 - s}{(1+s)(\omega_0 + s)}.$$

$$H_u(s) = \frac{1}{1+s}.$$

$$|H_{\omega_0 u}(s)| = |H_u(s)|, \quad \min\{\Phi_{\omega_0}(\omega)\} > \min\{\Phi(\omega)\}$$

$$\omega_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_{\omega_0}(\omega) = \Phi(\omega)$$

Prin urmare $H_u(s) = 1/(1+s)$ neavând nici un zero în semiplanul drept, corespunde unui sistem ce introduce un defazaj minim în comparație cu alte sisteme (cauzale) ce au aceeași caracteristică $|H(\omega)|$.

43

Caracteristica de fază a celui de al doilea sistem $\Phi_{\omega_2}(\omega)$ se obține scăzând din caracteristica de fază a primului sistem o arctangentă. Valoarea minimă a fazei celui de al doilea sistem este $-3\pi/2$ în timp e valoarea minimă a fazei primului sistem este $-\pi/2$. Deci în valoare absolută, defazajul introdus de cel de al doilea sistem este mai mare decât defazajul introdus de primul sistem. De aceea primul sistem se numește de fază minimă.

Contributia polilor unui sistem cauzal la raspunsul la impuls al acestuia

Funcția de sistem $H_u(s)$ (1.54) pentru un sistem cauzal,

$$H_u(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (1.54)$$

poate fi descompusa in fractii simple si pusa sub forma:

$$H_u(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}; \quad A_k = H_u(s)(s - s_{pk}) \Big|_{s=s_{pk}}, \quad (1.58)$$

daca toti polii sunt simpli. Forma lui $h(t)$ este atunci:

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} \right) \sigma(t). \quad (1.59)$$

Deosebim doua cazuri: i) poli reali $s_{pk} \in \mathbb{R}$ si ii) complecsi $s_{pk} \notin \mathbb{R}$.

Cum coeficientii a_k si b_k in ecuatia (1.54) sunt reali, rezulta ca polii complecsi nu pot aparea decat in perechi complex conjugate. 44

Pentru ca răspunsul la impuls din ecuația (1.59) să fie de clasă L1 este necesar ca toți termenii sumei din membrul drept să fie funcții descrescătoare de timp, adică părțile reale ale numerelor complexe s_k să fie negative. Cu alte cuvinte, polii funcției de transfer a unui sistem liniar și invariant în timp cauzal și stabil trebuie să se situeze în semiplanul stâng.

Poli simpli

$$H_u(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}; \longleftrightarrow h(t) = \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} \right) \sigma(t).$$

i) Poli reali, $s_{pk} = \sigma_k$: contributia este o exponentiala

$$A_k e^{\sigma_k t}$$

ii) Poli complex conjugati $\notin \mathbb{R}$: $s_{pk} = \sigma_k \pm j\omega_k$.

$$B_k e^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

Poli multipli de ordinul doi

$$H_u(s) = \dots + \frac{A}{s - s_p^r} + \frac{B}{(s - s_p^r)^2} + \frac{C}{s - s_p^i} + \frac{D}{s - s_p^{i*}} + \frac{E}{(s - s_p^i)^2} + \frac{F}{(s - s_p^{i*})^2} + \dots$$

i) Poli reali de ordinul doi:

$$s_p^r = \sigma_p : M_0 e^{\sigma_p t} + M_1 t e^{\sigma_p t}$$

ii) Perechea de poli complex conjugati

$$s_p^i = \sigma + j\omega, s_p^{i*} = \sigma - j\omega : N_0 e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi_0) + N_1 t e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

45

Se prezinta contributia la raspunsul la impuls al polilor simpli sau multipli de ordinul doi, reali sau complex conjugati.

În cazul în care există doi poli complex conjugați pe axa imaginară, contribuția lor în răspunsul la impuls din ecuația de mai sus este de tipul sinusoidă.

În consecință sistemul va fi stabil la limită, el va răspunde la intrări mărginite de durată limitată cu ieșiri mărginite.

Dacă un pol este amplasat în semiplanul drept, contribuția sa la răspunsul la impuls este o funcție crescătoare și sistemul este instabil.

Pentru un **sistem cauzal**, **stabilitatea stricta** este intodeauna asigurata daca **polii sunt in semiplanul stang**.

Poli **simpli** pe **axa imaginara** = sistem **stabil la limita**.

Pentru o singura pereche de poli complex conjugati plasati pe axa imaginara se obtine un oscilator sinusoidal.

Plasarea unui pol al unui sistem cauzal in **semiplanul drept**, chiar daca este simplu da nastere unui **sistem instabil**.

Polii plasati in semiplanul stang dau o componenta tranzitorie ce se amortizeaza.

Raspunsul permanent, ce se mentine cu aceleasi caracteristici in timp este contributia exclusiva a polilor simpli situati pe axa imaginara.

Calculul raspunsului unui si sistem caracterizat printr-o ecuatie diferentiala

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad a_0 \neq 0,$$

Exemplu: Se considera un sistem de tip cauzal, caracterizat de ecuatia diferentiala:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t),$$

Avand conditiile initiale $y(0^+) = 2$; $y'(0^+) = -2$. Fie $x(t) = 4\sigma(t)$. Se considera transformata unilaterala:

$$y(t) \leftrightarrow Y_u(s); \quad y'(t) \leftrightarrow sY_u(s) - y(0^+)$$

Prin derivare

$$(y')' = y'' \leftrightarrow s[sY_u(s) - y(0^+)] - y'(0^+).$$

47

Un exemplu de sistem in regim tranzitoriu, conditii initiale nenule: se foloseste transformata Laplace unitaterala

Transformarea Laplace a semnalului de intrare este:

$$4\sigma(t) \leftrightarrow \frac{4}{s}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t),$$

$$s[sY_u(s) - 2] + 2 + 3[sY_u(s) - 2] + 2Y_u(s) = \frac{4}{s}.$$

Se determina transformarea Laplace unilaterala a semnalului de iesire:

$$Y_u(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2}.$$

Se determina raspunsul sistemului:

$$y(t) = 2\sigma(t) - 2e^{-t}\sigma(t) + 2e^{-2t}\sigma(t) = (2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t})\sigma(t)$$

48

$$y(t) = 2\sigma(t) - 2e^{-t}\sigma(t) + 2e^{-2t}\sigma(t) = (2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t})\sigma(t)$$

Se pot verifica conditiile initiale:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t}) = 2 - 2 + 2 = 2.$$

Derivata de ordinul intai a raspunsului:

$$y'(t) = 2e^{-t} - 4e^{-2t}, \quad t > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2e^{-t} - 4e^{-2t}) = 2 - 4 = -2.$$

Sisteme de ordinul intai

$$\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0 y(t) = K\omega_0 x(t) \quad \omega_0 > 0 \quad (1.66)$$

$$H(s) = H_u(s) = \frac{K\omega_0}{s + \omega_0} \quad \text{Re}\{s\} > -\omega_0. \quad (1.67)$$

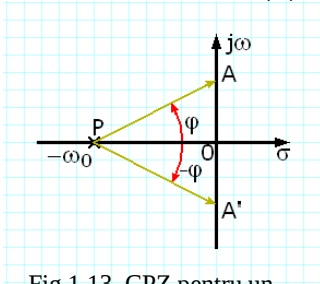


Fig.1.13. CPZ pentru un sistem de ordinul intai.

Sistemul:- este stabil, are raspunsul la impuls de tip exponential, polul fiind real.

Frecventa ω este definita de pozitia punctului A pe axa imaginara.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\overline{PA}|}; \quad \Phi(\omega) = -\varphi. \quad (1.68)$$

$$\omega \uparrow, |\overline{PA}| \uparrow \Rightarrow |H(\omega)| \downarrow$$

Caracteristica de **modul** este o functie **para**: $|\overline{PA'}| = |\overline{PA}|$.

$$\omega \uparrow, \varphi \uparrow (\varphi \rightarrow \pi/2) \Rightarrow \Phi(\omega) \downarrow (\Phi(\omega) \rightarrow -\pi/2).$$

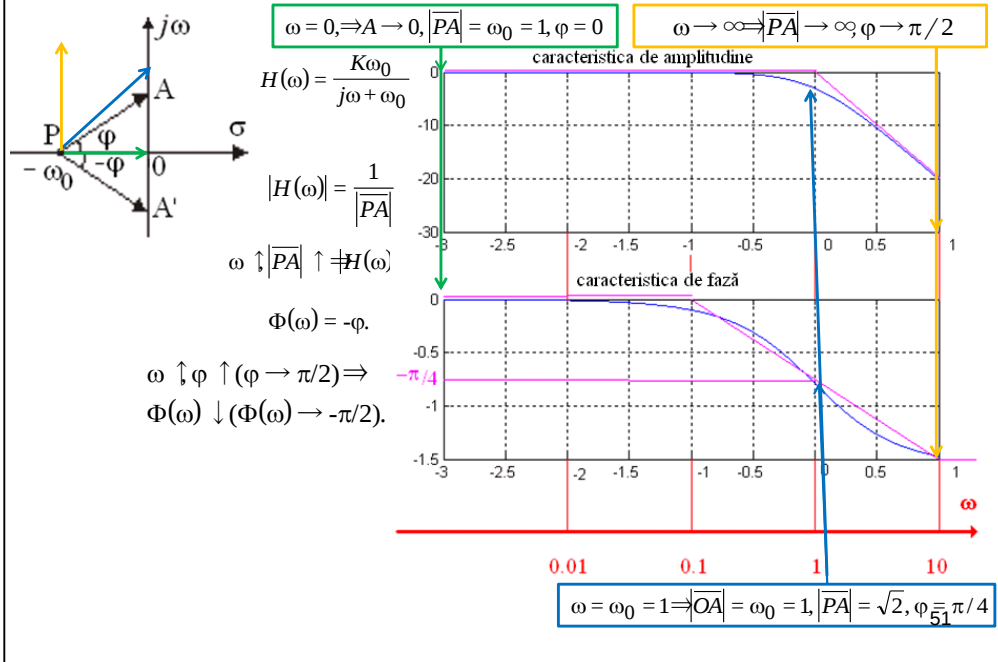
Caracteristica de **faza** este o functie **impara**.

50

Un sistem de ordinul întâi este descris de ecuația diferențială din relația (1.66) și are funcția de transfer din relația (1.67). Întrucât polul funcției de transfer ($-\omega_0$) este amplasat în semiplanul stâng, sistemul de ordinul I este stabil. Hodograful sistemului se poate construi pe baza figurii 1.13. La numitorul modulului răspunsului în frecvență apare lungimea vectorului PA. Argumentul răspunsului în frecvență este egal cu $-\phi$ (unghiul pe care îl face vectorul PA cu axa reală). Se observă că pe măsură ce frecvența crește, punctul A se deplasează în sus pe axa imaginară, lungimea vectorului PA crește și unghiul ϕ crește. În consecință modulul răspunsului în frecvență scade și argumentul său scade spre $-\pi/2$. Este deci vorba despre un filtru trece jos.

Caracteristici de frecvență

$K=1$ și $\omega_0=1$

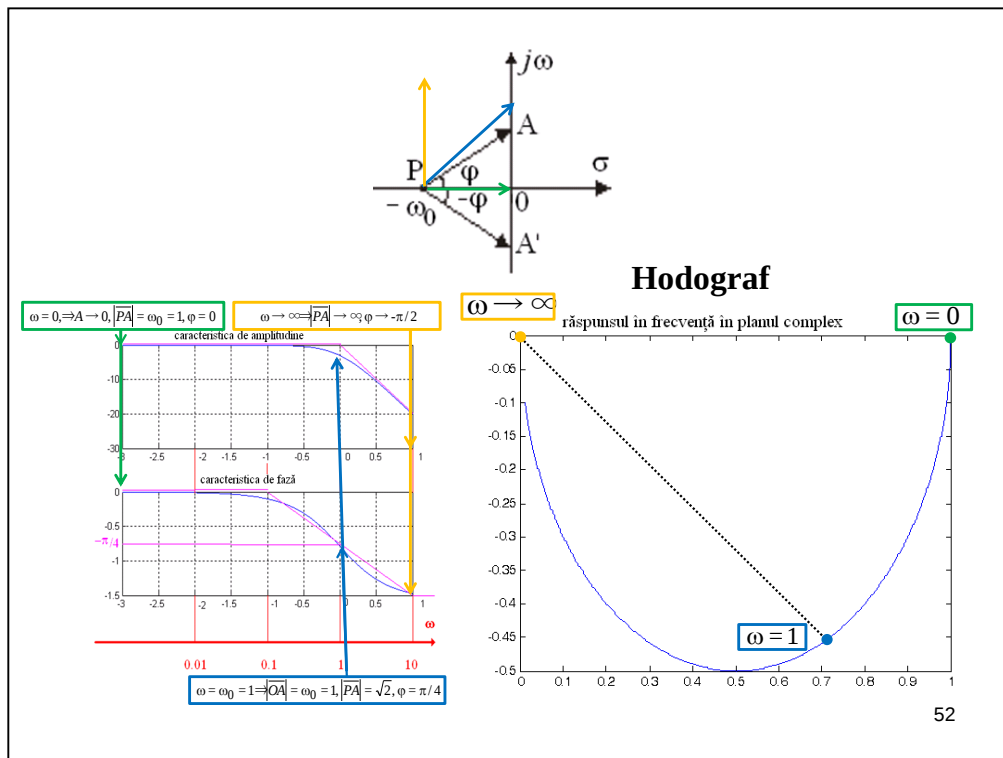


Se prezintă caracteristicile de frecvență pentru $K=1$ și $\omega_0=1$.

Când $\omega=0$, punctul A se află în origine, lungimea vectorului PA este egală cu $\omega_0=1$ și unghiul ϕ este egal cu zero. În consecință la $\omega=0$ avem $20\lg(H(0))=0$ dB și $\arg\{H(0)\}=0$.

Când $\omega=\omega_0$, triunghiul POA devine un triunghi dreptunghic isoscel și unghiul ϕ atinge valoarea de $\pi/4$. Lungimea ipotenuzei se calculează cu teorema lui Pitagora și este egală cu radical din 2. Valoarea modulului răspunsului în frecvență devine egală cu -3 dB.

Când ω tinde la infinit, vectorul PA devine paralel cu axa imaginară, unghiul ϕ ajunge egal cu $\pi/2$ și lungimea vectorului PA tinde la infinit. În consecință modulul răspunsului în frecvență în coordonate logaritmice tinde la $-\infty$ iar argumentul său tinde la $-\pi/2$. Caracteristicile Bode sunt reprezentate cu violet.



Rezultă hodograful din figură.

Sisteme de ordinul doi (Studiu individual)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 x(t), \quad H_u(s) = H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

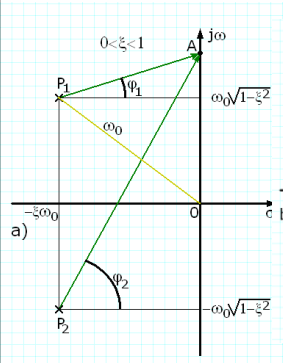


Fig.1.14 a) $\xi < 1$, CPZ pentru un sistem de ordinul doi avand o pereche de poli complex conjugati.

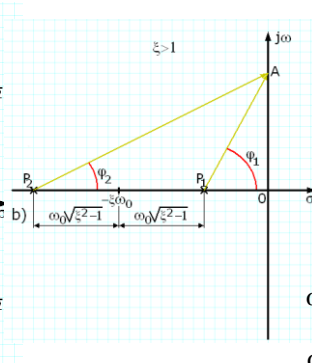


Fig.1.14 b) CPZ pentru un sistem de ordinul doi avand poli reali.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad \xi > 0$$

a) Frecventa de oscilatie: $\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
 $|\overline{OP_1}| = \omega_0$

Punctul A definește o frecventa:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\overline{P_1A}| \cdot |\overline{P_2A}|}; \quad \Phi(\omega) = -\varphi_1 - \varphi_2$$

$$\omega \rightarrow \infty, |\overline{P_1A}| \text{ si } |\overline{P_2A}| \rightarrow \infty \Rightarrow |H(\omega)| \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; \varphi_1 \text{ si } \varphi_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi(\omega) \rightarrow -\pi$$

b) $\xi > 1$, cei doi poli sunt plasati pe axa reala.

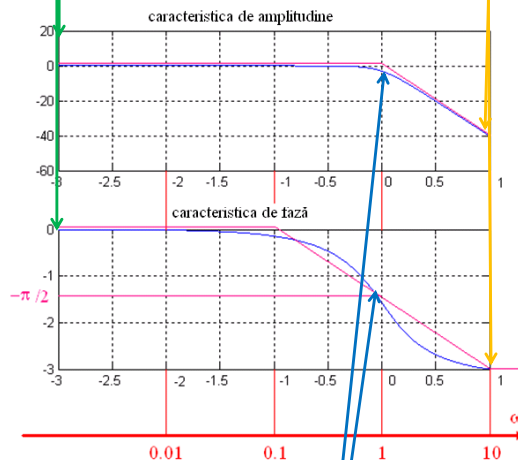
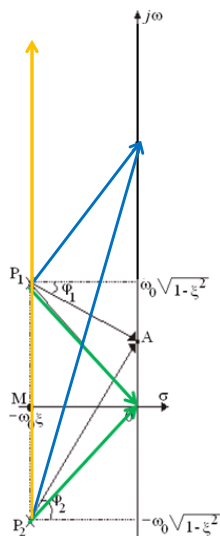
Daca $\xi = 1$, cei doi poli se confunda, in punctul $-\omega_0$ de pe axa reala.

Cazul polilor complex conjugati. Caracteristici de frecventa $\xi = 1/\sqrt{2}$ si $\omega_0 = 1$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|P_1 A| \cdot |P_2 A|}; \quad \Phi(\omega) = -\varphi_1 - \varphi_2$$

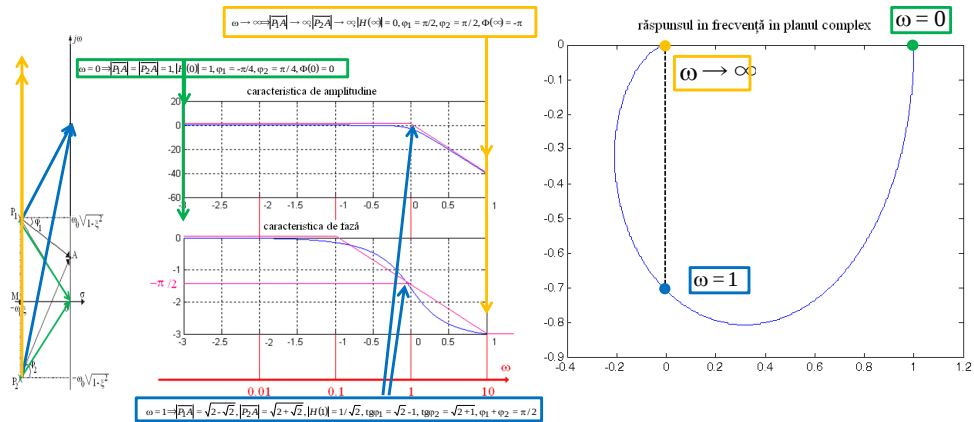
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |P_1 A| \rightarrow \infty, |P_2 A| \rightarrow \infty, |H(\infty)| = 0, \varphi_1 = \pi/2, \varphi_2 = \pi/2, \Phi(\infty) = -\pi$$

$$\omega = 0 \Rightarrow |P_1 A| = |P_2 A| = 1, |H(0)| = 1, \varphi_1 = -\pi/4, \varphi_2 = \pi/4, \Phi(0) = 0$$



$$\omega = 1 \Rightarrow |P_1 A| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, |P_2 A| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, |H(1)| = 1/\sqrt{2}, \tan \varphi_1 = \sqrt{2} - 1, \tan \varphi_2 = \sqrt{2} + 1, \varphi_1 = -\pi/4, \varphi_2 = \pi/4, \Phi(1) = -\pi/2$$

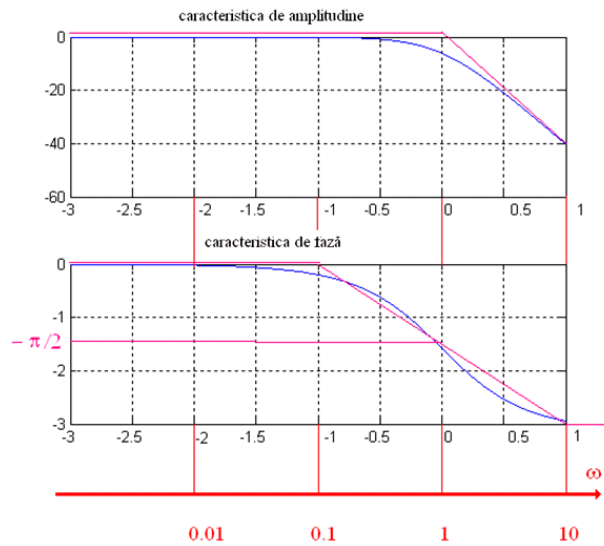
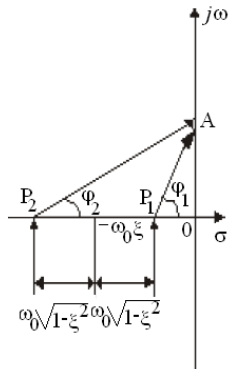
Hodograf



Cazul polilor reali. Caracteristici de frecventa

Daca $\xi=1$, apare un pol dublu in $-\omega_0$ pe axa reala.

Pentru $\omega_0 = 1$

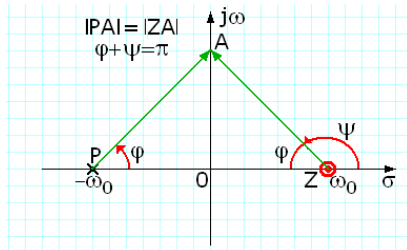


Tema de curs

Sistemul “trece tot”

$$H(\omega) = \frac{\omega_0 - j\omega}{\omega_0 + j\omega}.$$

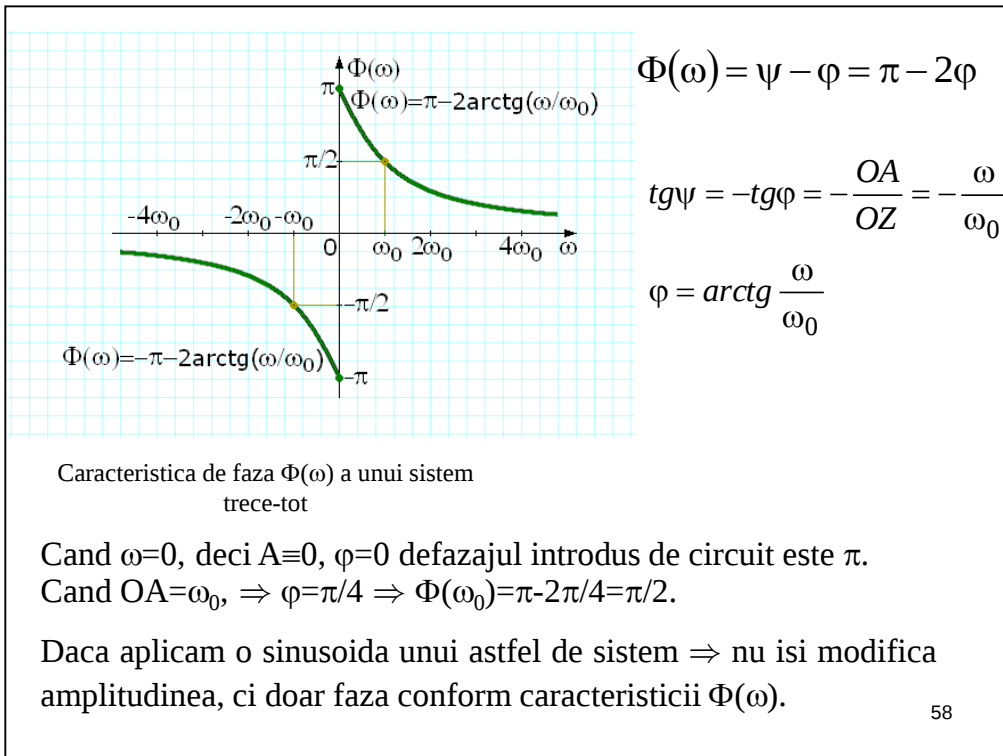
$$H_u(s) = H(s) = \frac{\omega_0 - s}{\omega_0 + s}.$$



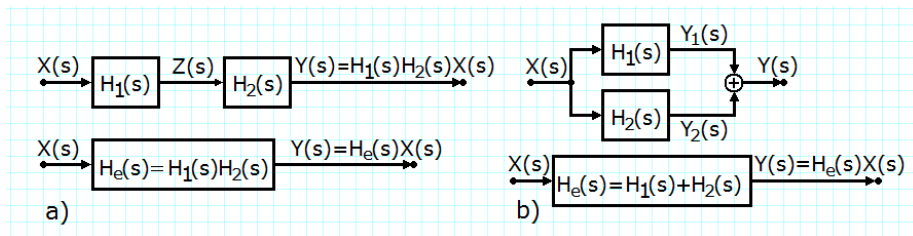
O sinusoida de orice frecventa, aplicata unui astfel de sistem trece fara ca amplitudinea ei sa fie afectata $\Rightarrow$ trece-tot.

PZC pentru un sistem trece-tot.

$$|H(\omega)| = \frac{|ZA|}{|PA|} = 1,$$



Funcția sistem echivalentă unor sisteme conectate în serie și paralel



a) Doua sisteme conectate în serie și sistemul echivalent.

$$h_e(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H_e(s) = H_1(s) \cdot H_2(s).$$

b) Doua sisteme conectate în paralel și sistemul echivalent.

$$h_e(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H_e(s) = H_1(s) + H_2(s).$$