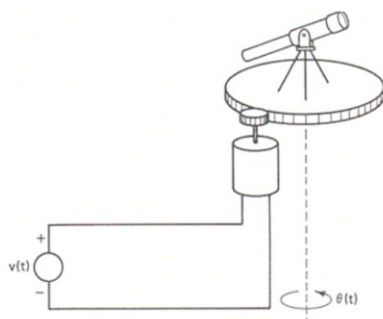


Stabilitatea sistemelor liniare si invariante in timp

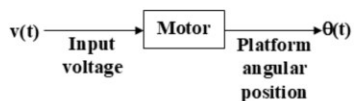
In continuare ne vom referi la sisteme liniare si
invariante in timp cauzale.

Rolul criteriilor de stabilitate este de a localiza amplasarea polilor funcției de transfer a sistemului analizat fără a rezolva ecuația numitorul funcției de transfer egal zero. Există două categorii de criterii de stabilitate : algebrice și topologice.

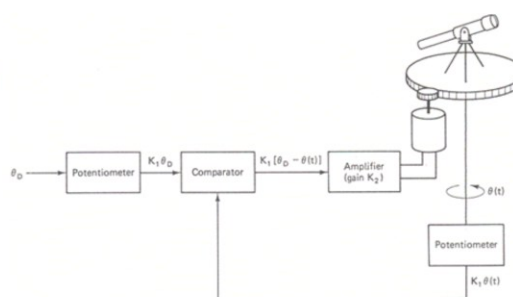
Analiza stabilitatii sistemelor cu reactie negativa



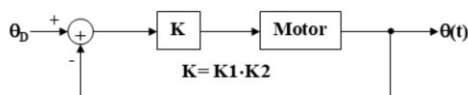
Motorul de curent continuu actioneaza platforma



Schema sistemului in bucla deschisa.

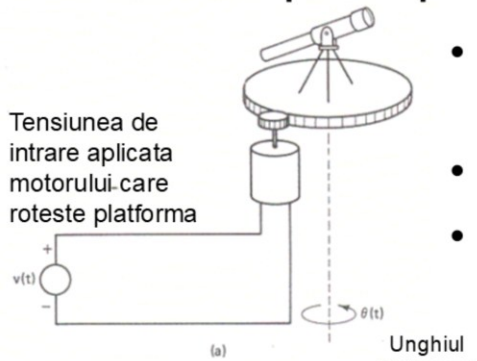


Sistem cu reactie pentru fixarea telescopului.

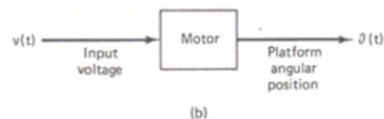


Schema sistemului in bucla inchisa.

Sistem ce mentine pozitia unghiulara a telescopului prin reactie (feedback)



- Motorul actioneaza platforma
- Unghiul ei este $\theta(t)$
- Schema sistemului in bucla deschisa



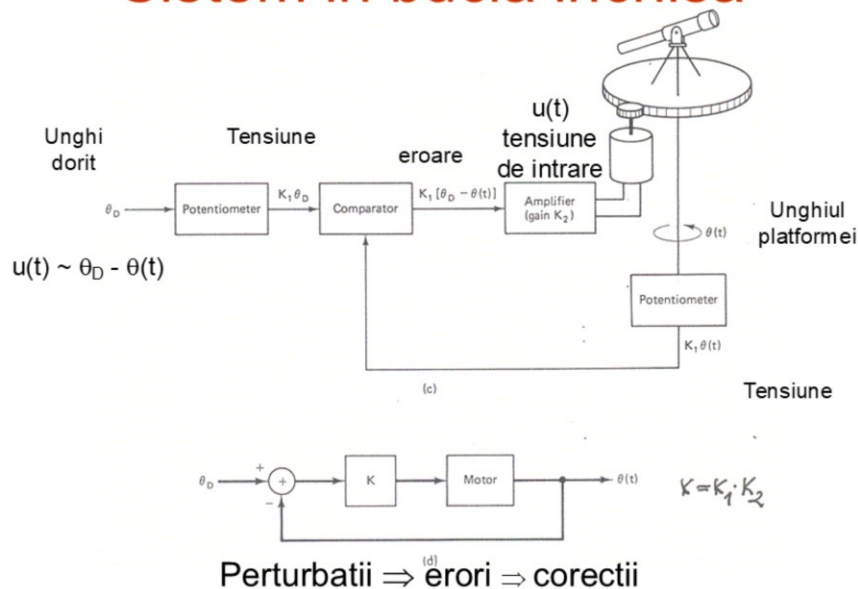
Reglajul fin este dificil de obtinut

Perturbatii (miscari ale platformei) $\Rightarrow$ nici o reactie

3

Luam ca exemplu un sistem electromecanic, un motor electric care trebuie sa mentina unghiul unei platforme pe care se afla un telescop (figura din stanga). Tensiunea $v(t)$ se aplica motorului de current continuu, ce roteste prin intermediul unui angrenaj, platforma. Unghiul (pozitia unghiulara) platformei este $\theta(t)$. Schema bloc a sistemului este reprezentata in figura din dreapta. Se aplica motorului o tensiune si motorul roteste platforma pana ce unghiul $\theta(t)$ are valoarea dorita. Reglajul fin al unghiului este dificil de obtinut. Pe masura ce ne apropiem de valoarea dorita a unghiului ar trebui ca motorul sa se roteasca mai incet (cu viteza unghiulara mai mica), pentru a nu risca depasirea pozitiei dorite.

Sistem in bucla inchisa



Se cunoaste doar unghiul dorit θ_D dar nu si structura sistemului cu reactie

O varianta mai buna pentru reglaj este cea din figura, cu schema bloc corespunzătoare. Aceasta este o schema cu reacție negativă. Tensiunea ce comanda motorul este proporțională cu diferența între unghiul dorit θ_D pentru platforma, și unghiul curent al platformei $\theta(t)$: $\theta_D - \theta(t)$. Unghiul dorit se fixează de la un potențiometrul ce furnizează tensiunea $K_1\theta_D$. Un al doilea potențiometrul ce se mișcă solidar cu platforma, furnizează tensiunea $K_1\theta(t)$. Cele două tensiuni se compară și se generează un semnal de eroare $K_1[\theta_D - \theta(t)]$. După amplificarea, acest semnal de eroare comanda motorul de curent continuu.

Primul sistem (pe slideul anterior) este în buclă deschisă; acest al 2-lea sistem este în buclă închisă. Un sistem în buclă deschisă dacă este perturbat, în sensul că platforma se rotește puțin, nu reacționează. Dacă însă sistemul în buclă închisă este perturbat, apare imediat un semnal de eroare ce corectează poziția platformei înlăturând astfel perturbația (nedorită). Nu este necesar la sistemul în buclă închisă să cunoaștem structura sistemului și nu trebuie să îl urmărim ca evoluție; este necesar să fixăm doar unghiul dorit.

Avantajele sistemelor in bucla inchisa

Insensibilitate la perturbatii,

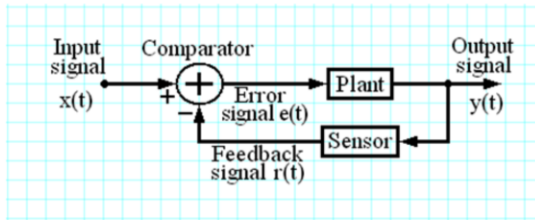
Nu e necesar sa avem cunostinte amanuntite despre sistem.

Aplicatii ale sistemelor in bucla inchisa

Controlul proceselor chimice,

Controlul temperaturii,

Sisteme aerospatiale.



Exemplu de sistem instabil, ce poate fi stabilizat prin reactie negativa.

5

Insensibilitatea sistemelor in bucla închisa la perturbații si faptul ca nu e necesar sa avem cunoștințe amănunțite despre sistem sunt doua dintre avantajele importante ale reacției (negative)

Sisteme analogice (cauzale)

- *stabilitate stricta*
 - Polii functiei de transfer situati in semiplanul stang
- *Stabilitate in sens larg*
 - Poli simpli pe axa imaginara $j\omega$, $\text{Re}\{s\}=0$

Sisteme digitale (cauzale)

- *stabilitate stricta*
 - Polii functiei de transfer situati in interiorului cercului unitar
- *Stabilitate in sens larg*
 - Poli simpli pe cercul unitar

6

Recapitularea stabilitatii pentru sisteme cauzale analogice respective digitale

Alte criterii pentru stabilitate BIBO

- Numitorul $Q(s)$ al funcției de transfer $H(s)=P(s)/Q(s)$ sa fie polinom Hurwitz

Polinomul $Q(s)$ cu coeficienti reali care are toate **radacinile in semiplanul stang** al planului complex.

se numeste **polinom strict Hurwitz**,

Daca are radacini **simple pe axa imaginara**, atunci este un **polinom Hurwitz in sens larg**.

Toti coeficientii unui polinom strict Hurwitz sunt strict pozitivi.

Toti coeficientii unui polinom Hurwitz in sens larg sunt pozitivi.

Aceste conditii nu sunt si suficiente.

7

Vom prezenta, fără demonstrație, un singur criteriu de stabilitate algebric, intitulat criteriul lui Hurwitz. Acesta ne permite să stabilim ce semn are partea reală a polilor funcției de transfer a sistemului analizat, pe baza calculului unor determinanți. În conformitate cu definiția de mai sus, un polinom cu coeficienți reali care are toate rădăcinile în semiplanul stâng al planului complex se numește polinom strict Hurwitz. Dacă există rădăcini simple pe axa imaginară polinomul se numește Hurwitz în sens larg. E suficient ca polinomul de la numitorul funcției de transfer a unui sistem liniar și invariant în timp continuu să fie (strict) Hurwitz pentru ca acel sistem să fie (strict) stabil.

Criteriul de stabilitate al lui Hurwitz

Conditia necesara si suficienta ca toate radacinile ecuatiei :

$$Q(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad a_0 > 0$$

sa aiba partea reala strict negativa este toti determinantii minori principali in diagonala ai determinantului Δ_n sa fie strict pozitivi.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Enunțul criteriului de stabilitate Hurwitz este cel de mai sus.

Există n minori principali în diagonală ai determinantului Δ_n .

$$\Delta_1 = a_1,$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \dots$$

Determinantul Δ_n are n linii si n coloane. Stricta pozitivitate a minorilor asigura stricta stabilitate a sistemului care are la numitorul functiei de transfer polinomul $Q(s)$.

Daca unul dintre minori este nul atunci sistemul este stabil in sens larg.

Daca unul dintre minori este negativ atunci sistemul este instabil.

Dacă unul dintre minori este nul atunci sistemul este stabil în sens larg. Dacă cel puțin unul dintre minori este negativ atunci sistemul este instabil.

Exemplu

Se analizeaza stabilitatea sistemului descris de ecuatia diferentiala:

$$\frac{d^5 y(t)}{dt^5} + \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 7 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 10 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2x(t)$$

cu conditii initiale nule. Functia de transfer a sistemului

$$H(s) = \frac{2}{s^5 + s^4 + 7s^3 + 4s^2 + 10s + 3}.$$

Coeficientii polinomului $Q(s)$ sunt:

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$ si $a_5 = 3$, strict pozitivi.

Sistemul s-ar putea sa fie stabil.

Se aplica criteriul lui Hurwitz, $n = 5$.

10

Acesta este un exemplu

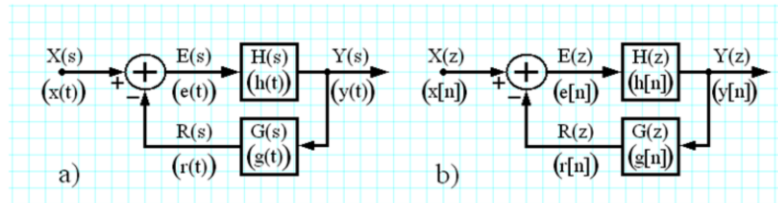
$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} . \text{ Minorii principali in diagonala :}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots = 5 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \dots = 8 > 0. \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 24 > 0.$$

$$\Delta_k > 0, k = \overline{1,5} \Rightarrow \text{sistem strict stabil}$$

Sisteme liniare cu reacție negativă



- Funcții sistem ale căii directe (Forward-path): $H(s)$ sau $H(z)$
- Funcții sistem ale căii inverse (Negative feedback, feedback path): $G(s)$ sau $G(z)$
- Funcții sistem în buclă deschisă (open loop): $H(s)G(s)$ sau $H(z)G(z)$
- Funcții sistem în buclă închisă (Closed loop) :

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)G(z)}$$

Sistemul în buclă închisă este strict stabil dacă :

- polii sunt în semi-planul stâng (sisteme analogice)
- polii sunt în interiorul cercului unitar (sisteme digitale)

12

Așa cum s-a învățat la cursurile anterioare, ca de exemplu Circuite electronice fundamentale, în electronică se folosesc numeroase sisteme liniare cu reacție negativă. Structura unui sistem liniar cu reacție negativă în timp continuu este prezentată în figura a) iar structura unui sistem liniar cu reacție negativă în timp discret este prezentată în figura b). Vom presupune în acest capitol ca sistemele sunt cauzale ca urmare a faptului ca reacția se aplica unor sisteme fizice.

Ambele scheme au câte 2 ramuri. Ramura de sus formează calea directă iar ramura de jos formează calea de reacție. Reacția se numește negativă deoarece semnalul de la ieșirea căii de reacție se scade din semnalul de intrare. Dacă se întrerupe reacția la cea de a doua intrare a sumatorului, atunci se obține un sistem în buclă deschisă. La intrarea sistemului în buclă deschisă se găsește semnalul x iar la ieșirea sa semnalul r .

Dacă sistemul în buclă deschisă este instabil, prin închiderea buclei de reacție se poate obține un sistem în buclă închisă (cu reacție) stabil. Acesta este unul dintre beneficiile reacției negative. Cu notațiile din figură putem stabili funcția de transfer a sistemului în buclă închisă. Folosind transformatele Laplace (respectiv z) ale semnalelor din figuri, putem scrie expresia transformatei Laplace (z) a semnalului de la ieșirea sumatorului ca $E=X-R$.

Transformata Laplace (z) a semnalului de la ieșirea sistemului de pe calea directă, care are funcția de transfer H , este $Y=EH$.

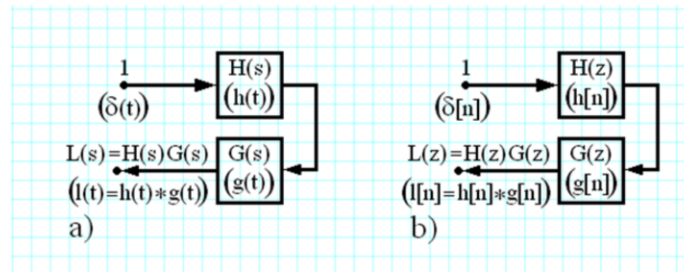
Transformata Laplace (z) a semnalului de la ieșirea sistemului de pe calea de reacție, care are funcția de transfer G , este $R=GY$. Substituind R se obține $E=X-GY$. Substituind această expresie a lui E în ecuația $Y=EH$ se obține $Y=(X-GY)H$.

Împărțind în ambii membri cu X se obține $Y/X=(1-GY/X)H$, sau $(Y/x)(1+GH)=H$, adică $(Y/X)=H/(1+GH)$, care reprezintă funcția de transfer a sistemului în buclă închisă notată aici cu Q .

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)} ; \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)G(z)}$$

- Produsul $H(s)G(s)$: funcția de transfer în buclă deschisă.
- Sistemul în buclă închisă este strict stabil dacă rădăcinile ecuației $1 + W(s) = 0$ au partea reală strict negativă.

- Sistem în buclă deschisă:



- Funcția de transfer în buclă deschisă

$$L(s) = H(s)G(s)$$

$$L(z) = H(z)G(z)$$

În buclă deschisă, $E=X$, $Y=HE=HX$, $R=GY=GHE$ adică $R=GHX$. Funcția de transfer în buclă deschisă este $(R/X)=HG$ și se notează cu L .

Deci la numitorul funcției de transfer în buclă închisă apare funcția de transfer în buclă deschisă.

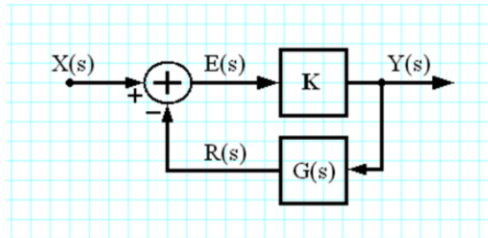
Cateva aplicatii si consecinte ale reactiei

Sistem Invers: Cunoscand sistemul direct $P(s)$; se doreste sintetizarea sistemului invers $1/P(s)$.

-sistem cu reactie in care: $H(s)=K$ (castigul) si $G(s)=P(s)$.

Funcția de transfer in bucla inchisa :

$$Q(s) = \frac{K}{1 + KP(s)}$$
$$\underset{\cong}{\underset{|KP(s)| \gg 1}{\frac{1}{P(s)}}}$$



Sistemul in bucla inchisa este chiar sistemul invers al $P(s)$, pentru o valoare suficient de mare a castigului K

14

Examinam câteva aplicații si consecințe ale reacției.

1- Obținerea sistemului invers: in anumite aplicații pentru un sistem $P(s)$ se dorește sintetizarea sistemului invers, $1/P(s)$. Vom considera sistemul cu reacție din figura, unde $H(s)=K$ iar $G(s)=P(s)$. Funcția sistem a sistemului cu reacție se poate scrie ca in prima relație; Daca facem câștigul (amplificarea) destul de mare, astfel încât $|KP(s)| \gg 1$, atunci $Q(s)$ devine $1/P(s)$. Se vede ca sintetizarea sistemului invers impune doar un câștig K suficient de mare fără ca valoarea sa efectiva sa fie importanta. Este posibila recurgerea la un amplificator operațional pentru realizarea câștigului K .

Exemplu

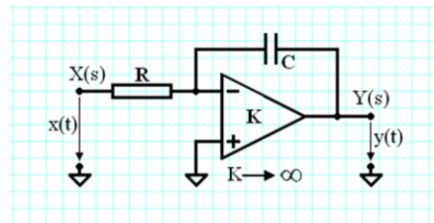
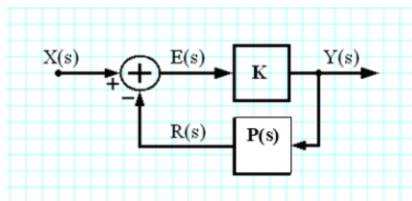
O valoare mare a câștigului K poate fi obținută cu ajutorul unui amplificator operațional.

Exemplu.

Sistemul direct: derivator implementat cu ajutorul unui condensator (curentul prin condensator este proporțional cu derivata caderii de tensiune de pe condensator

$$P(s) = sC).$$

Sistemul invers: trebuie să fie un integrator, $Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{1}{sRC}$.



Este posibilă recurgerea la un amplificator operațional pentru realizarea câștigului K . Integratorul este un exemplu din această categorie. Curentul printr-un condensator este proporțional cu derivata tensiunii de la bornele sale. Conectând condensatorul în buclă de reacție, ca în figura, se obține un integrator, pentru care se poate scrie $Q(s)$ ca în relație.

Deși ne referim numai la sisteme liniare, această structură poate fi folosită și pentru inversarea unor neliniarități. Sisteme pentru care mărimea de ieșire este logaritmul măririi de intrare se pot implementa utilizând caracteristica de tip exponențial pe care le prezintă diodele (caracteristica curent-tensiune).

Compensarea unor caracteristici neideale ale unor elemente de circuit

Castig constant într-o banda de frecvente pornind de la un amplificator cu $|H(\omega)|$ variabil in acea banda.

$$\text{Pentru } G(s) = K \Rightarrow Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)} \xrightarrow{s=j\omega} Q(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + KH(j\omega)}$$

Castigul in bucla deschisa: $KH(\omega)$

Daca in banda de frecvente de interes : $|KH(j\omega)| \gg 1$ atunci

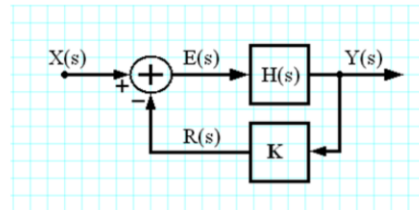
$$\text{castigul in bucla inchisa: } Q(j\omega) \cong Q(\omega) \cong \frac{1}{K} = \text{cst}$$

De obicei $K < 1$ (deoarece castig constant este obtinut numai la atenuatoare) $\Rightarrow Q(\omega) > 1$.

Rezulta ca

$$|H(\omega)| \gg \frac{1}{K} \cong Q(\omega), \text{ deci se cere}$$

castigul in bucla deschisa $\gg$ castigul in bucla inchisa



16

Sa consideram cazul realizării unui câștig constant într-o banda de frecvente pornind de la un amplificator pentru care $|H|$ nu este constant in banda data.

Daca $H(s)$ -raspunsul amplificatorului iar $G(s)=K$ atunci $Q(s)$ se poate scrie ca in prima relatie. Pentru $s=j\omega$, avem raspunsul in frecventa al sistemului $Q(j\omega)$ ca in a doua relatie. Daca in banda de frecvente de interes avem satisfacuta conditia $|KH(j\omega)| \gg 1$ (relatia a treia) atunci $Q(j\omega)$ satisface conditia din a patra relatie, fiind practic o constanta.

De obicei numai la atenuatoare $K < 1$ se obtine castig uniform, si deci $Q(j\omega) > 1$.

Uniformizarea castigului $Q(j\omega)$ in banda implica ultima relatie: modulul lui $H(j\omega)$ este mult mai mare decat $1/K$, asa ca se cere un castig in bucla deschisa mult mai mare decat cel realizat in bucla inchisa.

Stabilizarea sistemelor instabile, Exemple

- Sistemele instabile pot fi incluse in bucla inchisa pentru stabilizare (ex: zborul unei rachete pe o traiectorie)
- **Exemplul #1 Sistem cu reactie proportionala**

$$H(s) = \frac{b}{s-a}, a > 0 \text{ si } G(s) = K$$

$$\Rightarrow Q(s) = \frac{H(s)}{1+KH(s)} = \frac{b}{s-(a-Kb)}$$

Pol: $s_p = a - Kb \in \text{sempianul stang, daca } Kb > a$

$\Rightarrow$ sistem stabil. Marimea de reactie este proportionala cu marimea de iesire ($G(s)=K$)

17

Al doilea exemplu

Funcția de transfer a oscilatorului are poli simpli pe axa imaginara: $H(s) = \frac{b}{s^2 + a}$.

în cazul unei reacții proporționale $G(s) = K$, sistem în buclă închisă

$$Q(s) = \frac{b}{s^2 + (a + Kb)}.$$

sistemele de ordinul 2, $Q_t(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$ sunt stabile dacă $\omega_0 > 0$ și dacă $\xi > 0$,

adică dacă există atenuare.

Analizând comparativ $Q(s)$ și $Q_t(s)$ rezultă că nu putem influența prin reacție proporțională decât ω_0^2 deoarece $\xi = 0$.

Nu vom putea deci stabiliza oscilatorul numai prin reacție proporțională.

De aceea includem în buclă de reacție și o componentă **derivativă**.

$$G(s) = K_1 + K_2 s.$$

$$Q(s) = \frac{b}{s^2 + bK_2 s + (a + K_1 b)}.$$

Sistemul în buclă închisă este stabil dacă $a + K_1 b > 0$ și $bK_2 > 0$.

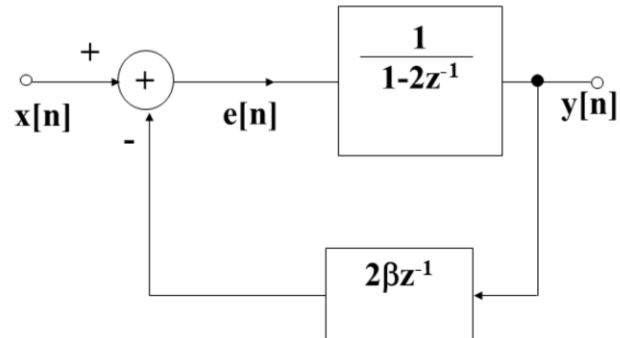
Al treilea exemplu

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}; G(z) = 2\beta z^{-1}.$$

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1+G(z)H(z)} = \frac{1}{1-2(1-\beta)z^{-1}}$$

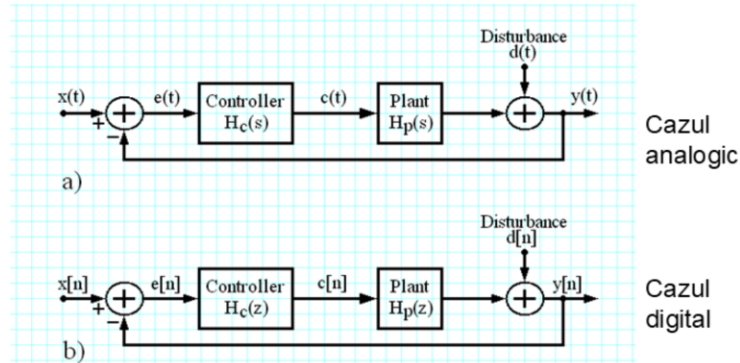
$$z_p = 2(1-\beta).$$

Stabilitatea se obtine daca $|z_p| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \beta < 1$.



Sisteme cu urmarire (tracking)

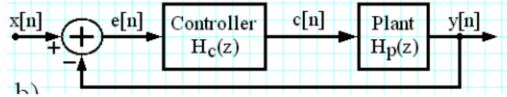
- Pilotul automat: intrarea este ruta dorita. Iesirea este ruta reala a avionului.



Plant - Sistem de automatizat;
Controller - compensator

20

Primul exemplu al poziționării telescopului descrie un sistem în care ieșirea urmărește intrarea. Dacă ne referim la un pilot automat, intrarea este constituită din ruta dorită sistemul cu reacție acționează asupra cârmelor, eleroanelor, motoarelor s.a. astfel încât ieșirea, adică drumul efectiv al avionului să fie identic cu cel impus prin intrare. Dacă ne referim la figura, H_p este funcția sistem a unui sistem automatizat (plant) iar H_c este funcția sistem a unui compensator (controller).



Pentru: $H(z) = H_c(z)H_p(z)$ Fara perturbari.

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)}X(z); \text{ cu } E(z)H(z) = Y(z)$$

$$\Rightarrow E(z) = \frac{X(z)}{1+H(z)}$$

$$\text{Pe cercul unitar: } E(e^{j\Omega}) = \frac{X(e^{j\Omega})}{1+H(e^{j\Omega})}$$

Eroarea trebuie sa fie neglijabila:

$$e[n] \cong 0, E(e^{j\Omega}) \cong 0 \Rightarrow |H(e^{j\Omega})| \text{ mare}$$

O performanta buna de urmarire se obtine la un castig global foarte mare.

21

Fără perturbații se poate scrie $H(z)$ ca in primele relații.

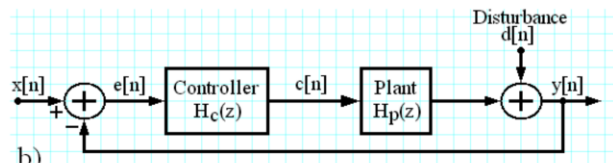
Evaluând funcțiile pe cercul unitar, obținem răspunsurile in frecventa corespunzătoare $E(e^{j\Omega})$. O performanta buna de urmărire înseamnă o eroare de urmărire mica, $e[n]$ aproape de zero, sau $E(e^{j\Omega})$ zero. Aceasta implica modulul răspunsului in frecventa al sistemului, H , sa fie de valoare foarte mare.

Se poate deci trage concluzia: performante de urmărire bune se obțin daca câștigul global este foarte mare.

- Erorile modelate prin perturbatia $d[n]$

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} X(z) - \frac{H(z)}{1+H(z)} D(z)$$

- Erori mici inseamna castig mic: $|H(e^{j\Omega})|$
- Castigul trebuie sa fie mare (la frecvente joase) si mic (la frecvente inalte)

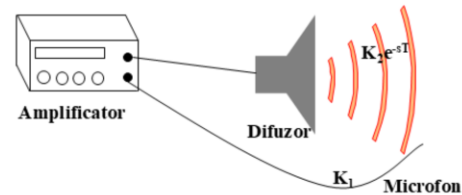


22

Pentru a nu avea influente prea mari ale perturbatiei, $D(z)$, este bine ca $|H(e^{j\Omega})|$ sa fie mic. Aceasta intra insa in contradictie cu conditia ceruta pentru o urmarire buna. De aici se poate trage concluzia ca $|H(e^{j\Omega})|$ trebuie sa fie foarte mare dar nu mult prea mare.

Trebuie mentionat ca, de obicei, $|X(e^{j\Omega})|$ este semnificativ la frecvente joase, iar $|D(e^{j\Omega})|$ este semnificativ la frecvente mai mari. De aceea castigul $|H(e^{j\Omega})|$ trebuie sa fie foarte mare la frecventele joase si cat mai mic la frecventele inalte.

Instabilitati cauzate de reactie



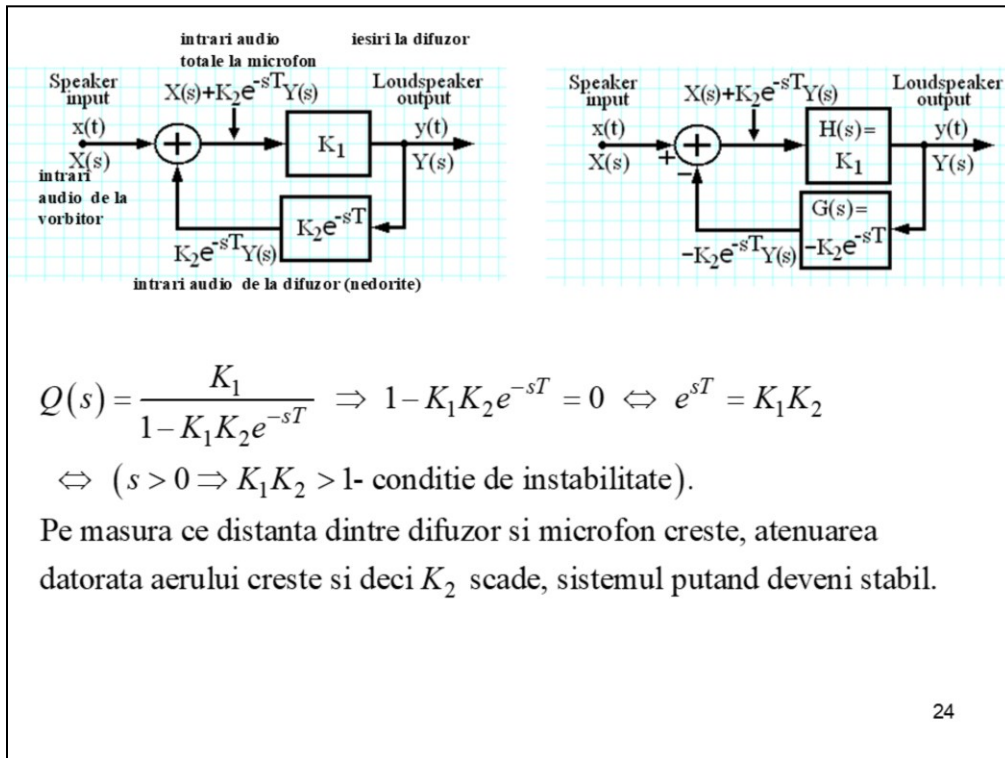
La microfon nu ajunge numai semnalul vocal ce provine de la vorbitor ci si un semnal nedorit de la difuzor. Apare astfel o bucla de reactie. Daca faza celor doua semnale este potrivita se produce intarirea sunetului generat de difuzor, pana la saturatia acestuia.

K_1 – *amplificarea*,

K_2 – *atenuarea datorata propagarii sunetului prin aer.*

T - *durata propagarii semnalului de la difuzor la microfon.*

Consideram un sistem audio cu reactie, cum este cel prezentat in figura. La microfon nu ajunge numai semnalul vocal ce provine de la vorbitor ci si un semnal, nedorit, de la difuzor. Apare astfel o bucla de reactie. Daca faza semnalelor este potrivita, se produce intarirea sunetului generat de difuzor, pana la saturatie.



Modelul sistemului pentru cazul aparitiei instabilitatii este cel din figura, unde K_1 este amplificarea, iar K_2 provine din atenuarea datorata propagarii sunetului prin aer. T este durata propagarii semnalului de la difuzor la microfon.

Daca produsul $K_1 K_2$ este supraunitar, sistemul devine instabil. Pe masura ce distanta dintre difuzor si microfon creste, atenuarea datorata aerului creste si deci scade, sistemul putand astfel sa devina stabil.

Metoda locului radacinilor (Root-locus method)

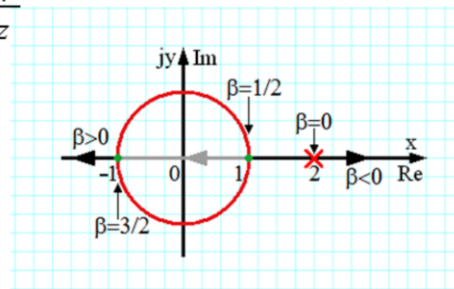
- Polii sistemului cu reactie se reprezinta in functie de castigul K.
- *cazul simplu: polii sunt cunoscuti*
- Exemplu #1, sistem digital

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}; \quad G(z) = 2\beta z^{-1} = \frac{2\beta}{z}$$

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{1}{1-2(1-\beta)z^{-1}} = \frac{z}{z-2(1-\beta)}$$

$$\Rightarrow z_p = 2(1-\beta)$$

$$\text{Sistem stabil daca } |z_p| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$$



Am văzut in exemplele anterioare, exista sisteme in bucla închisa in care exista un câștig reglabil K constant in raport cu frecventa. Suntem interesați sa determinam cum se mișca polii sistemului in bucla închisa, in planul complex, ca urmare a modificării câștigului K. Poziția polilor ne va da informații cu privire la valorile admise ale K pt ca sistemul in bucla închisa sa rămână stabil. Descriem metoda pentru examinarea locului rădăcinilor (poli ai sistemului) in planul complex in funcție de un câștig reglabil- metoda locului rădăcinilor.

Ea presupune doar funcțiile sistem in bucla închisa $Q(s)$ sau $Q(z)$, sa fie fracții raționale, in s respectiv z.

in exemplul considerat β este castigul reglabil. In figura se arata locul geometric al polului pt diverse valori ale castigului β . Polul este in interiorul cercului unitar (caz in care sistemul este stabil) pentru intervalul $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Pentru celelalte valori sistemul este instabil

- Exemplu #2, sistem analogic

$$H(s) = \frac{s}{s-2}; \quad G(s) = \frac{2\beta}{s}$$

$$\Rightarrow Q(s) = \frac{s}{s-2(1-\beta)}; s_p = 2(1-\beta)$$

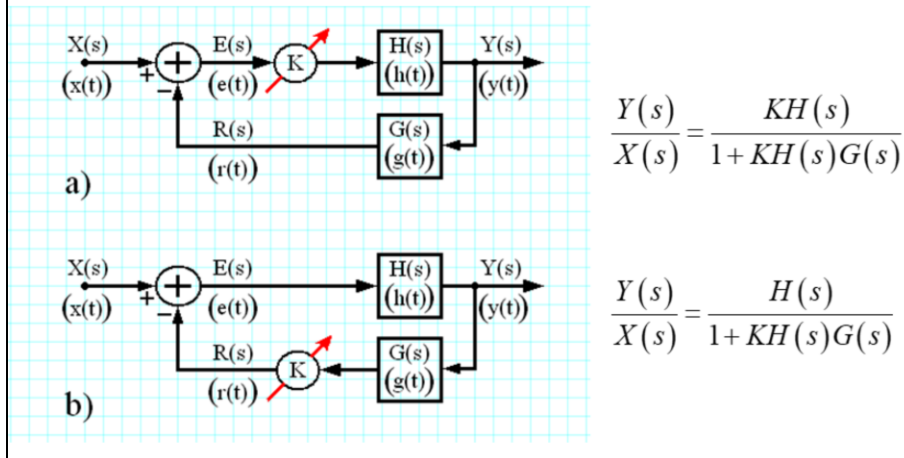
Sistem stabil daca $\operatorname{Re}\{s_p\} < 0 \Leftrightarrow \beta > 1$

In al doilea exemplu, avem un sistem analogic, deci polii trebuie sa fie situati in semiplanul stang pentru a fi stabil, rezulta castigul trebuie sa fie supraunitar.

In planul complex, locul polului este acelasi, doar conditia de stabilitate e alta

Cazul in care polii nu sunt cunoscuti

- Sisteme cu reacție cu câștig *variabil*



27

Pentru a face posibilă manipularea polilor sistemelor în buclă închisă au fost concepute sistemele de reacție cu câștig variabil. Acestea se obțin din sistemele cu reacție negativă prin adăugarea unui amplificator cu câștig variabil pe calea directă (figura a) sau pe calea de reacție (figura b).

În primul caz, funcția de transfer pe calea directă devine KH , funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă devine KHG și funcția de transfer a sistemului cu reacție devine $Q = KH/(1 + KHG)$.

În cel de al doilea caz, funcția de transfer a căii de reacție devine kG , funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă devine KHG iar funcția de transfer a sistemului în buclă închisă devine $H/(1 + KHG)$. Se constată că în ambele cazuri, polii funcției de transfer a sistemului în buclă închisă sunt rădăcinile ecuației $1 + KHG = 0$. Prin modificarea valorii lui K (câștig variabil) pot fi manipulați polii sistemului în buclă închisă și amplasați în semiplanul stâng (respectiv în interiorul cercului unitate) rezultând un sistem în buclă închisă stabil.

În exemplele anterioare poziția polului a fost ușor de trasat deoarece expresia lui a putut fi stabilită și era și simplă; dar nu este cazul acesta întotdeauna.

Punctele de capat ale locului radacinilor: polii sistemului in bucla inchisa pentru $K=0$ si $|K|=\infty$

Polii sunt dati de $1 + KH(s)G(s) = 0$

Pentru sistemul in bucla inchisa, polii depind de K :

$$H(s)G(s) = -\frac{1}{K}$$

1) Pentru $K \rightarrow 0$: $H(s)G(s) \rightarrow \pm\infty$, solutia ecuatiei data de polii lui $H(s)G(s)$

$$\text{pentru: } H(s) = \frac{s}{s-2}; \quad G(s) = \frac{2\beta}{s} \Rightarrow H(s)G(s) = \frac{2\beta}{s-2}$$

$$\frac{2}{s-2} = -\frac{1}{\beta}$$

$$\beta = 0 \Rightarrow s = 2$$

2) Pentru $K \rightarrow \pm\infty$, $1/K \rightarrow 0$, solutia data de zerourile lui $H(s)G(s)$

28

Este posibil sa se traseze destul de exact locul geometric al polilor fara a se rezolva expresia polilor. Dezvoltam metoda pt transformata Laplace, dar ea se poate aplica fara modificari pentru transformata z. Numai conditia de stabilitate se schimba dar nu si metoda de trasare a locului geometric. Ecuatia care da polii sistemului in bucla inchisa este in prima relatie respective a doua relatie. Tehnica de trasare a locului radacinilor (polilor) se bazeaza pe proprietatile acestei ecuatii.

Pentru $K \rightarrow 0$, rezulta $HG \rightarrow +\infty$, adica solutia ecuatiei este data chiar de polii produsului HG. In exemplul considerat pentru $\beta=0$ rezulta $s=2$.

Pentru $K \rightarrow +\infty$, deci $1/K \rightarrow 0$, adica solutia este data de zerourile produsului HG. Daca gradul numaratorului produsului HG este mai mic decat al numitorului sau, exista zerouri si la infinit, cum e cazul in exemplul considerat.

Criteriul variatiei argumentului

ofera o metoda directa de a preciza daca un punct s_0 ar putea fi un pol al sistemului in bucla inchisa pentru o valoare oarecare a lui K

- K este real, s_0 poate fi pol al sistemului cu reactie, daca $H(s_0)G(s_0)$ este real, adica

$$G(s_0)H(s_0) = |G(s_0)H(s_0)| e^{j\text{Arg}\{G(s_0)H(s_0)\}} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{j\text{Arg}\{G(s_0)H(s_0)\}} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \text{Arg}\{G(s_0)H(s_0)\} \text{ multiplu de } \pi$$

$$\text{--multiplu impar de } \pi \Rightarrow K = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} > 0$$

$$\text{--multiplu par de } \pi \Rightarrow K = -\frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} < 0$$

Daca $H(s_0)G(s_0)$ nu este real s_0 sigur nu e punct al locului.

29

Castigul K este real si deci s_0 poate fi un pol al sistemului in bucla inchisa, adica s_0 poate fi un punct de pe locul radacinilor daca $H(s_0)G(s_0)$ este o cantitate reala. Altfel sigur nu e punct al locului.

Prin urmare se pot scrie primele trei relatii. Astfel rezulta ca argumentul este un multiplu intreg al lui π . Relatia aceasta este **criteriul unghiului sau al argumentului**. Ea ofera o metoda directa de a preciza daca un punct s_0 ar putea fi un pol al sistemului in bucla inchisa pentru o valoare oarecare a lui K .

Daca argumentul lui $H(s_0)G(s_0)$ este multiplu impar de π atunci $\exp\{j\text{Arg } H(s_0)G(s_0)\} = -1$, rezulta $H(s_0)G(s_0) = -|H(s_0)G(s_0)|$, iar K este pozitiv conform penultimei relatii;

In mod asemanator, daca s_0 satisface conditia ca argumentul lui $H(s_0)G(s_0)$ sa fie multiplu par al lui π atunci $H(s_0)G(s_0) = |H(s_0)G(s_0)|$, iar K este negativ conform ultimei relatii

In exemplul considerat anterior, pentru $s_0 < 2$, argumentul este $-\pi$

$$\text{Pentru: } H(s)G(s) = \frac{2\beta}{s-2} \Rightarrow \frac{2}{s-2} = -\frac{1}{\beta}$$

$$s_0 < 2 \Rightarrow \text{Arg} \left\{ \frac{2}{s_0 - 2} \right\} = -\pi$$

$$\Rightarrow \text{castig } \beta = \frac{1}{\left| \frac{2}{s_0 - 2} \right|} = \frac{2 - s_0}{2} \Rightarrow s_0 = 2(1 - \beta)$$

- Locul radacinilor: s_0 pentru care argumentul functiei de transfer in bucla deschisa este
- -multiplu impar de π pentru castig pozitiv $K > 0$
- -multiplu par de π pentru castig negativ $K < 0$

30

In exemplul considerat anterior, pentru $s_0 < 2$, argumentul este $-\pi$ rezulta ca valoarea lui β pentru care s_0 este polul sistemului in bucla inchisa este data de penultima relatie. Rezulta s_0 conform ultimei relatii, ceea ce s-a obtinut si inainte.

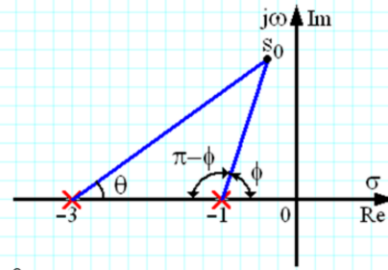
$$H(s) = \frac{1}{s+1}; G(s) = \frac{1}{s+3}$$

- Poli reali:

$$s_0 \in \mathbb{R}, s_0 > -1 : \text{Arg}\{G(s_0)H(s_0)\} = 0 \Rightarrow K < 0$$

$$s_0 \in \mathbb{R}, -3 < s_0 < -1 : \text{Arg}\{G(s_0)H(s_0)\} = -\pi \Rightarrow K > 0$$

$$s_0 \in \mathbb{R}, s_0 < -3 : \text{Arg}\{G(s_0)H(s_0)\} = -2\pi \Rightarrow K < 0$$



polii produsului $H(s)G(s)$ si
procedura geometrica de
evaluare a unghiului

- Poli complecsi. Pt ω pozitiv: $K > 0$, pt ω negativ: la fel

$$\omega > 0 : -2\pi < \text{Arg}\{G(s_0)H(s_0)\} < 0 \Rightarrow \text{Arg}\{G(s_0)H(s_0)\} = -\pi \Rightarrow K > 0$$

$$\omega < 0 : K > 0$$

In semiplanul $\omega > 0$: unghiul nu poate fi niciodata un multiplu par de π , asa ca nu avem puncte ale locului pentru $K < 0$. Putem avea valori $K > 0$

In semiplanul $\omega < 0$: locul fiind tot mediatoarea segmentului si corespunde tot unor valori $K > 0$

31

In figura se prezinta polii produsului $H(s)G(s)$ precum si procedura geometrica de evaluare a unghiului. Cu θ si ϕ s-au notat unghiurile facute de segmentele ce unesc punctul s_0 cu fiecare pol.

Daca s_0 este real si $s_0 > -1$ rezulta ca aceste puncte corespund unor valori K negative

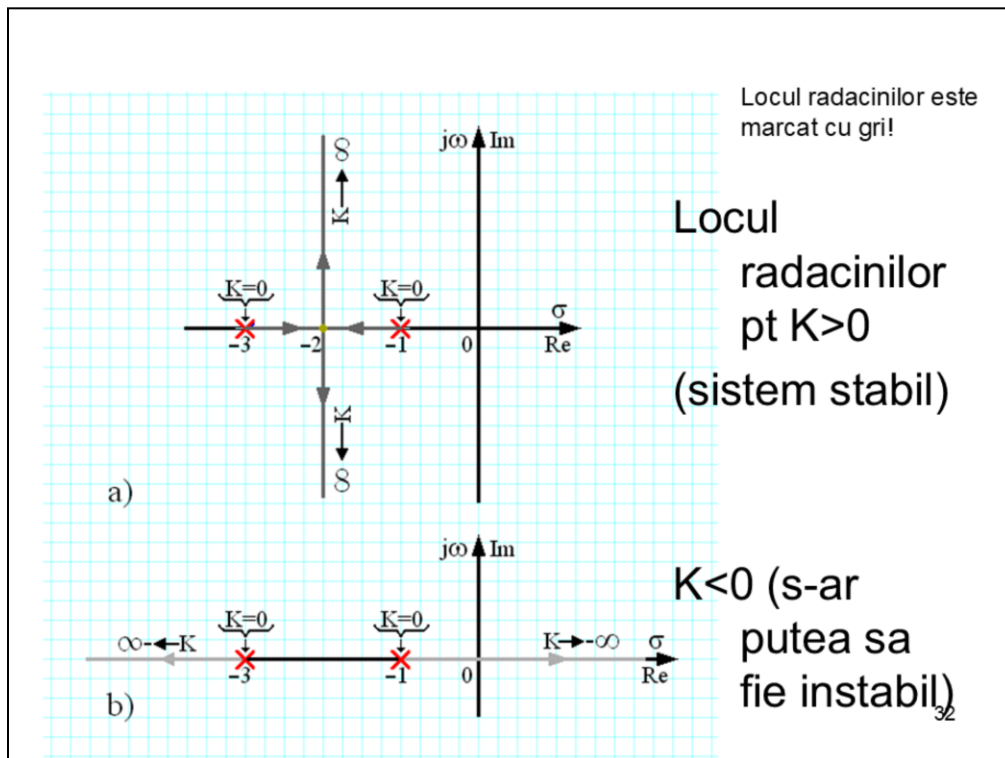
Daca s_0 este real si $-3 < s_0 < -1$ rezulta ca aceste puncte corespund unor valori K pozitive

Daca s_0 este real si $s_0 < -3$ rezulta ca aceste puncte corespund unor valori K negative

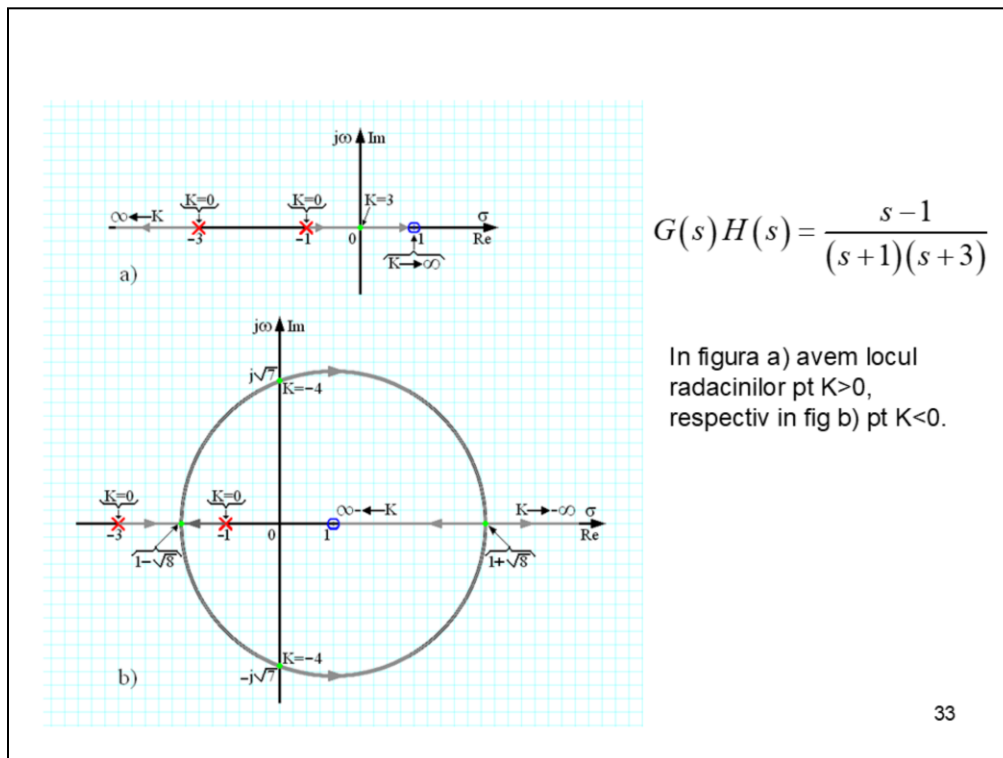
Examinam puncte s_0 din planul s , ce nu sunt pe axa reala (complecsi).

In semiplanul $\omega > 0$: unghiul nu poate fi niciodata un multiplu par de π , asa ca nu avem puncte ale locului pentru $K < 0$. Putem avea valori $K > 0$

In semiplanul $\omega < 0$: locul fiind tot mediatoarea segmentului si corespunde tot unor valori $K > 0$

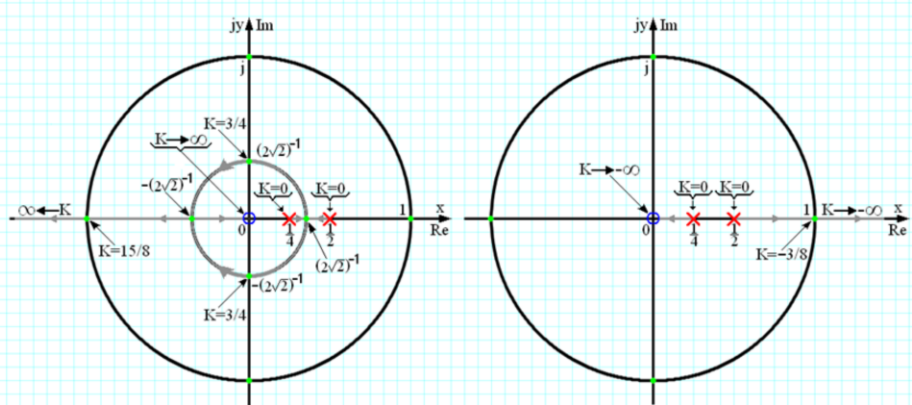


se vede ca pentru orice $K > 0$ stabilitatea este asigurata, in timp ce pentru $K < 0$ exista riscul destabilizarii.

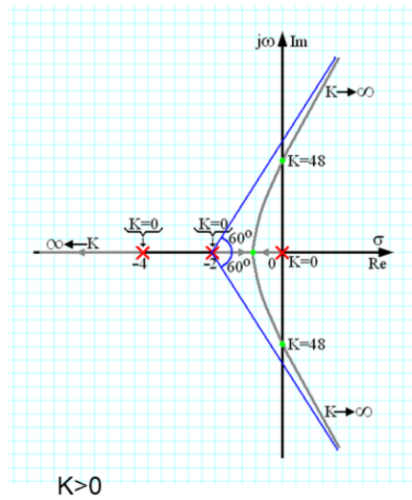


Urmatorul exemplu. In figura a) avem locul radacinilor pt $K > 0$, respectiv in fig b) pt $K < 0$.

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$



Exemplu pentru sistem discret



$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

- Sistem stabil pentru $K \in (0, 48)$

Criteriul de stabilitate Nyquist

Utilizarea criteriului de stabilitate Hurwitz presupune cunoașterea expresiei funcției de transfer în buclă închisă a sistemului cu reacție. Există situații când această funcție de transfer nu este cunoscută: în cazul identificării experimentale a unui sistem cu reacție, când pot fi identificate doar răspunsurile în frecvență H și G . În aceste cazuri poate fi folosit criteriul lui Nyquist.

Soluțiile ecuației $H(s) \cdot G(s) = -\frac{1}{K}$ depind de valoarea lui K .

Pot fi determinate valori ale lui K pentru care sistemul cu reacție să fie stabil. Pe baza criteriului lui Nyquist pot fi determinate aceste valori prin examinarea funcției $G(j\omega)H(j\omega)$. Reprezentarea grafică în planul s a acestei funcții poartă numele de hodograf al lui $W(s)$.

În scopul formulării criteriului lui Nyquist se enunță în prealabil principiul variației argumentului, care dă informații despre hodograful unei funcții complexe de variabilă complexă.

Criteriul de stabilitate Nyquist ne permite să localizăm amplasarea polilor funcției de transfer a sistemului în buclă închisă pe baza analizei hodografului sistemului în buclă deschisă. În scopul formulării criteriului lui Nyquist se enunță în prealabil criteriul variației argumentului, care dă informații despre hodograful unei funcții complexe de variabilă complexă, mai precis specifică de câte încercuiește hodograful originea planului complex și în ce sens.

$G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ cu ω modificandu-se de la $-\infty$ la ∞ - hodograf Nyquist al sistemului
in bucla deschisa.

hodograful Nyquist trebuie sa inconjoare punctul de coordonate $\left(-\frac{1}{K}, 0\right)$ in sens

anti-orar de un numar de ori egal cu $n_i + \frac{n_C}{2}$.

n_i - numarul polilor din semiplanul drept ai lui $H(s)G(s)$,

n_C - numarul polilor de pe axa imaginara ai lui $H(s)G(s)$.

Criteriul de stabilitate Nyquist pentru sisteme analogice

Conditia necesara si suficienta ca sistemul in bucla inchisa considerat sa fie strict stabil este ca numarul de incercuiri ale punctului de coordonate $\left(-\frac{1}{K}, 0\right)$ de catre hodograful Nyquist al sistemului in bucla deschisa $H(j\omega)G(j\omega)$ in sens antiorar cand ω se modifica de la $-\infty$ la ∞ , sa fie egal cu numarul polilor lui $H(s)G(s)$ din semiplanul drept si de pe axa imaginara, adica cu $n_i + \frac{n_C}{2}$.

Sistemul in bucla inchisa este strict stabil daca si numai daca **numarul de incercuiri** ale punctului de coordonate $(-1/K, 0)$ de catre hodograful Nyquist $H(j\omega)G(j\omega)$ al sistemului in bucla deschisa in sens trigonometric, pentru $\omega \in (-\infty, \infty)$, este egal cu **numarul polilor** lui $H(s)G(s)$ localizat **in semiplanul drept**.

Observatii

1. Daca sistemul in bucla deschisa este stabil atunci $H(s)G(s)$ nu are poli in semiplanul drept si nici pe axa imaginara. Deci hodograful Nyquist al sistemului in bucla deschisa nu trebuie sa incercuiasca punctul de

coordonate $\left(-\frac{1}{K}, 0\right)$.

2. Deoarece $h(t)$ si $g(t)$ sunt functii reale $H(-j\omega)G(-j\omega) = H(j\omega)^* G(j\omega)^*$

si deci $|H(-j\omega)G(-j\omega)| = |H(j\omega)^* G(j\omega)^*| = |H(j\omega)^*| |G(j\omega)^*| = |H(j\omega)G(j\omega)|$

si $\arg\{H(-j\omega)G(-j\omega)\} = \arg\{H(j\omega)^* G(j\omega)^*\} = \arg\{(H(j\omega)G(j\omega))^*\} =$
 $= -\arg\{H(j\omega)G(j\omega)\}$

Hodograful Nyquist pentru domeniul de variatie a lui ω intervalul $(-\infty, 0)$ se obtine prin simetrie fata de axa reala a planului complex $H(s)G(s)$ din hodograful Nyquist pentru domeniul de variatie a lui ω cuprins in intervalul $(0, \infty)$.

Exemplul #1

$$G(s) = \frac{1}{s+1}; H(s) = \frac{1}{0.5s+1} \Rightarrow H(s)G(s) = \frac{1}{0.5s^2 + 1.5s + 1}$$

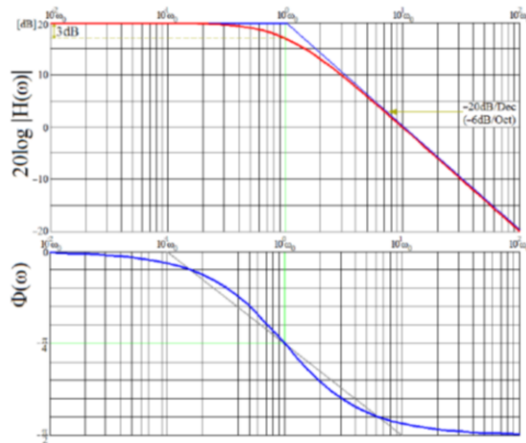


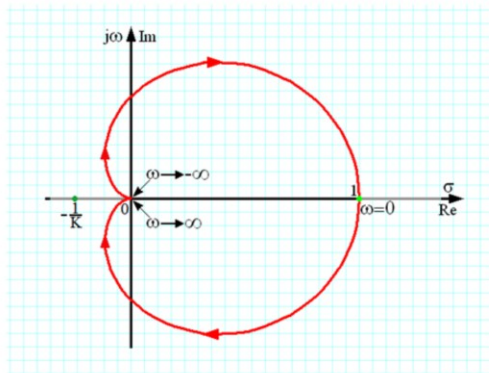
Fig. 13.21 Bode plots $G(j\omega)H(j\omega) = 2 / [(j\omega+1)(j\omega+2)]$.

Exista doua modalitati de constructie a hodografului sistemului in bucla deschisa. Prima se bazeaza pe caracteristicile Bode (valorile $|H(\omega)G(\omega)|$ si $\arg\{H(\omega)G(\omega)\}$) ale sistemului in bucla deschisa sau valorile $Re\{H(\omega)G(\omega)\}$ si $Im\{H(\omega)G(\omega)\}$.

40

se prezintă un exemplu de aplicare a criteriului de stabilitate Nyquist. Se consideră că sistemele de pe calea de reacție respectiv de pe calea directă au funcțiile de transfer din primele două ecuații. Vom construi hodograful sistemului în buclă deschisă. Există două modalități de construcție a acestui hodograf : în coordonate polare (cu ajutorul caracteristicilor Bode) sau în coordonate carteziane (cu ajutorul părților reală și imaginară). Polii sistemului în buclă deschisă sunt -1 și -2, ambii situați în semiplanul stâng, deci sistemul în buclă deschisă este stabil. Cele două sisteme de pe calea directă și de pe calea de reacție sunt de ordinul întâi și au răspunsuri în frecvență de tip trece jos. Caracteristicile Bode ale sistemului în buclă deschisă sunt reprezentate în figurile din stânga (sus de modul și jos de fază).

Caracteristica de fază a sistemului $G(j\omega)$ este $\arg\{G(j\omega)\} = -\arctg(\omega)$ iar caracteristica de fază a sistemului $H(j\omega)$ este $\arg\{H(j\omega)\} = -\arctg(0,5\omega)$. În consecință caracteristica de fază a sistemului în buclă deschisă este $\arg\{W(j\omega)\} = -\arctg(\omega) - \arctg(0,5\omega)$



Deoarece sistemul în buclă deschisă este stabil pentru ca și sistemul în buclă închisă să fie stabil este necesar ca să nu fie încercuit punctul de

coordonate $\left(-\frac{1}{K}, 0\right)$.

$$-\frac{1}{K} < 0 \text{ sau } -\frac{1}{K} > 1$$

$K > 0$ sau $K < -1$ adică $K > -1$.

Pentru reacția negativă, $K > 0$, stabilitatea este asigurată întotdeauna.

Pentru reacția pozitivă, $K < 0$, avem din a doua condiție: $-1 < K < 0$

41

Folosind caracteristicile de frecvență ale sistemului în buclă deschisă se obține hodograful sistemului în buclă deschisă. La frecvența 0, întrucât modulul răspunsului în frecvență al sistemului în buclă deschisă are valoarea 1 iar argumentul răspunsului sistemului în buclă deschisă are valoarea 0 se obține punctul de pe axa reală de coordonate (1,0). La frecvența $10^2 \omega_0$, întrucât argumentul răspunsului în frecvență are valoarea $-\pi/2$ se obține punctul de pe axa imaginară al hodografului sistemului în buclă deschisă.

În sfârșit, când frecvența tinde la infinit, întrucât modulul răspunsului în frecvență al sistemului în buclă deschisă tinde la zero iar argumentul său la $-\pi$ se obține originea sistemului complex pentru hodograful sistemului în buclă deschisă. Unind cele trei puncte ale hodografului obținute deja se obține curba trasată cu albastru în figura din dreapta. Ramura pentru ω negativ se construiește prin simetrie față de axa reală a planului complex.

După ce s-a construit și ramura pentru frecvențe negative se obține hodograful din figură. Se observă că acesta este o curbă închisă parcursă în sens orar. Deoarece sistemul în buclă deschisă este stabil, în conformitate cu criteriul de stabilitate Nyquist, sistemul în buclă închisă va fi stabil dacă nu este încercuit punctul de coordonate $(-1/K, 0)$. Această condiție este îndeplinită dacă punctul critic se găsește la stânga originii planului complex (adică $-1/K < 0$) SAU dacă punctul critic se găsește la dreapta punctului de coordonate (1,0) adică $-1/K > 1$. Prima condiție este îndeplinită dacă $K > 0$ iar cea de a doua condiție dacă $K < -1$. Deci pentru ca sistemul în buclă închisă să rămână stabil este necesar ca amplificarea K să fie mai mare decât -1. Dacă de exemplu $K = -2$ atunci sistemul în buclă închisă va deveni instabil chiar dacă sistemul în buclă deschisă era stabil.

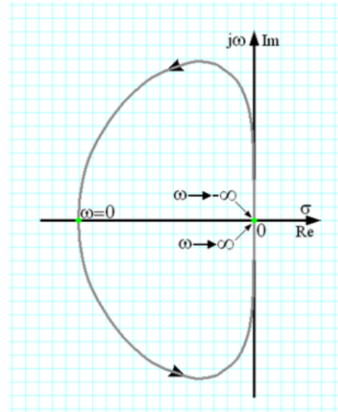
Exemplul #2

- Sistemul în buclă deschisă este instabil, având un pol în semiplanul drept:

$$G(s)H(s) = \frac{2(s+1)}{(s-1)(s+2)}$$

- Sistemul în buclă închisă stabil: dacă punctul critic $\sigma = -1/K$ este înconjurat de hodograf o singură dată în sens trigonometric.

$$-1 < -\frac{1}{K} < 0 \Rightarrow K > 1$$



42

În cel de al doilea exemplu se consideră un sistem în buclă deschisă instabil, având un pol în 1 (în semiplanul drept) și un al doilea pol în -2 (în semiplanul stâng). În conformitate cu criteriul de stabilitate al lui Nyquist, sistemul în buclă închisă va fi stabil dacă hodograful Nyquist al sistemului în buclă deschisă va încercui o dată, în sens antiorar punctul critic. Construim hodograful Nyquist. De data aceasta vom calcula părțile reală și imaginară ale răspunsului în frecvență al sistemului în buclă deschisă, $L(j\omega)$. Înlocuind s cu $j\omega$ în expresia produsului $G(s)H(s)$ și efectuând calculele obținem expresia lui $L(j\omega)$ din ecuație. Separăm părțile reală și imaginară și constatăm că ambele sunt negative pentru ω pozitiv. Dăm lui ω valorile 0 și infinit și construim tabelul de variație al părților reală și imaginară. Constatăm că pentru $\omega=0$ se obține punctul hodografului de coordonate $(-1, 0)$. Pentru valori pozitive ale lui ω , punctele de pe hodograf vor fi în cadranul 3 deoarece atât partea reală cât și partea imaginară ale răspunsului în frecvență al sistemului în buclă deschisă sunt negative. În sfârșit, când ω tinde la infinit, obținem punctul de pe hodograf din originea planului complex. Am obținut ramura de jos a hodografului din figură. Se construiește prin simetrie față de axa reală a planului complex și ramura pentru frecvențe negative a hodografului. S-a obținut curba închisă reprezentată cu roșu în figură. Se observă că ea este parcursă în sens antiorar. Pentru ca sistemul în buclă închisă să fie stabil este necesar ca această curbă să încercuiască o dată punctul critic. De aceea e necesar ca $-1/K$ să fie cuprins între -1 și 0. Deci K ca trebui să fie mai mare ca 0 și K va trebui să fie mai mare ca 1. Deci sistemul în buclă închisă va stabili sistemul în buclă deschisă dacă amplificarea amplificatorului introdus va fi mai mare decât 1.

Exemplul #3 sistem acoustic

$$K = K_1 K_2, \quad G(s)H(s) = -e^{-sT} = e^{-(sT + j\pi)}$$

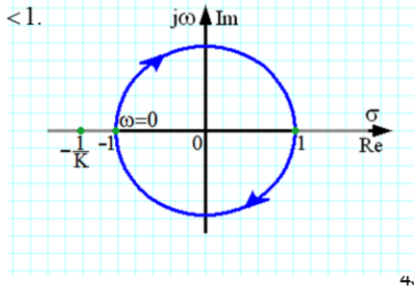
$$G(j\omega)H(j\omega) = e^{-j(\omega T + \pi)}.$$

Modulul este unitar, argumentul are expresia $-(\omega T + \pi)$.

Deoarece sistemul in bucla deschisa este stabil, hodograful Nyquist nu are voie sa incercuiasca punctul critic $-1/K$, sau $|K| < 1$.

Deoarece K_1 si K_2 au semnificatia de atenuari acustice, sunt pozitive

Sistemul in bucla deschisa este stabil daca $K_1 K_2 < 1$.

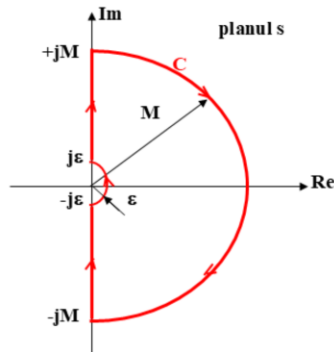


43

Cazul polilor sistemului in bucla deschisa situati pe axa imaginara

Consideram cazul unui pol pe axa imaginara. $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

Pentru a aplica criteriul variatiei argumentului la fel ca in cazurile anterioare se considera conturul C, modificat, in asa fel incat sa fie ocolit polul de pe axa imaginara, printr - un semicerc de raza $\varepsilon \rightarrow 0$, in acelasi timp cu $M \rightarrow \infty$.



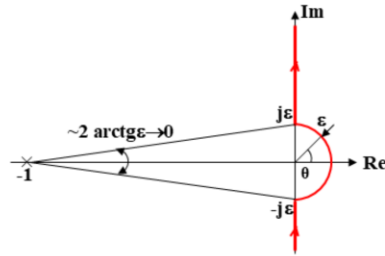
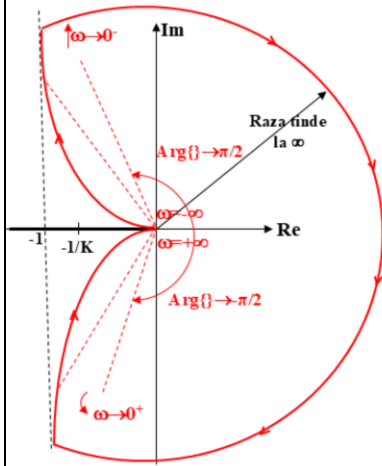
Valoarea produsului GH pe cercul de raza M este o constanta si deci nu apare nici o variatie a argumentului cand ω trece de la ∞ la $-\infty$. Trebuie deci sa trasam hodograful Nyquist numai pentru axa imaginara si pentru semicercul de raza ε . Avem:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{|\omega|\sqrt{\omega^2+1}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\text{sgn}\omega + \arctg\omega\right)}$$

si $\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}\{G(j\omega)H(j\omega)\} = -1$, adica $\sigma = -1$ este asymptota verticala a hodografului Nyquist.

Ramane sa determinam comportarea produsului pe semicercul de raza ε .

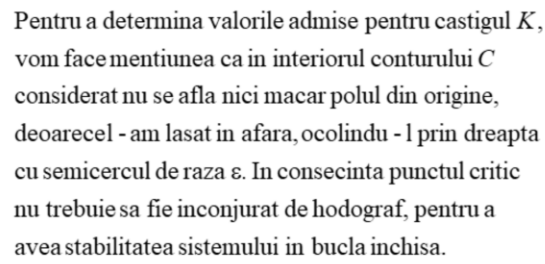
Deoarece raza ε tinde spre zero, variatia unghiului cauzata de polul -1 este nula.



In schimb pe semicerc $\text{Arg}\{G(j\omega)H(j\omega)\} = -\theta$ si deci

$$\Delta \text{Arg}\{G(j\omega)H(j\omega)\} = -(\theta_{\omega=0^+} - \theta_{\omega=0^-}) = -\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

sau $\Delta \text{Arg}\{G(j\omega)H(j\omega)\} = -\pi$. Aceasta inseamna o rasucire a hodografului cu 180° in sens orar atunci cand se trece de la $\omega = 0^-$ la $\omega = 0^+$ pe semicercul de raza ε .



46

Cazul sistemelor in timp discret

Pentru ca sistemul in timp discret in bucla inchisa sa fie stabil este necesar ca nici

un zero al ecuatiei : $R(z) = \frac{1}{K} + G(z)H(z) = 0$ sa nu fie in afara cercului unitate.

Fie : $\hat{R}(z) = R\left(\frac{1}{z}\right)$.

Daca z_0 este un zero (pol) al lui $R(z)$ atunci $\frac{1}{z_0}$ este un zero (pol) al lui $\hat{R}(z)$.

Daca $|z_0| > 1$ atunci $\frac{1}{|z_0|} < 1$. Orice zero (pol) al lui $R(z)$ din exteriorul cercului

unitate este un zero (pol) al lui $\hat{R}(z)$ situat in interiorul cercului unitate.

Conform principiului variatiei argumentului daca z parcurge odata cercul

unitate in sens orar atunci $\hat{R}(z)$ incercuiește originea planului $(Re\{\hat{R}(z)\}, Im\{\hat{R}(z)\})$

in sens orar de un numar de ori egal cu diferenta dintre numarul de zerouri si de poli ai lui $\hat{R}(z)$ situati in interiorul cercului unitate.

Pe cercul unitate $z = e^{j\Omega}$ si $\frac{1}{z} = e^{-j\Omega}$. De aceea $\hat{R}(e^{j\Omega}) = R(e^{-j\Omega})$.

Evaluarea lui $\hat{R}(z)$, cand z parcurge odata cercul unitar in sens orar, este identica cu evaluarea lui $R(z)$, cand z parcurge odata cercul unitar in sens antiorar.

În cazul sistemelor digitale rolul axei imaginare din planul s îl joacă cercul unitar din planul z . În continuare formulăm criteriul de stabilitate Nyquist pentru sistemele digitale cu reacție negativă. În acest caz expresia funcției de transfer a sistemului în buclă deschisă este $L(z) = G(z)H(z)$. Pentru ca sistemul digital în buclă închisă să fie stabil este necesar ca toate rădăcinile ecuației $1/K + G(z)H(z) = 0$ să fie situate în interiorul cercului unitate. Notăm membrul stâng al acestei ecuații cu $R(z)$ și notăm cu $R^\wedge(z)$ funcția $R(1/z)$. Se poate demonstra că dacă z_0 este un zero (pol) al lui $R(z)$ atunci $1/z_0$ este zero (pol) al lui $R^\wedge(z)$. De aceea orice zero (pol) al lui $R(z)$ din exteriorul cercului unitate corespunde la un zero (pol) al lui $R^\wedge(z)$ din interiorul cercului unitate.

Condiția de stabilitate a sistemului în buclă închisă este ca toate zerourile lui $R(z)$ să fie în interiorul cercului unitate. Aceasta condiție este echivalentă cu condiția ca nici un zero al lui $R^\wedge(z)$ să nu fie în interiorul cercului unitate.

Aplicând principiul variației argumentului funcției de transfer $R^\wedge(z)$ se poate determina numărul de zerouri din interiorul cercului unitate. Într-adevăr principiul variației argumentului afirmă că dacă z parcurge o dată cercul unitate în sens orar atunci $R^\wedge(z)$ încercuiește originea planului complex z în sens orar de un număr de ori egal cu diferența dintre numărul de zerouri și de poli ai lui $R^\wedge(z)$ situați în interiorul cercului unitate. Chiar pe cercul unitate $z = \exp(j\Omega)$ și $1/z = \exp(-j\Omega)$. În consecință $R^\wedge(\exp(j\Omega)) = R(\exp(-j\Omega))$. De aceea evaluarea lui $R^\wedge(z)$, când z parcurge odată cercul unitar în sens orar este identică cu evaluarea lui $R(z)$, când z parcurge odata cercul unitar în sens antiorar. În consecință vom putea număra zerourile lui $R^\wedge(z)$ din interiorul cercului unitate numărând de câte ori încercuiește în sens antiorar originea planului complex hodograful lui $R(z)$ atunci când z parcurge odată în sens antiorar cercul unitate (Ω crește de la 0 la 2π). Acum suntem în măsură să formulăm criteriul de stabilitate Nyquist pentru sistemele cu reacție digitale.

Enuntul criteriului lui Nyquist pentru sisteme in timp discret

Conditia necesara si suficienta pentru ca sistemul in bucla inchisa sa fie stabil este ca numarul de incercuiri in sens antiorar ale punctului de coordonate $\left(-\frac{1}{K}, 0\right)$ de catre hodograful Nyquist al lui $G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$ cand Ω se modifica de la 0 la 2π trebuie sa fie egal cu numarul polilor lui $H(z)G(z)$ care se gasesc in exteriorul cercului unitate.

La fel ca și în cazul sistemelor analogice, dacă sistemul în buclă deschisă este stabil atunci pentru ca și sistemul în buclă închisă să fie stabil este necesar ca hodograful să nu încercuiască punctul critic.

La fel ca și în cazul sistemelor analogice ramura pentru frecvențe negative a hodografului se poate construi prin simetrie față de axa reală a planului complex.

Exemplul #1

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{e^{j\Omega}\left(e^{j\Omega} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{v_1 v_2} e^{-j(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{1}{v_2} e^{-j(\theta_1 + \theta_2)}$$

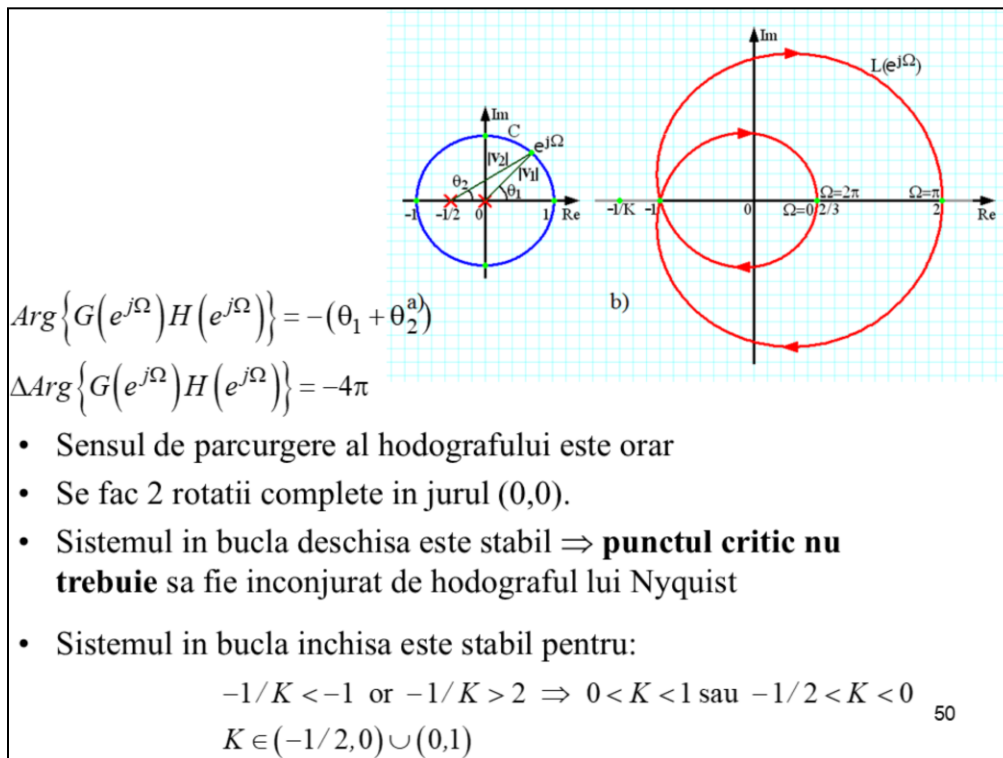
- Valorile maxime si minime pentru v_2

$$\Omega = 0, 2\pi: \left| G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) \right| = 2/3$$

$$\Omega = \pi: \left| G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) \right| = 2$$

49

Se consideră sistemul în buclă deschisă cu funcția de transfer din prima ecuație. Această funcție de transfer nu are nici un zero. Ea are 2 poli în zero și în $-1/2$. Ambii poli fiind în interiorul cercului unitate, sistemul în buclă deschisă este stabil. Deși hodograful său se poate construi pe baza părților reală și imaginară ale răspunsului în frecvență al sistemului în buclă deschisă (care se obține înlocuind z cu $\exp(j\Omega)$ în expresia funcției de transfer ca în cea de a treia ecuație) vom prefera să folosim pentru construcția hodografului metoda grafică (descrisă în capitolul despre transformata z). Construim vectorii cu originile în cei doi poli : v_1 cu originea în 0 și v_2 cu originea în $-1/2$ și cu vârfurile într-un punct de pe cercul unitate. Acești vectori formează cu axa reală unghiurile θ_1 și θ_2 . Se observă că $v_1 = z$ și că $v_2 = z - (-1/2)$, atunci când z se deplasează pe cercul unitate. Deci răspunsul în frecvență al sistemului în buclă deschisă este egal cu $1/(v_1 v_2)$, care mai poate fi pus în forma din ecuația a patra. Întrucât modulul lui v_1 este egal cu 1, obținem expresia din cea de a cincea ecuație. Cea mai mare valoare a modulului lui v_2 se obține atunci când $\Omega = 0$ sau când $\Omega = 2\pi$ și este egală cu $3/2$. Atunci unghiurile θ_1 și θ_2 sunt egale cu 0 respectiv cu 2π . Deci argumentul răspunsului în frecvență care este egal cu $\theta_1 + \theta_2$ ia valorile 0 respectiv -4π . Cea mai mică valoare a modulului lui v_2 se obține când $\Omega = \pi$ și este egală cu $1/2$. Atunci unghiurile θ_1 și θ_2 iau valoarea π iar argumentul răspunsului în frecvență al sistemului în buclă deschisă ia valoarea 2π . Valorile corespunzătoare ale modulului răspunsului în frecvență al sistemului în buclă deschisă sunt $2/3$ și 2.

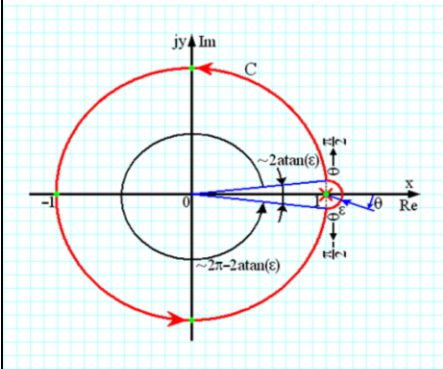


Se obțin punctele de intersecție a hodografului cu axa reală de coordonate (2/3,0) și (0,0) reprezentate cu verde. Deoarece amândoi polii funcției de transfer a sistemului în buclă deschisă sunt în interiorul cercului unitate, valoarea variației argumentului lui $L(z)$ când z parcurge o dată cercul unitar în sens antiorar este de -4π , deci hodograful sistemului în buclă deschisă va încercui de două ori originea sistemului de coordonate. În consecință, hodograful sistemului în buclă deschisă va mai intersecta o dată axa reală, în punctul de coordonate (-1,0). Hodograful ia forma trasată cu linie roșie.

Deoarece sistemul în buclă deschisă este stabil, pentru ca sistemul în buclă închisă să fie stabil este necesar ca hodograful să nu intersecteze punctul critic. De aceea, fie $-1/K$ trebuie să fie mai mic decât -1, fie $-1/K$ trebuie să fie mai mare decât 2.

Deci sistemul în buclă închisă rămâne stabil dacă K aparține reuniunii dintre intervalele $(-1/2, 0)$ și $(0, 1)$.

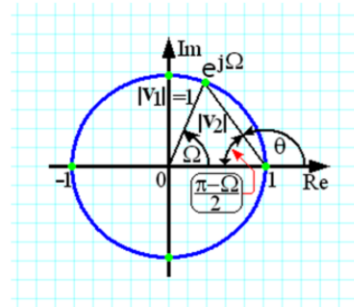
Exemplul #2



conturul cercului unitar C se modifica prin adaugarea unui semicerc de raza $\epsilon \rightarrow 0$, care pastreaza polii in interiorul conturului.

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z(z-1)}: \text{pol pe cercul unitar}$$

$$\Rightarrow G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{v_1 v_2} e^{-j(\Omega+\theta)} = \frac{1}{v_2} e^{-j(\Omega+\theta)}$$

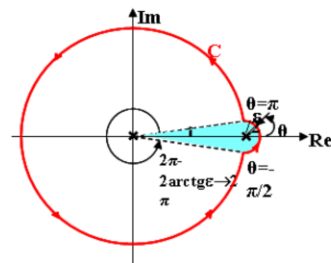
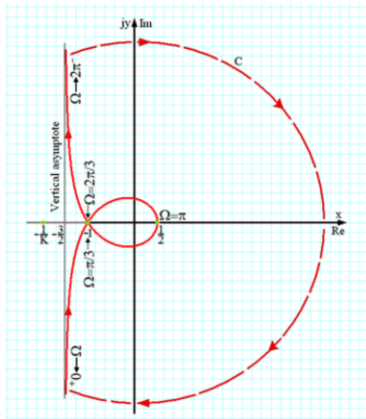


partea noului contur corespunzand cercului unitar

51

Ω	θ	Modul	Faza	Observatii
$\pi/3$	$2\pi/3$	1	$-\pi$	
π	π	$1/2$	-2π	$x=-3/2$ asimptota verticala

$$\Delta \text{Arg} \left\{ G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) \right\} = -(\pi/2 + \pi/2) = -\pi$$



Sistemul in bucla inchisa
stabil daca:

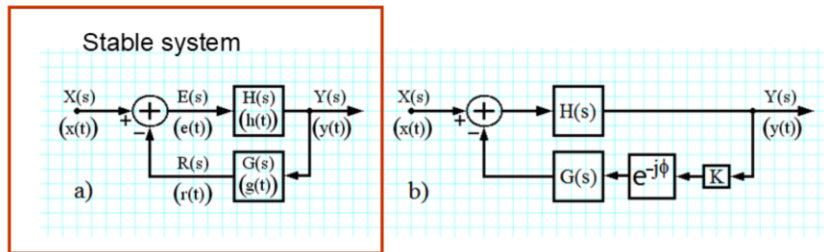
$$-1/K < 1 \text{ sau } 0 < K < 1.$$

52

Rezerva de amplificare si de faza

Uneori este interesant sa se stie, pentru un sistem stabil, in ce masura poate fi modificata amplificarea sistemului si ce defazaj suplimentar poate fi introdus in sistem in asa fel incat el sa ramana stabil.

Se consideră sistemul cu reacție din stânga stabil. Vrem să aflăm care pot fi valorile amplificării K și a defazajului φ care pot fi adăugate, ca în sistemul cu reacție din dreapta, în așa fel încât noul sistem să fie încă stabil. Prin modificarea lui K sau a lui φ , unul dintre polii funcției de transfer a sistemului în buclă închisă poate ajunge pe axa imaginară și sistemul în buclă închisă poate să devină instabil. Expresia numitorului răspunsului în frecvență al sistemului cu reacție negativă din figura din dreapta este $1 + K \exp(-j\varphi) H(j\omega) G(j\omega)$. Prin modificarea lui K sau a lui φ , unul dintre polii funcției de transfer a sistemului cu reacție negativă poate ajunge pe axa imaginară la frecvența ω_0 și sistemul poate deveni instabil. Valorile minime ale lui K (la $\varphi=0$) respectiv a lui φ (la $K=1$) pentru care sistemul din dreapta devine instabil se numesc margini de amplificare respectiv de fază.



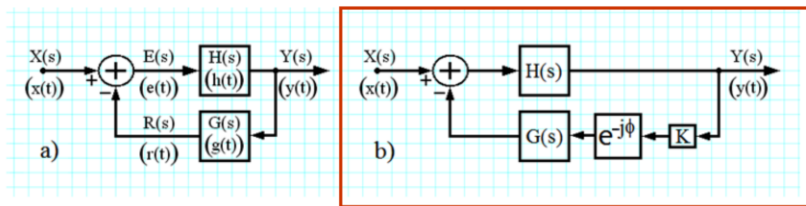
Se numeste margine de amplificarea a sistemului din stanga, valoarea minima a lui K pentru care sistemul din dreapta, pentru $\phi = 0$ devine instabil.

Se numeste margine de faza a sistemului din stanga, valoarea minima a lui ϕ , pentru $K = 1$, pentru care sistemul din dreapta devine instabil.

$$1 + H(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega}) \cdot K \cdot e^{-j\phi} = 0$$

Prin modificarea lui K sau a lui ϕ unul dintre polii functiei de transfer in bucla inchisa poate ajunge pe axa imaginara, in punctul $j\omega_0$:

$$Ke^{-j\phi} H(j\omega_0) G(j\omega_0) = -1$$



Conditia de instabilitate pentru al doilea sistem:

$$1 + H(e^{j\omega})G(e^{j\omega}) \cdot K \cdot e^{-j\phi} = 0$$

Modificand K sau $\phi \Rightarrow$ unul dintre polii sistemului in bucla inchisa se duce pe axa imaginara, in pozitia $j\omega_0$.

$$\text{Exemplu. } G(s)H(s) = \frac{4\left(1 + \frac{1}{2}s\right)}{s(1+2s)\left[1 + 0,05s + (0,125s)^2\right]}.$$

Deoarece sistemul in bucla deschisa este stabil, pentru ca sistemul in bucla inchisa sa ramana stabil este necesar ca punctul critic sa ramana in exteriorul hodografului.

Rezerva de amplificare va fi distanta, pe axa reala, de la punctul critic la intersectia hodografului cu axa reala negativa. Pentru $\varphi = 0$, ecuatia devine:

$$K |G(j\omega_0)H(j\omega_0)| e^{j \text{Arg}\{G(j\omega_0)H(j\omega_0)\}} = -1.$$

Deoarece primii 2 factori din membrul stang sunt pozitivi este necesar ca exponentiala complexa sa fie negativa.

$$\text{Fie } \omega_1 \text{ frecventa la care: } e^{j \text{Arg}\{G(j\omega_1)H(j\omega_1)\}} = -1 \Leftrightarrow \text{Arg}\{G(j\omega_1)H(j\omega_1)\} = -\pi.$$

La frecventa ω_1 are loc intersectia hodografului cu axa reala negativa.

$$\text{Rezerva de amplificare este } K = \frac{1}{|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|}.$$

$$\text{Fie } \omega_2 \text{ frecventa la care } |G(j\omega_2)H(j\omega_2)| = 1.$$

$$\text{Rezerva de faza va fi: } \varphi = \pi - \text{Arg}\{G(j\omega_2)H(j\omega_2)\}.$$

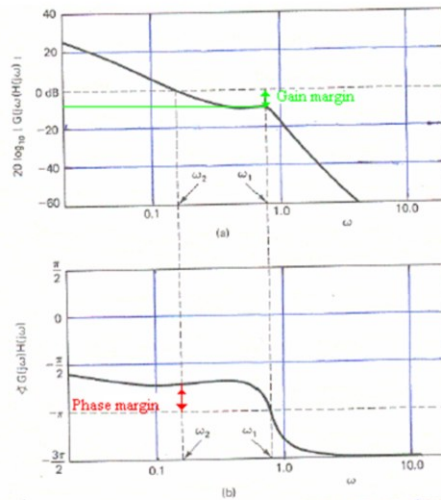
Rezerva de amplificare:

$$K = \frac{1}{|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|}$$

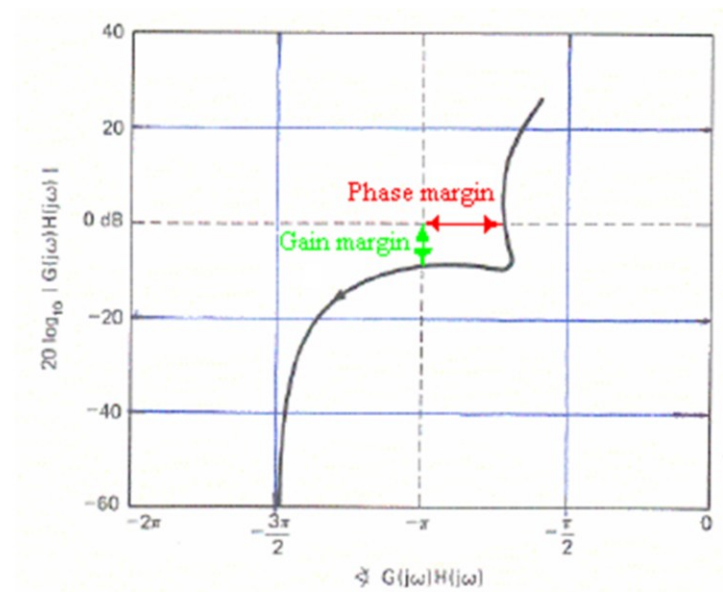
$$\omega_2 : |G(j\omega_2)H(j\omega_2)| = 1.$$

Rezerva de faza:

$$\varphi = \pi - \text{Arg}\{G(j\omega_2)H(j\omega_2)\}.$$



hodograful lui Nyquist pentru sistemul in bucla deschisa



58