



Departamentul de Comunicații  
UNIVERSITATEA POLITEHNICA  
TIMIȘOARA

Facultatea de Electronică Telecomunicații și Tehnologii Informaționale

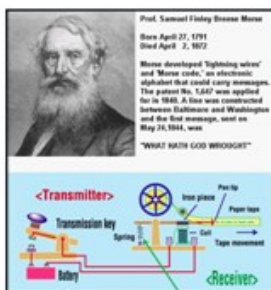
## Semnale aleatoare

Corina Naforrita  
corina.naforrita@upt.ro

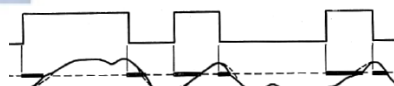
1

1

## Problemele de detecție au apărut odata cu telegraful Morse



Arcul prin tensionarea căruia se fixează pragul de detecție (detecție)



Forme de undă la emisie (sus) și la recepție (jos) Sursa: Alcatel-Lucent (Nokia)

2

2

Cam 100 de ani de când detecția avioanelor și  
estimarea direcției din care vin se făcea așa...



localizator acustic

[Aircraft detection before radar, 1917-1940 - Rare Historical Photos](#)

3

3

## NOROC CĂ S-A INVENTAT RADARUL!!!

Distanța până la țintă se determină măsurând  
timpul necesar undei electromagnetice să  
parcurească drumul RADAR-ȚINTĂ-RADAR



Antena radar

tintă



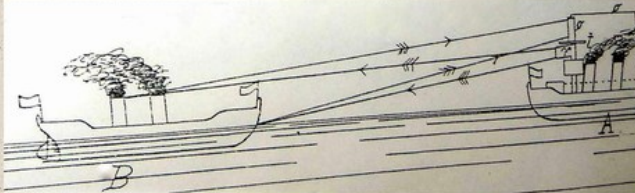
\*efectul Doppler!

4

4

Radarul a apărut în 1904, dar Amiralitatea germană nu i-a văzut utilitatea, preferând cornul (sirena) pentru ceață. În 1912 are loc tragedia scufundării vasului Titanic care, propabil, putea fi evitată...

Die Admiralität lehnt sein Radargerät ab  
– „die Nebelhörner sind besser“



Das RADAR  
1904 – Christian Hülsmeyer



5

5

De la RADAR-ul lui Huelsmeyer până la radarele de azi calea a fost lungă și a impus rezolvarea multor probleme de estimare și detecție



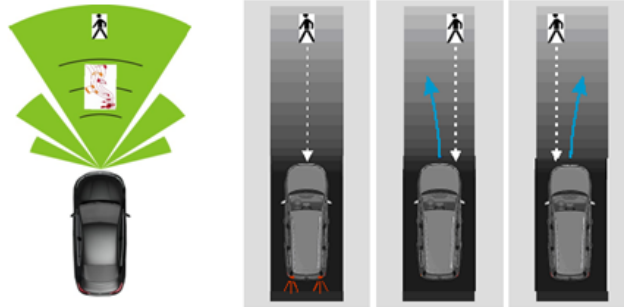
Radar pentru detectia  
avioanelor

[How it works - Flightradar24](https://www.flightradar24.com)

6

6

Reducerea costurilor a favorizat echiparea mașinilor cu aparate RADAR pentru evitarea accidentelor. Aceasta implică prelucrarea de semnale de nivel avansat și rezolvarea unor probleme de estimare și detecție



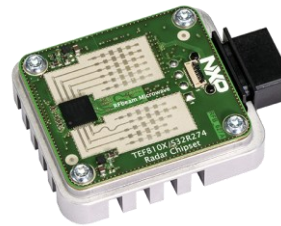
7

7

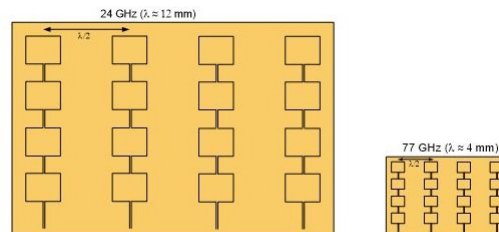
Cum arată un RADAR de uz "civil"....



24 GHz



77 GHz



Relative antenna sizes for 24GHz and 77GHz

8

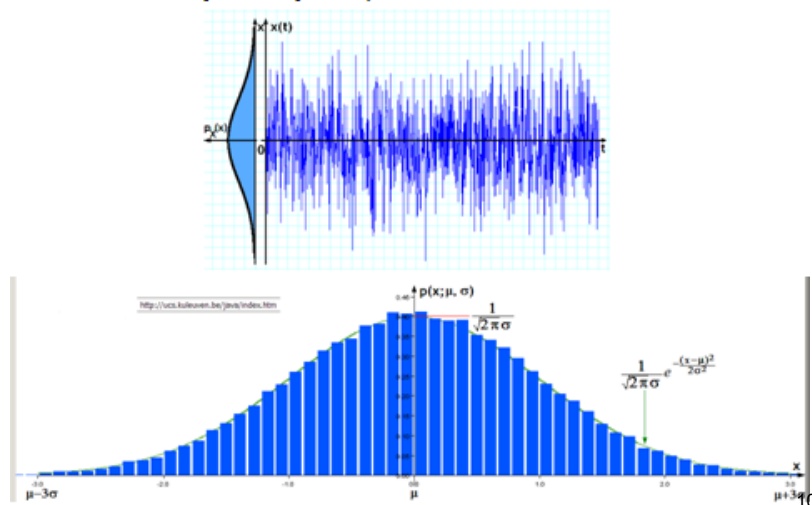
8

- Mașină Audi, subsidiară Volkswagen, echipată cu RADAR de 24GHz și RADAR de 77 GHz



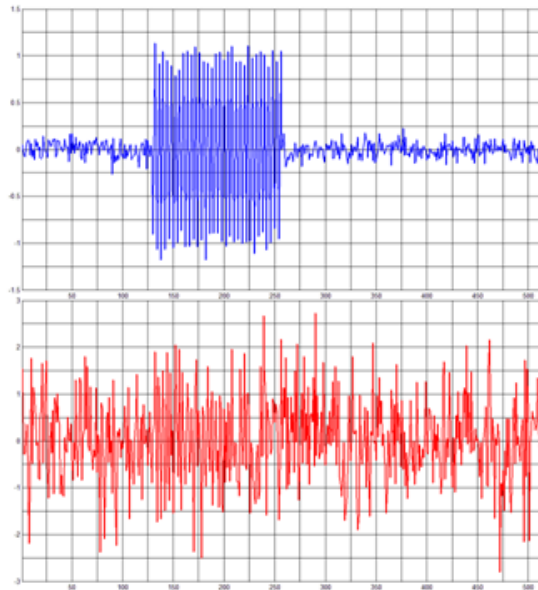
9

**“Inamicul public nr. 1”: zgomotul gaussian; evoluția în timp și repartiția statistică a valorilor**



10

Detecția unei ținte este mult îngreunată la rapoarte semnal/pe zgomot SNR mici



Semnal  
recepționat  
dacă raportul  
semnal/zgomot  
este mare

Semnal  
Recepționat  
dacă raportul  
semnal/zgomot  
este mic

11

O contribuție esențială la rezolvarea problemelor de detecție au avut-o doi statisticieni. Ei au urmărit creșterea probabilității de detecție, menținând probabilitatea “alarmei false” la un nivel impus, acceptabil



Jerzy Neyman 1894-1981



Egon Sharpe Pearson 1895-1980

12

# Teoria probabilităților și procese aleatoare

## Semnale aleatoare

- Valoarea lor instantanee nu poate fi prezisa, pentru ca nu au expresii analitice.
- Astfel de semnale pot fi analizate pe baza proprietatilor lor statistice.
- Material complet pe campus
- <https://cv.upt.ro/mod/resource/view.php?id=361307>

13

13

## Cateva definitii utile

- Efectuand acelasi **experiment aleator** in conditii identice se obtin rezultate diferite. Exemplu **Zarul**
- $\Omega$  - multimea tuturor rezultatelor posibile pentru un experiment aleator – SPATIUL EVENIMENTELOR.
- $\omega$  -un rezultat posibil-EVENIMENT ELEMENTAR.
- O submultime a lui  $\Omega$  compusa din catevaevenimente elementare - EVENIMENT.

Fie evenimentul:  $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ . Spunem ca evenimentul A a aparut daca in urma efectuarii experimentului aleator s-a obtinut unul dintre rezultatele  $\omega_1, \omega_2$ , sau  $\omega_3$

- $\Omega$ -EVENIMENTUL SIGUR;  $\emptyset$  -EVENIMENTUL IMPOSIBIL

14

14

Daca intersectia a doua evenimente este  $\emptyset$  atunci acestea sunt **EVENIMENTE INCOMPATIBILE**.

Evenimentele  $A_i$  a caror reuniune este egala cu  $\Omega$  formeaza un **GRUP COMPLET DE EVENIMENTE**.

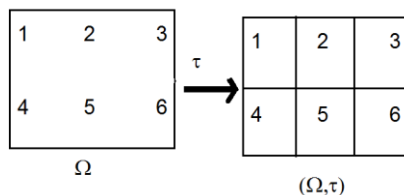
Ele realizeaza PARTITIA  $\tau$  a SPATIULUI EVENIMENTELOR.

Spatiul evenimentelor  $\Omega$  asociat cu partitia  $\tau$  reprezinta SPATIUL PROBABILIZABIL  $(\Omega, \tau)$ .

Exemplu. Zarul  $\rightarrow$  Evenimentul sigur  $\{1,2,3,4,5,6\}$ . Evenimentul imposibil  $\{7\}$ .

Cele 2 evenimente sunt incompatibile.

$\{A_1=\{1\}, A_2=\{2\}, A_3=\{3\}, A_4=\{4\}, A_5=\{5\}, A_6=\{6\}\}$  -Grup complet de evenimente incompatibile.



15

## Definitia probabilitatii

O functie definita pe  $(\Omega, \tau)$  cu valori intre  $[0, 1]$ , notata cu  $P$ , cu urmatoarele proprietati:

$P(\emptyset)=0$ ,  $P(\Omega)=1$ ,

- Daca evenimentele  $A_i$  sunt incompatibile 2 cate 2 atunci:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Spatiul  $(\Omega, \tau)$  asociat cu probabilitatea  $P$  reprezinta un spatiu PROBABILIZAT  $(\Omega, \tau, P)$ . **Cateva reguli pentru calculul probabilitatilor.**

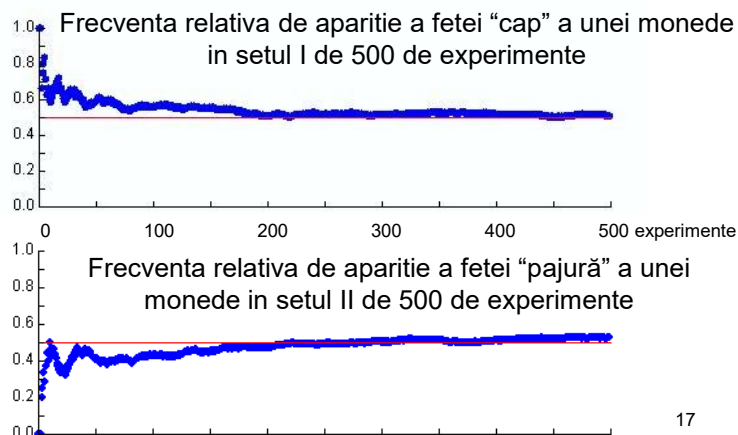
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ultimul termen din membrul drept reprezinta probabilitatea comuna a celor doua evenimente.

16

## Frecvența unui eveniment, metodă empirică de estimare a probabilității evenimentului

Experimente de aruncare a monedei, ce arată că “pajura” și “capul” cad cam de același număr de ori, în cazul unor serii lungi.



17

17

Dacă evenimentele  $A$  și  $B$  sunt incompatibile atunci:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0; \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dacă apariția evenimentului  $A$  este condiționată de apariția evenimentului  $B$  atunci se spune că EVENIMENTUL  $A$  este condiționat de evenimentul  $B$  și se folosește notația  $A|B$ .

## Regula lui Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dacă:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Atunci evenimentele  $A$  și  $B$  se numesc INDEPENDENTE și regula lui Bayes devine:

$$P(A|B) = P(A).$$

18

# Variabile aleatoare (v.a.)/Random Variables (r.v.)

- O **variabilă aleatoare reală** este o funcție definită pe un spațiu probabilizat cu valori într-o mulțime de numere reale.
- Dacă mulțimea valorilor este finită sau numărabilă atunci variabila aleatoare reală se numește **DISCRETĂ**.
- Variabila aleatoare  $X$  pune în corespondență evenimentul  $A_i$  (care apare cu probabilitatea  $P(A_i)$ ) cu valoarea  $x_i$ .
- Deci valoarea  $x_i$  apare cu probabilitatea  $P(A_i)=P_i$ .

Asocierea valorii  $x_i$  evenimentului  $A_i$  este descrisă de:

- Funcția de repartiție (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION);
- Densitatea de probabilitate (PROBABILITY DENSITY FUNCTION pdf)
- Funcția caracteristică (CHARACTERISTIC FUNCTION)

a v.a. considerate

19

Notiuni introductive: funcția cumulativă de repartiție (cumulative density function cdf) și densitatea de probabilitate/repartiție (probability density function)

Pentru o variabilă aleatoare (v.a.) continuă se definește funcția cumulativă de repartiție  $F_X(x)$  prin:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad (A2.3)$$

Se poate cere este probabilitatea ca variabila aleatoare (v.a.)  $X$  să ia valori sub un nivel fixat,  $x$ .

Funcția  $F_X(x)$  are următoarele proprietăți remarcabile:

1.  $F_X(-\infty) = 0$
  2.  $F_X(\infty) = 1$
  3.  $F_X(x)$  nu este descrescătoare
- } (A2.4)

Densitatea acestei funcții se numește densitate de probabilitate sau densitatea de repartiție a v.a. continue:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (A2.5)$$

20

20

Este evident că

$$f_X(x) dx = P\{x < X \leq x + dx\} \quad (A2.6)$$

și pentru  $\Delta x$  suficient de mic

$$f_X(x) \Delta x \approx P\{x \leq X < x + \Delta x\} \quad (A2.7)$$

Prin urmare ar fi a fi o din domeniul de valori ale v.a. continue,

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a) \quad (A2.8)$$

Probabilitatea ca o variabilă aleatoare <sup>continuă</sup>  $X$  să ia o <sup>micșorare</sup> valoare în <sup>un</sup> <sup>interval</sup> este dată de:

$$P\{X=a\} = P\{a < X \leq a\} = \int_a^a f_X(x) dx = F_X(a) - F_X(a) = 0 \quad (A2.9)$$

21

21

Este evident că

$$f_X(x) dx = P\{x < X \leq x + dx\} \quad (A2.6)$$

și pentru  $\Delta x$  suficient de mic

$$f_X(x) \Delta x \approx P\{x \leq X < x + \Delta x\} \quad (A2.7)$$

Prin urmare ar fi a fi o din domeniul de valori ale v.a. continue,

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a) \quad (A2.8)$$

Probabilitatea ca o variabilă aleatoare <sup>continuă</sup>  $X$  să ia o <sup>micșorare</sup> valoare în <sup>un</sup> <sup>interval</sup> este dată de:

$$P\{X=a\} = P\{a < X \leq a\} = \int_a^a f_X(x) dx = F_X(a) - F_X(a) = 0 \quad (A2.9)$$

22

22

# Mediere statistica

## A3. Operatorul de mediere statistică $E\{\cdot\}$

Media ponderată cu probabilitatea de apariție a valorii este așa numită "mediu statistic". Operatorul de calcul este:

$$E\{X\} = \sum_i x_i p_X(x_i) \quad (A3.1)$$

putem extinde-l la toate valorile  $x_i$  posibile, pentru o v.a. discretă sau:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \quad (A3.2)$$

pentru o v.a. continuă.

23

23

În ambele cazuri, operatorul de mediere statistică este un operator liniar. Avem deci:

$$E\{aX + b\} = aE\{X\} + b \quad (A3.3)$$

Dacă dorim, putem media statistic o funcție de v.a.  $X$ ,  $g(X)$ . Avem:

$$E\{g(X)\} = \sum_i g(x_i) p_X(x_i) \quad (A3.4)$$

dacă  $X$  este o v.a. discretă sau

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \quad (A3.5)$$

dacă  $X$  este o v.a. continuă.

24

24

## Momentele de ordin n

În legătură cu operatorul de mediere statistice vom da momentele de ordin n pentru v.a.  $X$  și pentru v.a. centrată  $X - E\{X\}$ :

$$E\{X^n\} = \sum_i x_i^n p_X(x_i) \quad ; \quad E\{X^n\} = \int_a^b x^n p_X(x) dx \quad (A3.6)$$

$$E\{(X - E\{X\})^n\} = \sum_i (x_i - \mu_X)^n p_X(x_i) \quad ; \quad E\{(X - E\{X\})^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^n p_X(x) dx \quad (A3.7)$$

unde am notat media cu  $\mu_X$ :

$$E\{X\} = \mu_X \quad (A3.8)$$

Momentele de ordinul doi  $E\{X^2\}$  și  $E\{(X - \mu_X)^2\}$  au semnificații aparte.

Astfel

$$E\{X^2\} = P_X \quad (A3.9)$$

este puterea ratărilor aleatoare.

25

25

## Varianța/dispersia

"Componenta continuă" a v.a.  $X$  este chiar  $\mu_X$ . În jurul ei fluctuează v.a., fluctuația fiind  $X - \mu_X$ . Media fluctuației este evident zero:

$$E\{X - \mu_X\} = E\{X\} - \mu_X = \mu_X - \mu_X = 0 \quad (A3.10)$$

iar puterea ei poate denumi de "varianță" sau "dispersia" v.a.

$$\text{Disp}\{X\} = E\{(X - \mu_X)^2\} \quad (A3.11)$$

și este chiar momentul central de ordinul doi al v.a.  $X$ . Avem:

$$\begin{aligned} \text{Disp}\{X\} &= E\{X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2\} = E\{X^2\} - 2\mu_X E\{X\} + \mu_X^2 \\ &= E\{X^2\} - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 \end{aligned}$$

și deci:

$$\text{Disp}\{X\} = E\{X^2\} - \mu_X^2 = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 \quad (A3.12)$$

sau

$$E\{X^2\} = \mu_X^2 + \text{Disp}\{X\} \quad (A3.12b)$$

Puterea variabilității aleatoare este suma dintre puterea mediei și puterea de fluctuație.

26

26

Operatorul  $\text{Dif} f(x)$  nu este un operator liniar. Pentru el sunt valabile următoarele reguli de calcul:

$$1. \text{Dif} f(x) = 0, \quad f = \text{const.}$$

$$2. \text{Dif} f(ax) = a^2 \text{Dif} f(x), \quad a = \text{const.} \quad (A.3.13)$$

$$3. \text{Dif} f(ax + b) = a^2 \text{Dif} f(x).$$

27

27

## Repartitia normala

7. Variabile aleatoare continuă cu repartiție normală sau gaussiană.

Parametrii de care depinde repartiția normală sunt media  $\mu$  și dispersia  $\sigma^2$ . Faptul că o variabilă aleatoare este repartizată normal se marchează, simbolic, prin

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad (A.6.19)$$

Densitatea de probabilitate a unei astfel de variabile aleatoare este:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (A.6.20)$$

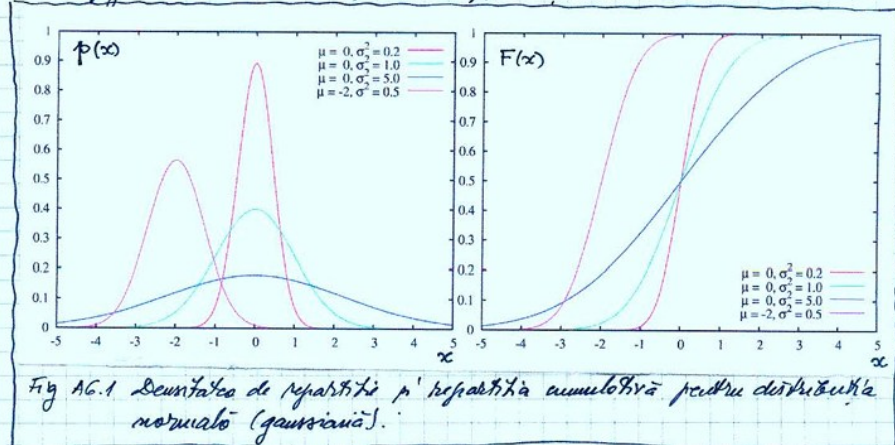
iar repartiția cumulativă are forma:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} du \quad (A.6.21)$$

28

28

În figura A6.1 sunt reprezentate  $f_X(x)$  și  $F_X(x)$  pentru patru medii



29

29

Funcția de repartiție cumulativă a v.a. cu repartiție normală standard  
se poate nota cu  $\Phi^*(x)$  și ea este tabelată:

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (A6.26)$$

Este ușor de vădit că, pentru  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , putem exprima  $F$  prin  $\Phi^*$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{v=\frac{u-\mu}{\sigma}}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \Phi^*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (A6.27)$$

Funcția caracteristică aferentă repartiției normale  $N(\mu, \sigma)$  este

$$\phi(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \quad (A6.28)$$

(Nu trebuie confundată funcția caracteristică  $\phi$  cu funcția de repartiție cumulativă a v.a. normale standard)

30

30

Recurgând la funcția tabelată  $\phi^*$  putem determina probabilitatea ca o v.a. cu repartiție normală să se afle într-un interval  $[a, b]$

$$P\{a \leq X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) = \phi^*\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad (A6.29)$$

Dacă luăm un interval  $\sigma$  mai larg  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ :

$$P\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\} = 2\phi^*(3) - 1$$

și cum  $\phi^*(3) = 0,9986$  rezultă că

$$P\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\} = 0,9972 \approx 99,72\% \quad (A6.33)$$

ceea înseamnă că doar foarte rar valorile v.a.  $X$  se vor abate cu mai mult de  $\pm 3\sigma$  de la media  $\mu$ .

### Three sigma limits / Regula celor 3 sigma

31

31

În figura A6.2 se dau probabilitățile, pe subintervale, pentru ca v.a. să intre în acele subintervale.

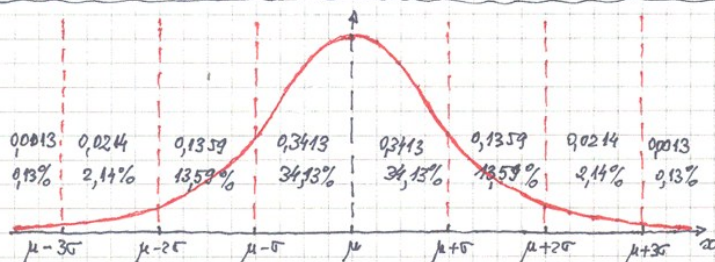


Fig A6.2 Probabilitățile cu care o v.a. gaussiană ia valori în diferite subintervale din jurul valorii medii

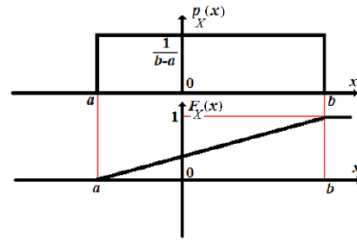
32

32

### Un exemplu. Repartitia uniforma

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

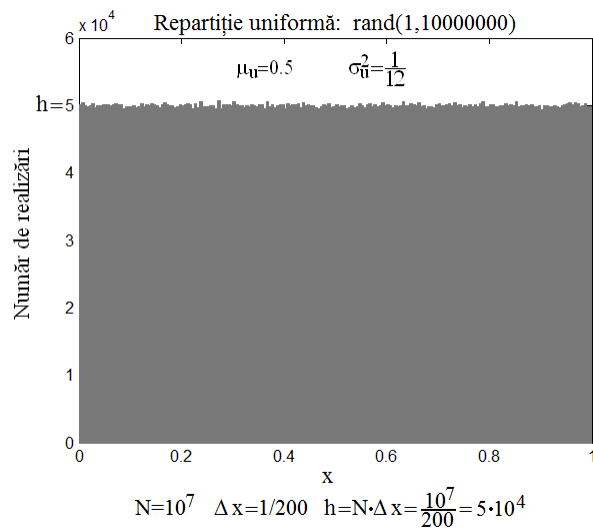
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(u) du = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \\ 1, & x > b \end{cases}$$



33

33

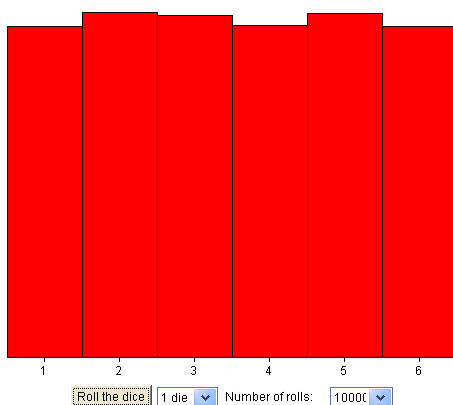
### Pentru cazul simulării unor v.a. cu repartiție uniformă...



34

34

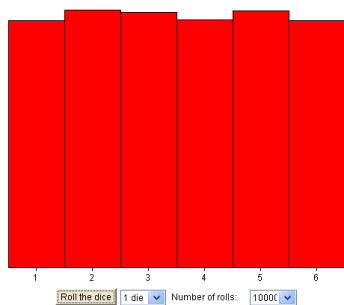
## Histograma, modalitate empirică de estimare a densitatii de probabilitate



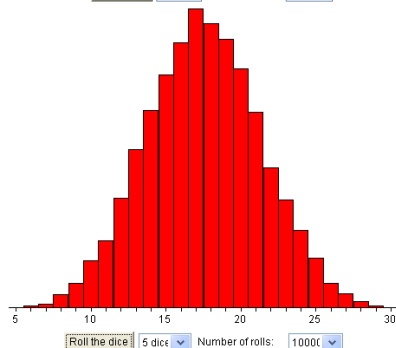
Dacă se aruncă un zar de foarte multe ori, fiecare față a sa apare cam de același număr de ori. Avem de-a face cu o variabilă aleatoare discretă cu repartiție uniformă

35

35



Dacă se aruncă un zar de foarte multe ori, fiecare față a sa apare cam de același număr de ori. Avem de-a face cu o variabilă aleatoare cu repartiție uniformă.

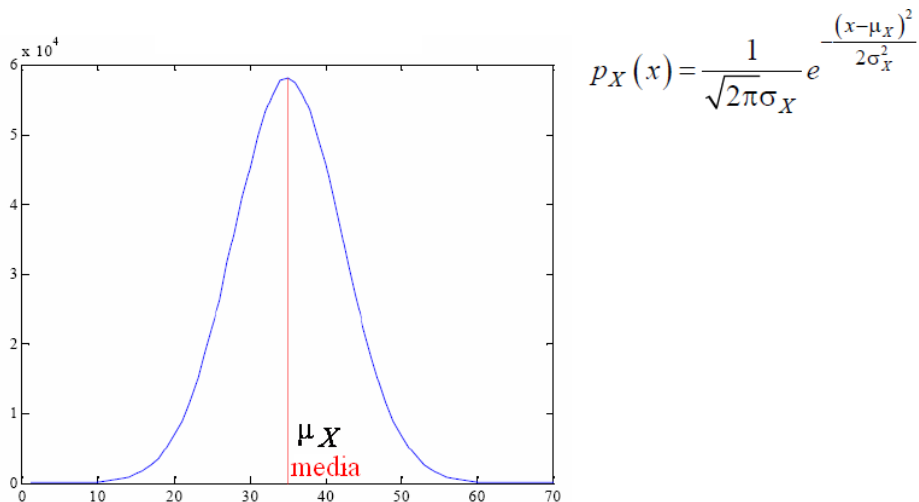


Dacă se aruncă simultan 5 zaruri și se însumează punctele (de la 5 la 30) se obține o v.a. discretă cu repartiție Gaussiană. Deci suma unor v.a. cu repartiție uniformă conduce la o v.a. cu repartiție Gaussiană !

36

36

## Alt exemplu. Repartiția Gaussiană

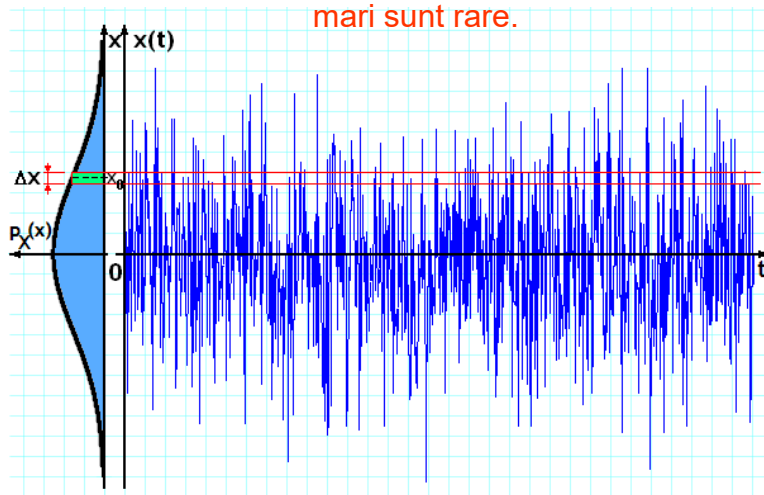


37

37

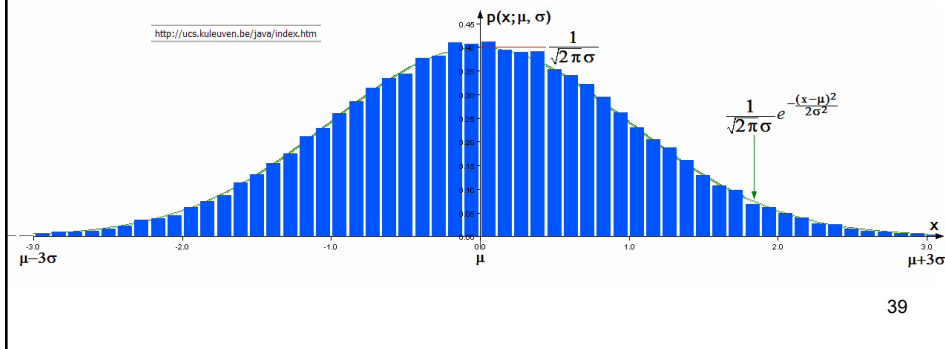
Evoluția în timp a unui semnal cu repartiție gaussiană și repartiția amplitudinilor sale, ilustrată prin densitatea de probabilitate.

Probabilitatea ca valorile semnalului să fie cuprinse într-o bandă  $\Delta x$ , centrată pe  $x_0$ , este numeric egală cu aria marcată cu verde. Valorile mici ale semnalului sunt predominante, în timp ce valorile mari sunt rare.



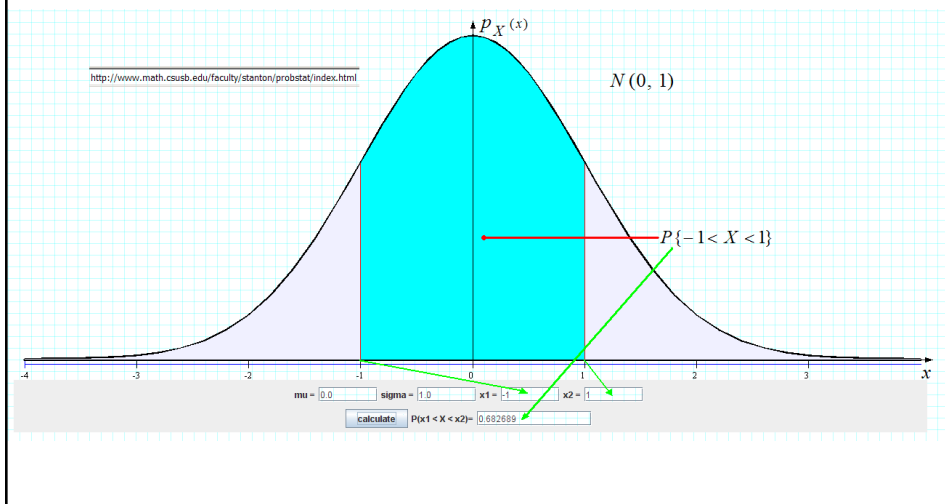
38

O histogramă a unei variabile aleatoare Gaussiene. Fiecare dreptunghi are aria numeric egală cu frecvența relativă de apariție a unei valori ce se încadrează în intervalul corespunzător. Se observă existența unor fluctuații statistice, ce determină abateri de la curba gaussiană ideală, abateri cauzate de lungimea finită a semnalului.



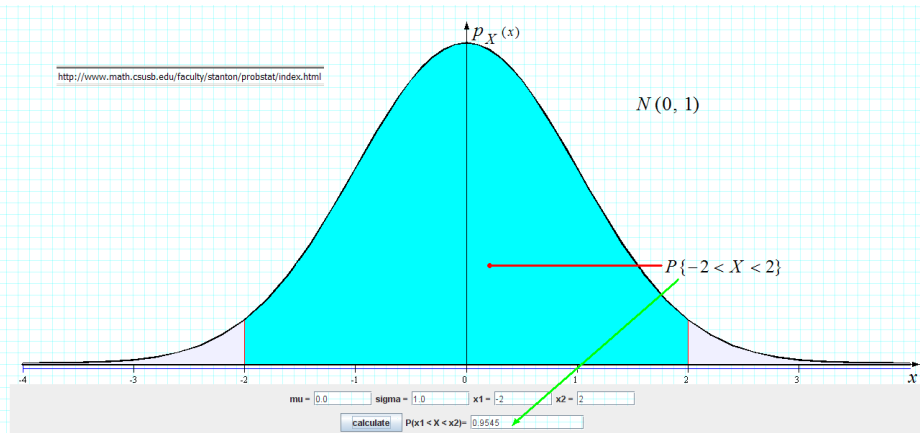
39

Probabilitatea ca valorile pe care le ia o variabilă aleatoare gaussiană să fie cuprinse în intervalul  $(-\sigma, \sigma)$  este de ~68.3%



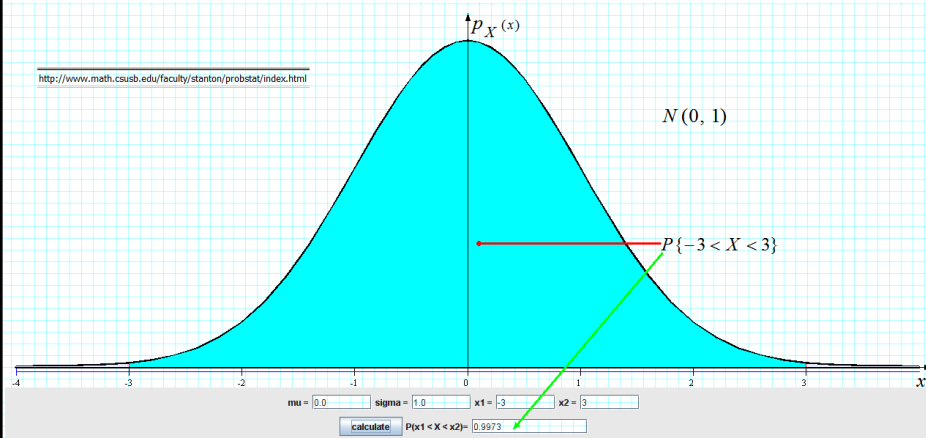
40

Probabilitatea ca valorile pe care le ia o variabilă aleatoare gaussiană să fie cuprinse în intervalul  $(-2\sigma, 2\sigma)$  este de  $\sim 95.45\%$



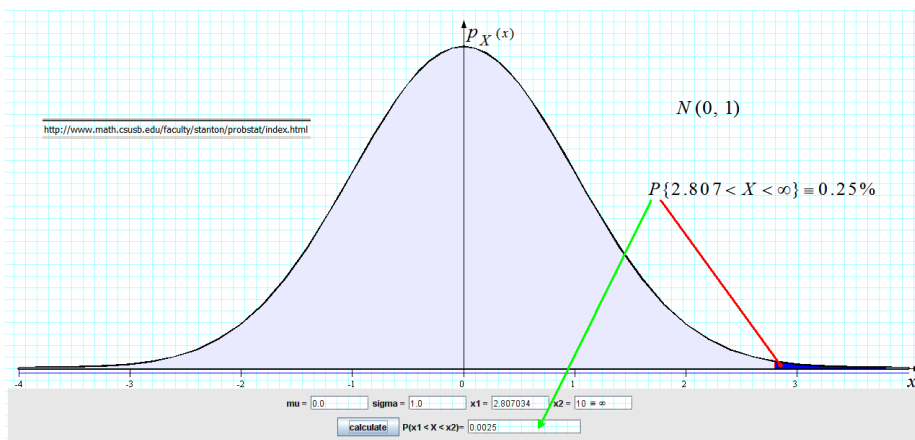
41

Probabilitatea ca valorile pe care le ia o variabilă aleatoare gaussiană să fie cuprinse în intervalul  $(-3\sigma, 3\sigma)$  este de  $\sim 99.73\%$



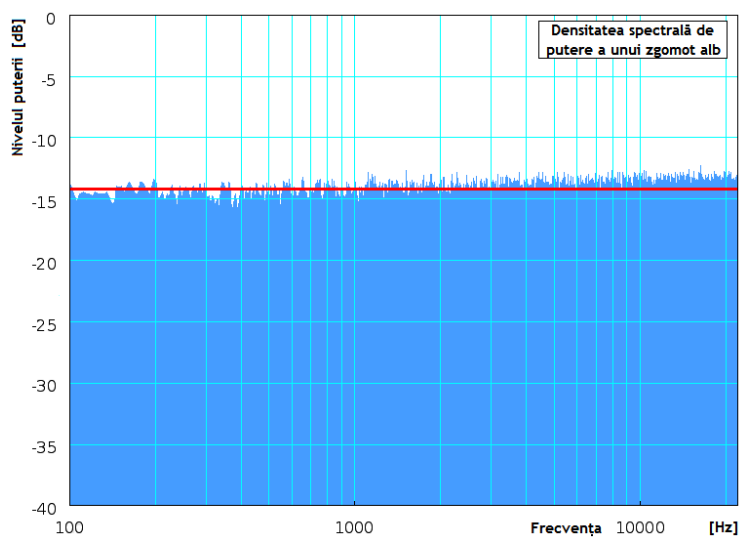
42

Probabilitatea ca valorile pe care le ia o variabilă aleatoare gaussiană să depășească pragul de  $2.807\sigma$  este de  $\sim 0.25\%$



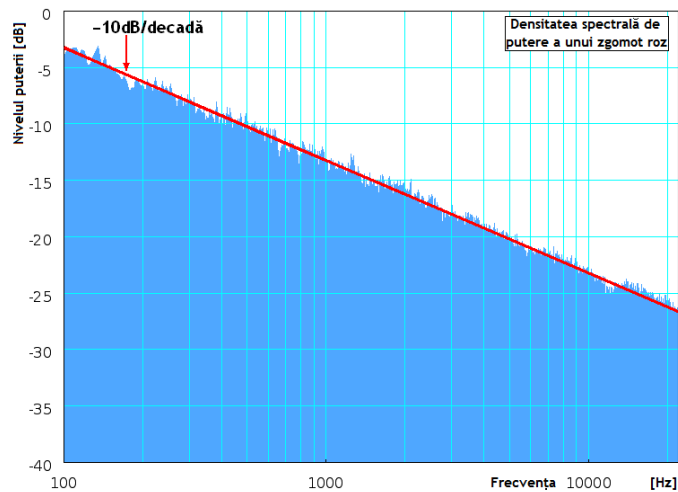
43

Un zgomot (semnal aleator) ce are densitatea spectrală de putere constantă, în toată banda de frecvențe, se numește "zgomot alb". Zgomotul alb nu este în mod necesar și gaussian, iar un zgomot gaussian nu este în mod necesar și alb



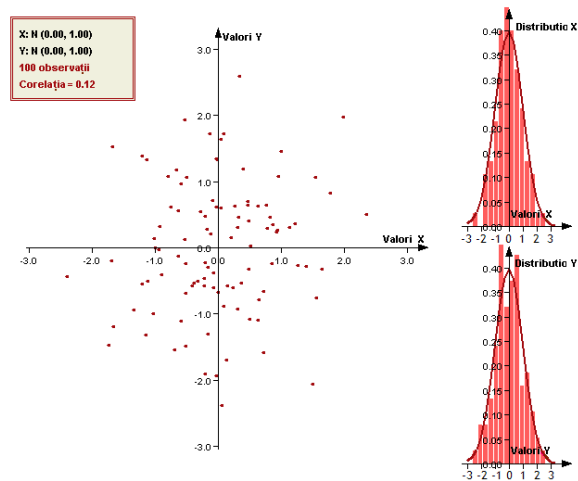
44

Dacă densitatea spectrală de putere nu este constantă în banda de frecvențe, zgomotul se spune că este “colorat”. Dacă densitatea spectrală de putere cade cu 10 dB/decadă se spune că zgomotul este “roz”



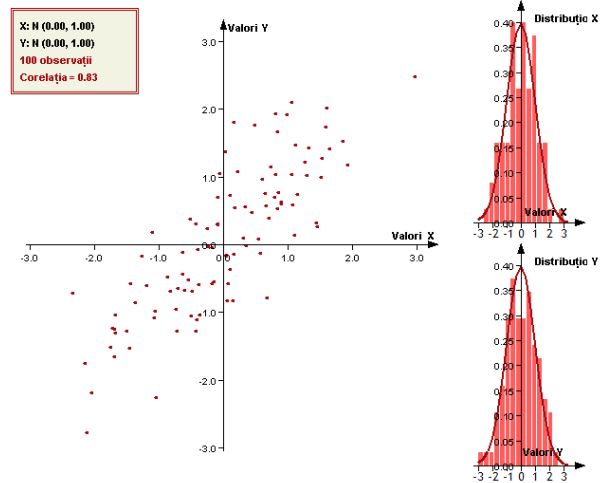
45

Cazul unei repartiții mutuale a două semnale aleatoare gaussiene, ortogonale, necorelate. “Diagrama de impact” are o simetrie aproximativ circulară. Coeficientul de corelație recalculat este mic ( $\sim 0.12$ ) dar nu e nul, deoarece numărul de realizări este mic (doar de 100 de perechi)



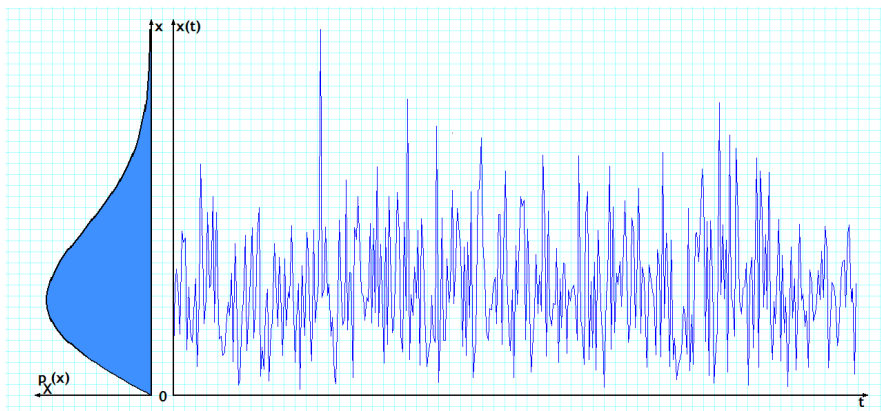
46

Cazul unei repartiții mutuale a două semnale aleatoare gaussiene, ortogonale, corelate. “Diagrama de impact” are o formă aproximativ eliptică. Coeficientul de corelație recalculat este mare ( $\sim 0.83$ ) dar nu e unitar, deoarece numărul de realizări este mic (doar de 100 de perechi)



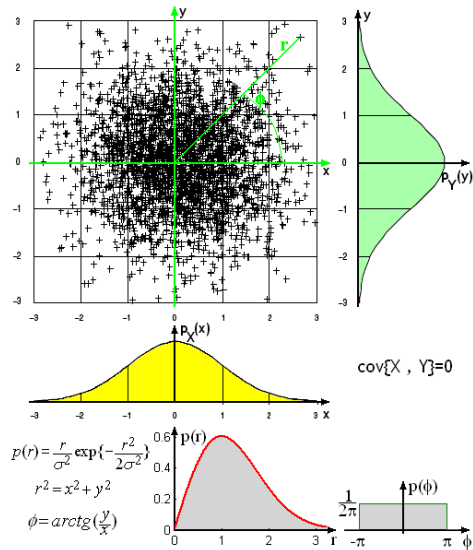
47

Semnal aleator cu repartiție Rayleigh. Valorile semnalului sunt doar pozitive



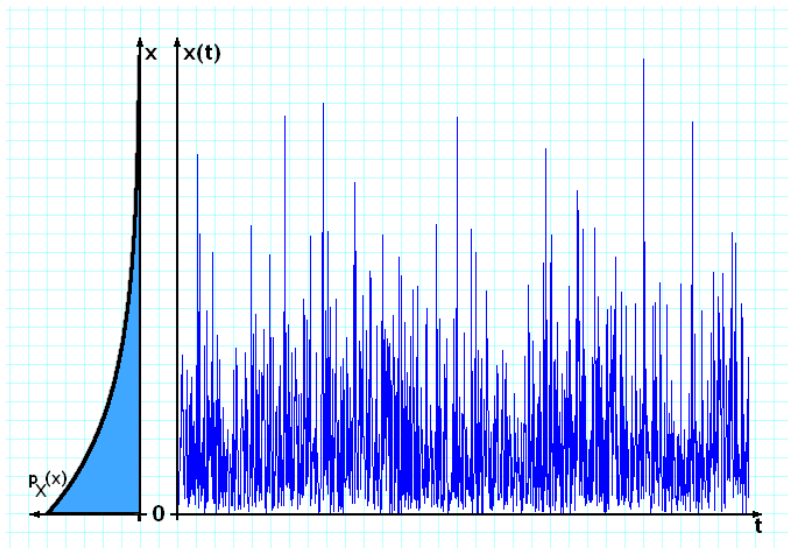
48

Repartiția Rayleigh apare ca repartiție a modulului “ $r$ ” al unui vector de poziție din diagrama de impact, atunci când este vorba de repartiția mutuală a două variabile aleatoare gaussiene, necorelate și ortogonale. Faza  $\phi$  a vectorului de poziție, în acest caz, are o repartiție uniformă



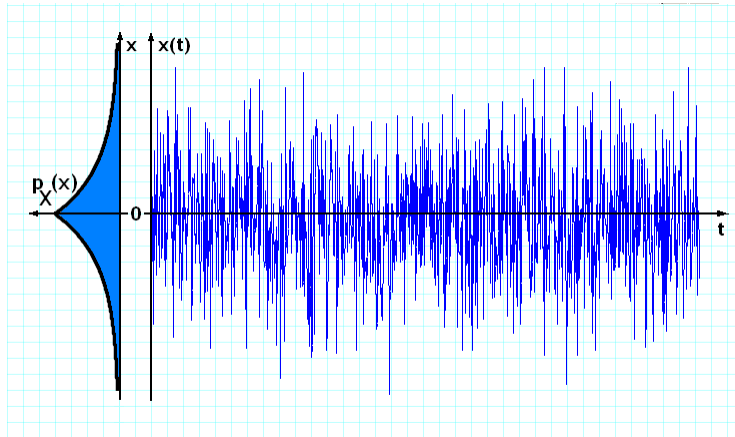
49

Semnal aleator cu repartiție exponențială. Valorile semnalului sunt doar pozitive



50

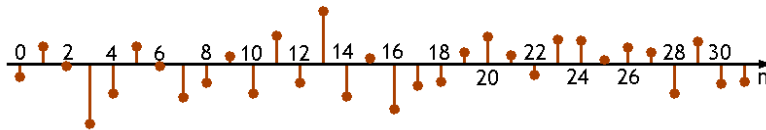
Semnal aleator cu repartiție laplaviană. Valorile mici ale semnalului sunt relativ dese, dar nici valorile mari nu apar foarte rar



51

Se consideră că zgomotul ce afectează aditiv semnalele deterministe este alb, gaussian, cu eșantioanele statistic independente și identic distribuite (IID)

$$x[n]=w[n], \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad w[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$



Autocorelația eșantioanelor de zgomot este

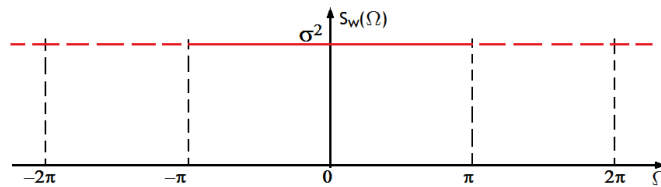
$$R[n,m] = E\{w[n]w[m]\} = \sigma^2 \delta[n-m] = \begin{cases} \sigma^2 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

iar densitatea sa spectrală de putere, transformata Fourier a autocorelației se poate determina imediat

$$S_w(\Omega) = \sigma^2, \quad -\pi \leq \Omega < \pi$$

52

După cum se vede densitatea spectrală de putere este constantă în toată banda de frecvențe în timp discret, ceea ce justifică numele de zgomot alb



Densitatea de probabilitate este aceeași pentru fiecare eșantion

$$p(w[n]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(w[n])^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Deoarece eșantioanele de zgomot sunt statistic independente, repartiția mutuală a unui grup de eșantioane este produsul densităților de repartiție individuale ale eșantioanelor

53

$$p(w[1], w[2], \dots, w[N-1]) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(w[n])^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Dacă avem în vedere o notație vectorială

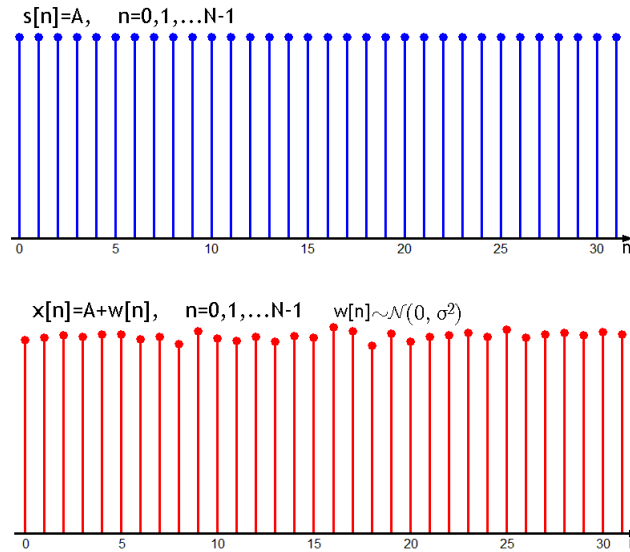
$$\mathbf{w} = [w[0] \quad w[1] \quad \dots \quad w[N-1]]^T$$

densitatea de repartiție a vectorului (de fapt densitatea de repartiție mutuală a celor N componente ale vectorului) devine

$$p(\mathbf{w}) = (2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (w[n])^2 \right\} = (2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{w}}{2\sigma^2} \right\}$$

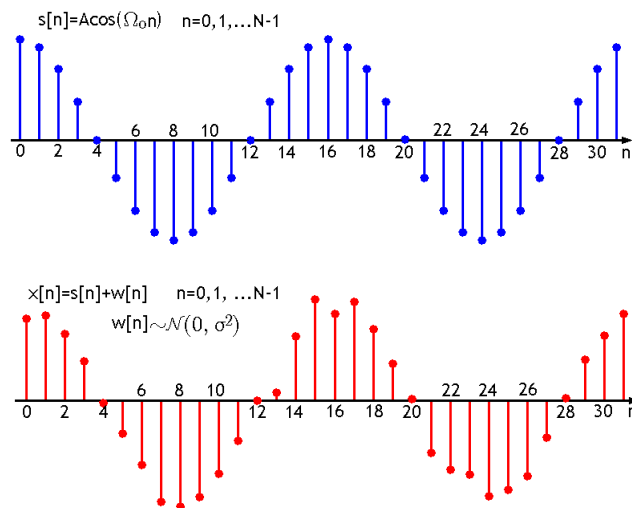
54

Semnalul determinist  $s[n]=A$  este afectat aditiv de zgomotul gaussian  $w[n]$ . Sunt accesibile experimentului doar eşantioanele  $x[n]$ , ce diferă de eşantioanele  $s[n]$



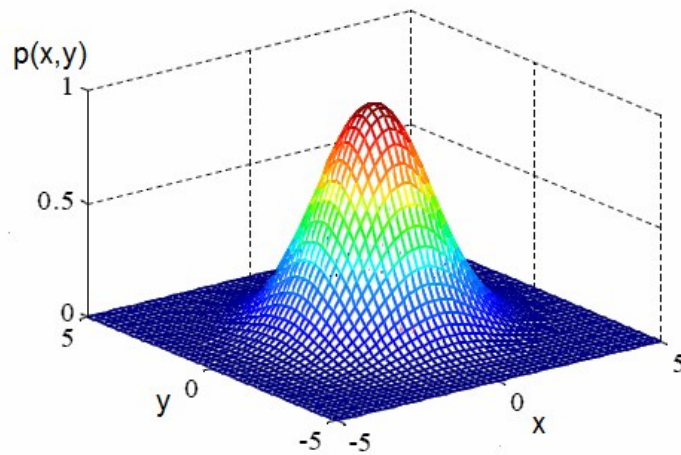
55

Semnalul determinist  $s[n]$  este afectat aditiv de zgomotul gaussian  $w[n]$ . Sunt accesibile experimentului doar eşantioanele  $x[n]$ , ce diferă de eşantioanele  $s[n]$



56

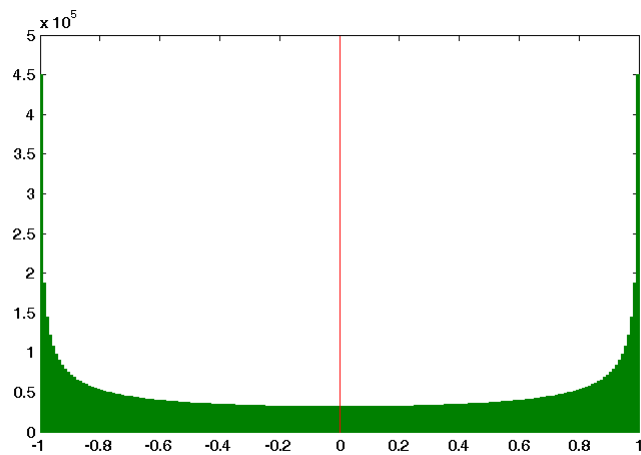
Două v.a. Gaussiene, ortogonale, dau naștere unei colecții de cupluri  $(x, y)$ , constituind o repartiție bidimensională



57

57

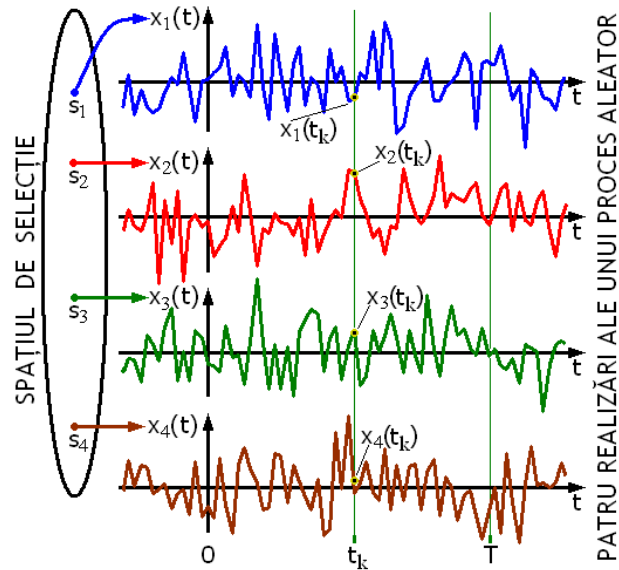
Sinusoida cu fază inițială o v.a. uniform repartizată în intervalul  $(-\pi, \pi)$  are o repartiție mult diferită de Gaussiană



58

58

Procesele (sau semnalele) aleatoare pot fi privite ca o "colecție" de realizări. Dacă urmărim o realizare în timp, avem o funcție careia nu-i cunoaștem expresia. O "tăietură" la un anumit moment de timp dă naștere unei v.a.



59

59