

Transformarea sistemelor în timp continuu în sisteme în timp discret

O dată cu dezvoltarea tehnicii de calcul se pune tot mai frecvent problema înlocuirii sistemelor în timp continuu cu sisteme în timp discret, chiar și în aplicațiile semnalelor analogice.

Datorită experienței acumulate în proiectarea sistemelor în timp continuu, sunt de interes metodele de sinteză a sistemelor în timp discret bazate pe echivalarea acestora cu sisteme în timp continuu corespunzătoare.

1

Există numeroase domenii, printre care și aparatura de bord din automobile respectiv rețelele de comunicații fără fir în care se utilizează pe scară largă filtrele digitale. Echipamentele GPS folosite în automobile și în avioane urmăresc țintele cu ajutorul filtrelor Kalman. Tot mai multe bunuri de larg consum, telefoane inteligente, software defined radio, laptop-uri folosesc filtre digitale în diferite scopuri. Dar experiența în proiectarea filtrelor analogice este mult mai vastă. Dacă istoria electronicii digitale are mai puțin de 50 de ani, istoria electronicii analogice are peste 100 de ani. De aceea sunt de interes metodele de proiectare a filtrelor digitale care adaptează metodele de proiectare ale filtrelor analogice.

1. Metoda invariantei raspunsului la impuls

2. Metoda invariantei raspunsului indicial (la treapta unitara)

3. Aproximarea ecuației diferențiale care descrie sistemul analogic printr-o ecuație cu diferențe finite (Finite Difference Approximation , FDA)

4. Transformarea biliniara

Metodele de echivalare trebuie să satisfacă trei cerințe.

1-sistemul analogic stabil să se transforme într-un sistem digital stabil. Polii unui sistem cauzal stabil se află în semiplanul stâng al planului complex. Polii unui sistem digital cauzal și stabil se află în interiorul cercului unitate din planul complex. **Prima cerință este să transforme semiplanul stâng al planului s în interiorul cercului unitate din planul z.**

2- să transforme un sistem analogic cauzal într-un sistem digital cauzal. Regiunea de convergență a funcției de transfer a unui sistem analogic cauzal este semiplanul drept al planului s. Regiunea de convergență a funcției de transfer a unui sistem digital cauzal este exteriorul cercului unitate din planul z. **Cerința a doua a metodei de echivalare este ca ea să transforme semiplanul drept al planului s în exteriorul cercului unitate al planului z.**

3-dacă sistemul analogic are răspuns în frecvență atunci și sistemul digital să aibă răspuns în frecvență. Sistemul analogic are răspuns în frecvență dacă axa imaginară a planului s este inclusă în domeniul de convergență al funcției de transfer a sistemului analogic. Condiția ca sistemul digital să aibă răspuns în frecvență este ca cercul unitate din planul z să aparțină regiunii de convergență a funcției de transfer a sistemului digital. **A treia condiție este de a transforma axa imaginară a planului s în cercul unitate din planul z.**

2

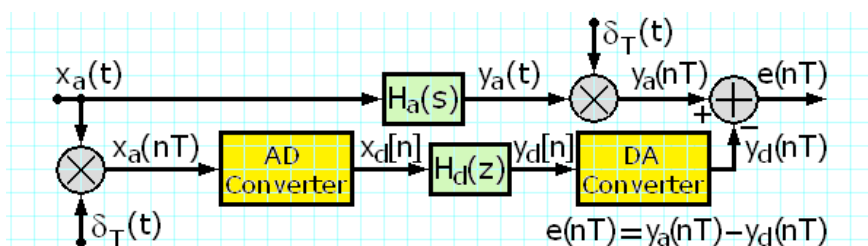
Vom studia cele patru metode mentionate. Metodele de echivalare a sistemelor analogice cu sisteme digitale trebuie să satisfacă trei cerințe.

1-sistemul analogic de echivalat (considerat stabil) să se transforme într-un sistem digital stabil. După cum se știe polii unui sistem cauzal stabil se află în semiplanul stâng al planului complex. Polii unui sistem digital cauzal și stabil se află în interiorul cercului unitate din planul complex. În consecință prima cerință de la metoda de echivalare este să transforme semiplanul stâng al planului s în interiorul cercului unitate din planul z.

2- să transforme un sistem analogic cauzal într-un sistem digital cauzal. După cum se știe regiunea de convergență a funcției de transfer a unui sistem analogic cauzal este semiplanul drept al planului s. Regiunea de convergență a funcției de transfer a unui sistem digital cauzal este exteriorul cercului unitate din planul z. Cerința a doua a metodei de echivalare este deci ca ea să transforme semiplanul drept al planului s în exteriorul cercului unitate al planului z.

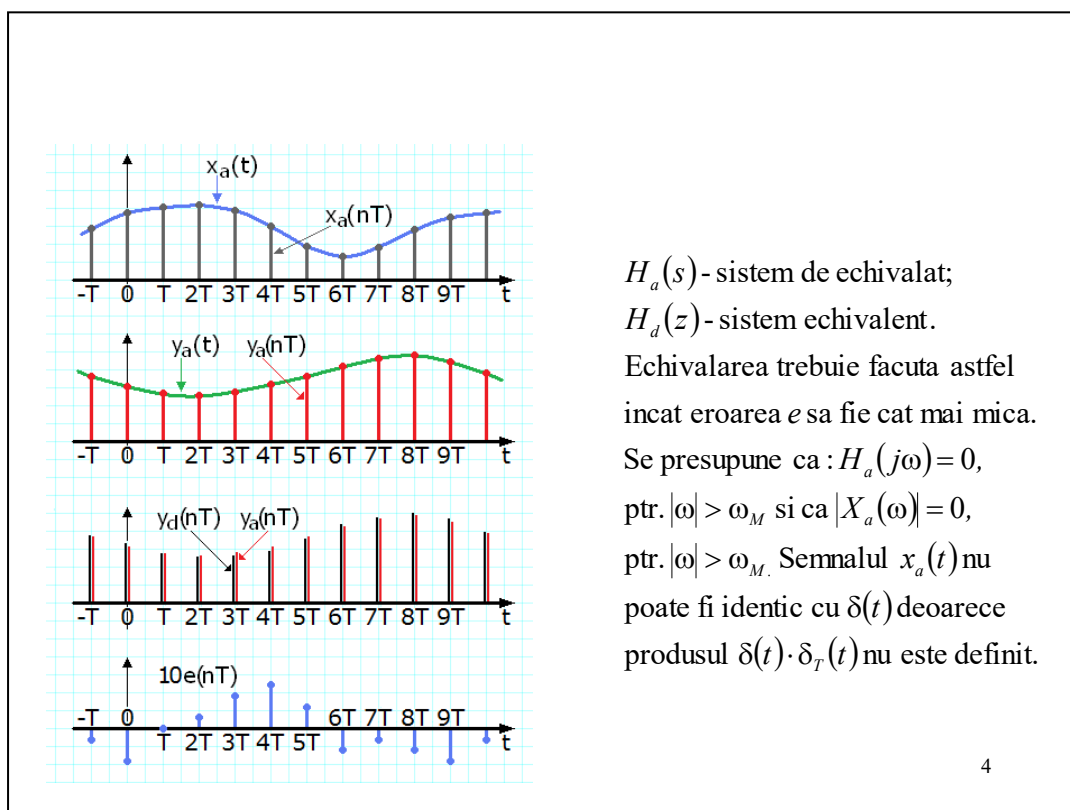
3-dacă sistemul analogic are răspuns în frecvență atunci și sistemul digital să aibă răspuns în frecvență. Sistemul analogic are răspuns în frecvență dacă axa imaginară a planului s este inclusă în domeniul de convergență al funcției de transfer a sistemului analogic. De asemenea condiția ca sistemul digital să aibă răspuns în frecvență este ca cercul unitate din planul z să aparțină regiunii de convergență a funcției de transfer a sistemului digital. În consecință cea de a treia condiție a metodelor de echivalare a sistemelor analogice în sisteme digitale este de a transforma axa imaginară a planului s în cercul unitate din planul z.

O schemă generală de evaluare a calității unei transformări pentru sistemele de bandă limitată



3

În schema din figură este comparată funcționarea unui filtru analogic, cu funcția de transfer $H_a(s)$, cu funcționarea unui filtru digital, cu funcția de transfer $H_d(z)$. Se pune întrebarea cum trebuie să alegem $H_a(s)$ pentru a obține $H_d(z)$ care să corespundă dezideratelor aplicației avute în vedere. Operația de înlocuire a filtrului analogic cu un filtru digital se numește echivalare. Pe ramura de sus a schemei, la ieșirea filtrului analogic este conectat un circuit de eșantionare ideală cu pasul T pentru a obține un semnal analogic ale cărui valori să reprezinte valori ale eșantioanelor semnalului analogic de la ieșirea filtrului analogic. Pentru a putea compara cele două filtre este necesar să le punem să lucreze în condiții asemănătoare, să aibă același semnal de intrare. Întrucât semnalul de la intrarea filtrului analogic este semnalul analogic $x_a(t)$, pe ramura de jos (unde este conectat filtrul digital) vom eșantiona ideal semnalul de intrare folosind un pas de eșantionare egal cu T . După eșantionare este necesară și discretizarea în amplitudine a semnalului digital cu valorile egale cu eșantioanele semnalului analogic $x_a(nT)$, operație care se realizează cu ajutorul unui convertor analog numeric (CAN/AD converter). La ieșirea acestuia se obține semnalul $x_d[n]$ care este adus la intrarea filtrului digital. La ieșirea filtrului digital se obține semnalul digital $y_d[n]$. Acesta se convertește numeric analogic (CAN/DA converter) obținându-se semnalul analogic în trepte ale cărui trepte au înălțimea $y_d(nT)$. Dacă considerăm că CAN-ul și CNA-ul sunt ideale atunci ele au funcții inverse așa că putem considera că semnalul $y_d(nT)$ ar reprezenta rezultatul prelucrării cu filtrul digital al semnalului analogic $x_a(t)$. Făcând diferența dintre semnalele analogice de la ieșirile celor două ramuri ale schemei din figură la momente de timp multipli de T obținem un semnal de eroare notat cu e . Funcționarea filtrului digital va fi cu atât mai asemănătoare cu funcționarea filtrului analogic cu cât semnalul de eroare va fi mai mic.



Avem un exemplu de funcționare al schemei considerate.

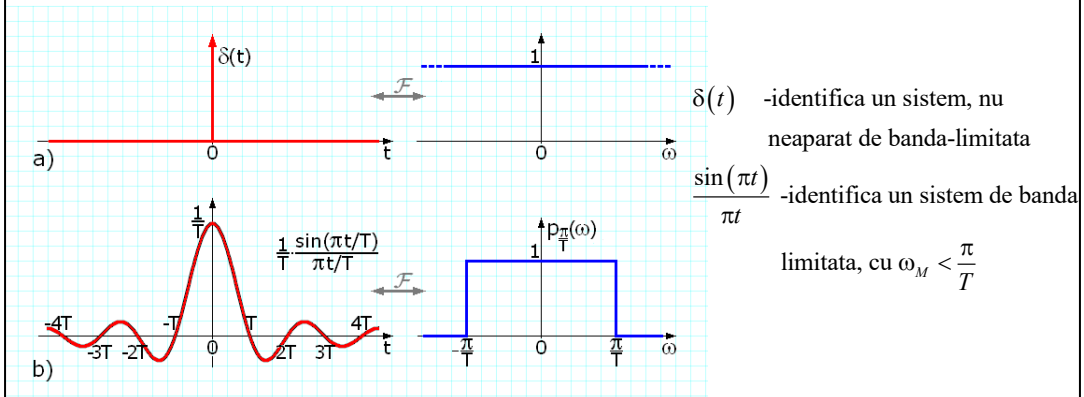
În primul grafic este reprezentat cu albastru semnalul analogic de intrare, $x_a(t)$, și cu roșu eșantioanele sale, $x_a(nT)$, obținute pe ramura de jos după circuitul de eșantionare ideală cu pasul T .

În al 2-lea grafic sunt reprezentate cu verde semnalul analogic de la ieșirea filtrului analogic $y_a(t)$, de pe ramura de sus și cu roșu eșantioanele sale $y_a(nT)$, obținute la ieșirea circuitului de eșantionare cu pasul T de pe ramura de sus.

În al 3-lea grafic sunt reprezentate cu roșu eșantioanele semnalului de la ieșirea ramurii de sus $y_a(nT)$, și cu negru eșantioanele semnalului de pe ramura de jos, $y_d(nT)$.

Diferența acestor eșantioane reprezintă eroarea $e(nT)$, din ultimul grafic (amplificata de 10 ori).

Identificarea sistemului



Se observa ca nu putem pune $x_a(t) = \delta(t)$, deoarece produsul $\delta(t) \cdot \delta(t)$ nu este definit.

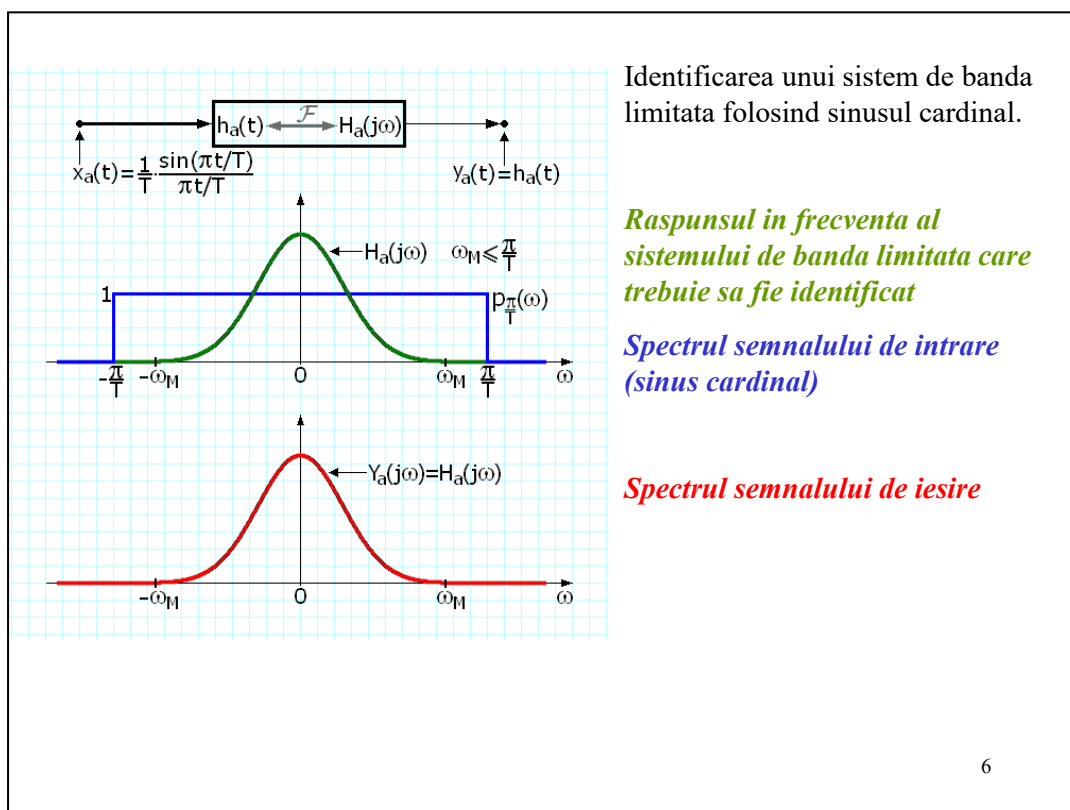
5

În continuare vom presupune că sistemul analogic este de bandă limitată și că semnalul de intrare este de asemenea de bandă limitată. În ambele cazuri se consideră că banda este egală cu ω_M .

Ar fi mai simplu dacă am considera că semnalul de sondare este impulsul unitar în timp continuu, figura a, care ar permite identificarea oricărui tip de sistem, nu neaparat de bandă limitată.

Dar acest semnal nu poate fi eșantionat ideal așa cum trebuie procedat pe ramura de jos.

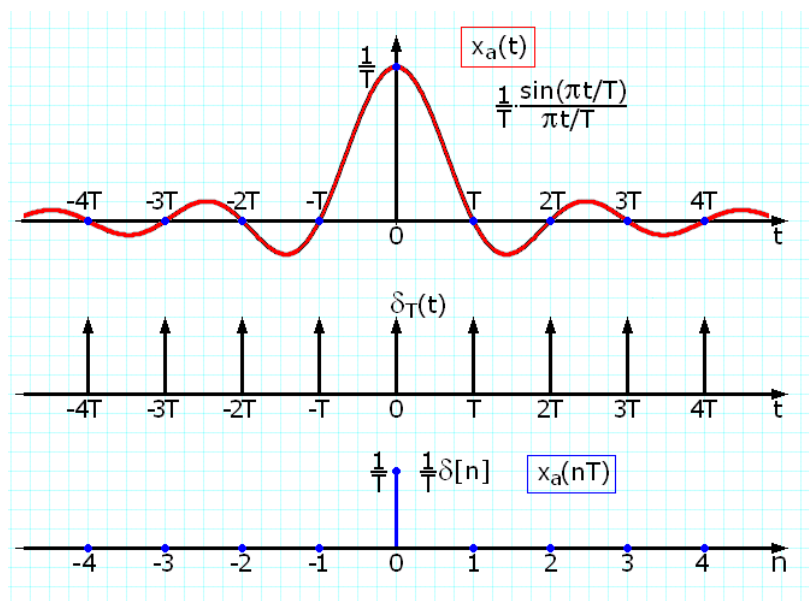
Eșantionarea ideală nu este posibilă deoarece ar presupune să înmulțim distribuția Dirac (semnalul de intrare) cu distribuția Dirac periodică de perioadă T (modelul eșantionării ideale este înmulțirea semnalului de intrare cu distribuția Dirac periodică de perioadă T). Dar înmulțirea a două distribuții nu este o operație definită pe spațiul distribuțiilor.



Metoda invarianței răspunsului la impuls se referă la sisteme analogice de bandă limitată, ω_M .

Se poate deci folosi pentru identificarea sistemului semnalul de tip sinus cardinal, a carui spectru este o poarta spectrala de banda limitata la π/T , reprezentat cu albastru in figura.

In acest caz, spectrul semnalului de iesire este chiar raspunsul in frecventa al sistemului considerat, de banda limitata.



7

Semnalul de intrare sinus cardinal, de bandă limitată ω_M , o funcție continuă de timp, deci se poate eșantiona ideal (produsul dintre o distribuție și o funcție continuă este definit).

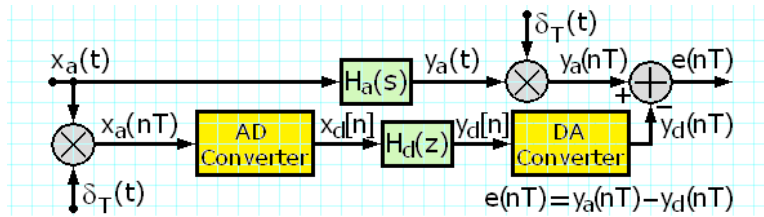
În urma eșantionării cu pasul T se obțin eșantioanele $x_d[n] = (1/T) \sin(n\pi/T) / (n\pi/T)$.

Dar această funcție are toate valorile egale cu 0 cu excepția valorii de la $n=0$ (când apare o nedeterminare de forma $0/0$), $x_d[0] = 1/T$.

În consecință $x_d[n] = \delta[n]/T$.

1. Metoda invariantei raspunsului la impuls

$$h_d[n] = Th_a(nT)$$



Sistemul analogic: $x_a(t) = \frac{1}{T} \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \Rightarrow y_a(t) = h_a(t) \Rightarrow y_a(nT) = h_a(nT)$

Sistemul digital: $x_d[n] = \frac{1}{T} \delta[n] \Rightarrow y_d[n] = \frac{1}{T} \delta[n] * h_d[n] = \frac{1}{T} h_d[n]$

Pentru eroare minima $e(nT)$: $h_a(nT) = \frac{1}{T} h_d(nT)$

8

Semnalul de la intrarea filtrului digital (cu răspunsul la impuls $h_d[n]$) este proporțional cu impulsul unitar în timp discret. În consecință semnalul de la ieșire, $y_d[n]$ va fi proporțional cu răspunsul la impuls al sistemului, $y_d[n] = (1/T)h_d[n]$. De aceea semnalul de la ieșirea ramurii de jos este $y_d(nT) = (1/T)h_d(nT)$.

Pe de altă parte spectrul semnalului $x_a(t)$ este chiar poarta frecvențială care se deschide la frecvența $-\pi/T$ și se închide la frecvența π/T . În consecință $\omega_M = \pi/T$ și frecvența de eșantionare folosită în toate circuitele de eșantionare din schema din figură este $2\pi/T$. Spectrul semnalului de la ieșirea filtrului analogic este egal cu produsul dintre spectrul semnalului $x_a(t)$ (poarta frecvențială care se deschide la frecvența $-\omega_M$ și se închide la ω_M) și răspunsul în frecvență al filtrului analogic de bandă limitată ω_M .

Întrucât între $-\omega_M$ și ω_M spectrul semnalului de intrare are valoarea 1, spectrul semnalului de la ieșirea filtrului analogic va fi egal cu $H_a(\omega)$. De aceea $y_a(t) = h_a(t)$ și $y_a(nT) = h_a(nT)$. Impunem ca semnalul de eroare să fie egal cu 0 și obținem expresia răspunsului la impuls al filtrului digital echivalent din ultima ecuația.

Răspunsul la impuls al filtrului digital echivalent se obține prin înmulțirea eșantioanelor răspunsului la impuls al filtrului analogic cu T . De aceea această metodă de echivalare se numește metoda invariantei răspunsului la impuls. În continuare stabilim legătura între funcțiile de transfer ale filtrelor analogic și digital echivalent.

Vom considera semnalul de intrare, $x_a(t) \longleftrightarrow X_a(s)$, de banda limitata la $\omega_M = \pi / T = \omega_s / 2$ (jumătate din frecvența de esantionare)

Raspunsul sistemului analogic, la momentele nT :

$$y_a(nT) = \mathcal{L}^{-1} \{ X_a(s) H_a(s) \} (nT)$$

Raspunsul sistemului digital:

$$y_d(nT) = y_d[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{ X_d(z) H_d(z) \}$$

Pentru aproximare fara eroare , $e(nT) = 0$:

$$y_d[n] = y_d(nT) = y_a(nT), \text{ sau:}$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \{ X_d(z) H_d(z) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ X_a(s) H_a(s) \} (nT)$$

$$H_d(z) = \frac{1}{X_d(z)} \mathcal{Z} \{ \mathcal{L}^{-1} \{ X_a(s) H_a(s) \} (nT) \}$$

Funcția de transfer (sistemul discret) depinde de semnalul de intrare, datorită prezentei funcțiilor $X_a(s)$ și $X_d(z)$.

9

Pentru orice semnal de intrare, $x_a(t)$, de banda limitata la jumătate din frecvența de esantionare,

Avem raspunsul sistemului analogic esantionat la momentele nT , $y_a(nT)$, ca fiind transformata Laplace inversa a produsului $X_a(s)H_a(s)$.

Pe de altă parte raspunsul filtrului digital echivalent la momentele nT , $y_d(nT)$, este transformata z inversa a produsului $X_d(z)H_d(z)$.

Pentru a avea eroare zero, se impune ca cele două semnale de ieseire să fie egale, rezulta astfel ca funcția de transfer a sistemului digital echivalent $H_d(z)$ depinde de semnalul de intrare, datorită prezentei funcțiilor $X_a(s)$ și $X_d(z)$.

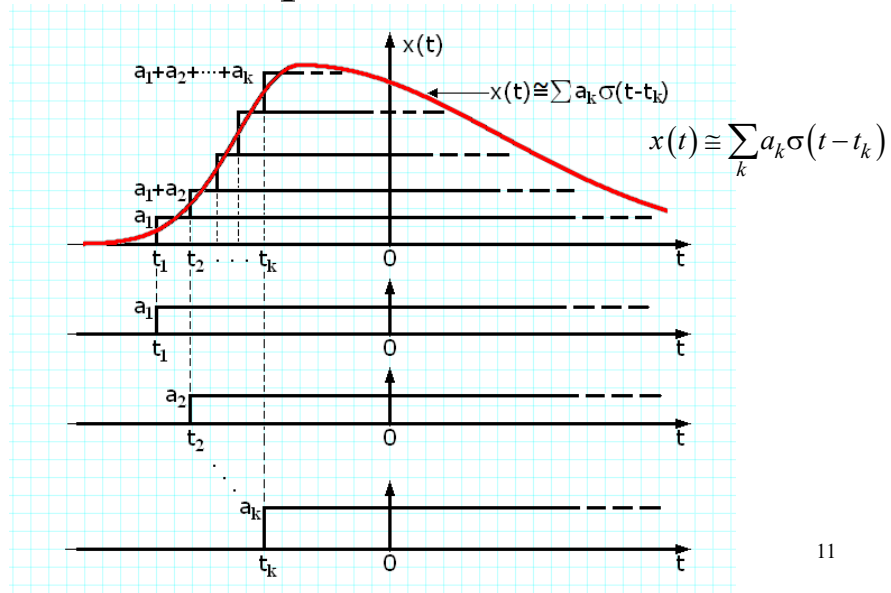
$$H_d(z) = \frac{1}{X_d(z)} Z \left\{ \mathcal{L}^{-1} \{ X_a(s) H_a(s) \} (nT) \right\}$$

- Daca se schimba semnalul de intrare : se schimba sistemul digital.
- Nu exista aproximare perfecta.
- Aproximare folosind semnale “standard”:
 - Treapta unitara $\sigma(t)$
 - Semnal rampa $t \sigma(t)$.

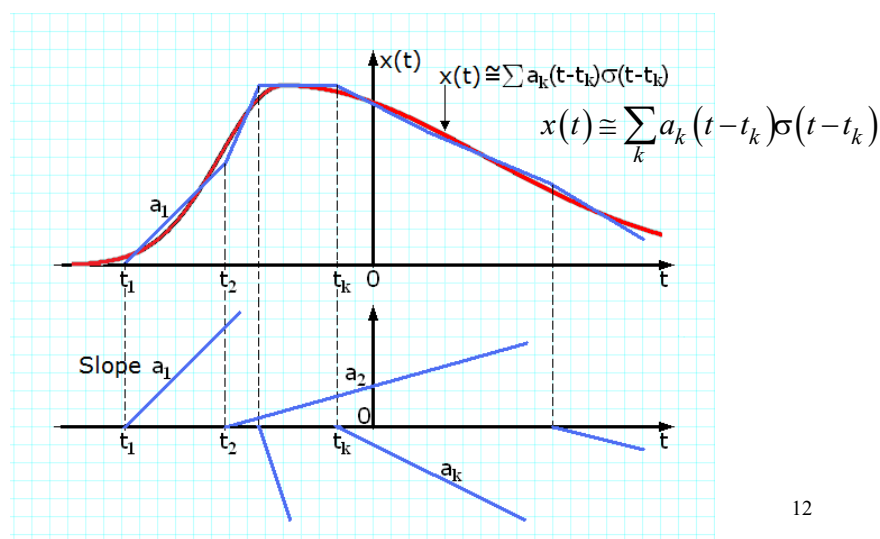
10

Conform relatiei, daca se schimba semnalul de intrare, trebuie sa se schimbe si sistemul digital echivalent. Nu exista o aproximare perfecta; se pot folosi semnale standard, dupa cum urmeaza.

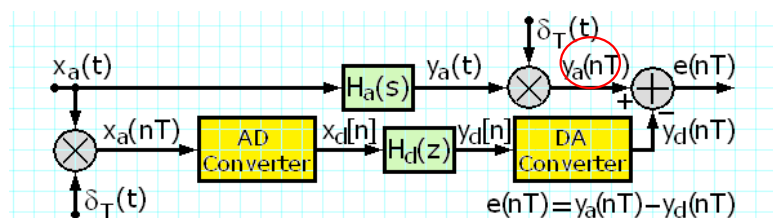
Aproximare prin insumarea unor semnale treapta unitara, deplasate si ponderate



Aproximare prin insumarea unor semnale rampa, deplasate si ponderate



Metoda invariantei raspunsului la impuls pentru sisteme digitale echivalate cu sisteme analogice de banda limitata



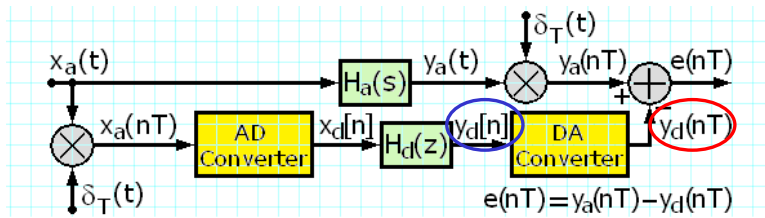
Pentru $x_a(t) = \frac{1}{T} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$; $x_d[n] = \frac{1}{T} \delta[n]$; $h_d[n] = T h_a(nT)$

Transformarea Laplace a semnalului esantionat $y_a(nT)$ este

$$\begin{aligned} \hat{Y}_a(s) &= \mathcal{L}\{y_a(t) \delta_T(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) \delta(t-nT)\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) \mathcal{L}\{\delta(t-nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) e^{-snT} \end{aligned}$$

13

Transformata Laplace a semnalului esantionat $y_a(nT)$, este egală cu transformata Laplace a produsului $y_a(t) \delta_T(t)$ adică cu transformata Laplace a sumei seriei cu termenul general $h_a(nT) \delta(t-nT)$, care este egală cu suma seriei cu termenul general $h_a(nT)$ înmulțit cu transformata Laplace a lui $\delta(t-nT)$. Dar transformata Laplace a lui $\delta(t-nT)$ este egală cu $\exp(-snT)$.



Transformata Z a semnalului de iesire pentru sistemul digital este

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Th_a(nT) z^{-n}$$

$$\Rightarrow \hat{Y}_a(s) = \frac{1}{T} H_d(z) \Big|_{z=e^{sT}}$$

Dar pentru orice semnal esantionat avem: $\hat{Y}_a(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\omega - jk\omega_s)$

Inlocuind $j\omega = s$:

$$\hat{Y}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - jk\omega_s).$$

$$H_d(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - jk\omega_s) ; \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

14

Pe de altă parte funcția de transfer a filtrului digital echivalent $H_d(z)$ este transformata z a răspunsului la impuls $h_d[n]$, adică transformata z a lui $Th_a(nT)$.

Se observă că transformata Laplace a semnalului de la ieșirea ramurii de sus este egală cu produsul $(1/T)H_d(z)$ calculată în $z=\exp(sT)$.

Semnalul de pe ramura de sus $y_a(nT)$ este obținut prin eșantionarea ideală a semnalului de la ieșirea filtrului analogic $y_a(t)$, care are expresia $h_a(t)$ pentru metoda invariantei răspunsului la impuls.

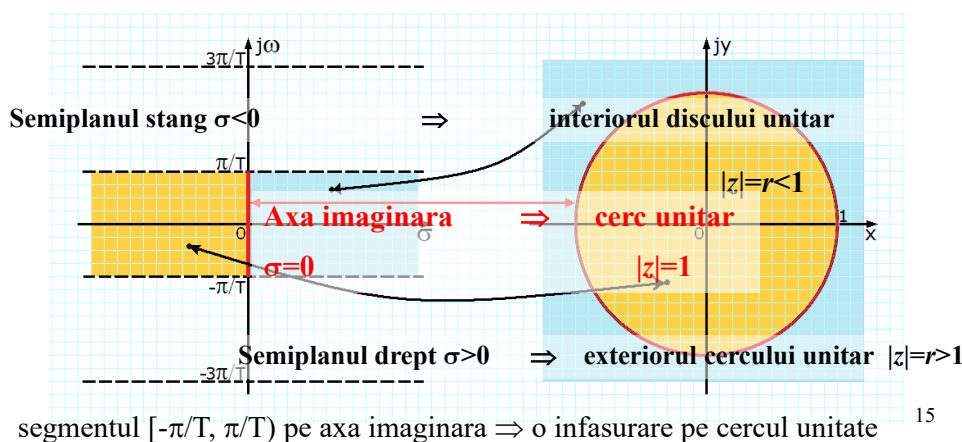
Spectrul semnalului eșantionat ideal se obține prin prelungirea prin periodicitate a lui $Ha(j\omega)$ cu perioada ω_s (frecvența de eșantionare).

Pentru $j\omega = s$, se obține expresia transformatei Laplace a semnalului de la ieșirea ramurii de sus a schemei.

Se obține legătura dintre funcțiile de transfer ale filtrului digital echivalent și ale filtrului analogic echivalat. Observăm că legătura dintre variabilele z și s este $z=\exp(sT)$.

Relația dintre planele s și z în cazul invarianței răspunsului la impuls

$$s = \sigma + j\omega ; z = re^{j\Omega} ; z = e^{sT} \Rightarrow re^{j\Omega} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} \Leftrightarrow \begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \omega T = \Omega + 2k\pi \end{cases}$$



Exprimând variabila complexă z în coordonate polare și variabila complexă s în coordonate carteziene legătura dintre variabilele z și s conduce la sistemul de ecuații din ultima ecuație. Legătura dintre planele s și z este ilustrată în figură.

Fâșiei orizontale din semiplanul stâng al planului s , $\sigma < 0$, limitată între $\omega = -\pi/T$ și π/T îi corespunde interiorul cercului unitate din planul z , adică $|z| < 1$

Conform relației de legatură avem: $r = |z| = \exp(\sigma T)$.

- În semiplanul stâng al planului s , σ are o valoare negativă, iar e la o putere negativă este subunitar, deci modulul $|z|$ este subunitar, adică z este în interiorul cercului unitate din planul z .
- Când $\sigma=0$ (s este pe axa imaginară) atunci $r=1$ (deci z se află pe cercul unitate).
- Când $\sigma>0$ (s este în semiplanul drept cu ω între $-\pi/T$ și π/T) atunci $r>1$ adică z este în exteriorul cercului unitate din planul z .

Limitarea frecvenței analogice ω între $-\pi/T$ și π/T este datorată faptului că sistemul analogic este de bandă limitată $\omega_M = \pi/T$.

Relația dintre frecvențe este $\omega = \Omega/T$. Când frecvența în timp continuu ω se modifică între $-\pi/T$ și π/T , frecvența în timp discret se modifică între $-\pi$ și π (se considera $k=0$).

După cum se vede din figură, legătura dintre planele s și z pentru metoda invarianței răspunsului la impuls nu respectă cele trei condiții impuse metodelor de echivalare întrucât nu transformă întreg semiplanul stâng al planului s în interiorul cercului unitate din planul z . De aceea performanțele acestei metode de echivalare nu sunt foarte ridicate.

- Pentru a evita erorile de tip alias, în răspunsul în frecvență al sistemului digital echivalent, este necesar ca răspunsul în frecvență al sistemului analogic să fie cuprins în întregime în banda de frecvențe $-\pi/T, \pi/T$.
- Deci sistemul analogic de bandă limitată:

$$\omega_M < \pi/T$$

- cu frecvență de eșantionare

$$\omega_s = 2\pi/T \geq 2\omega_M$$

Relația între răspunsurile în frecvență ale sistemelor echivalente în cazul invarianței răspunsului la impuls

$$H_d(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(s - j \frac{2k\pi}{T} \right); z = e^{j\Omega}; s = j\omega \Rightarrow$$

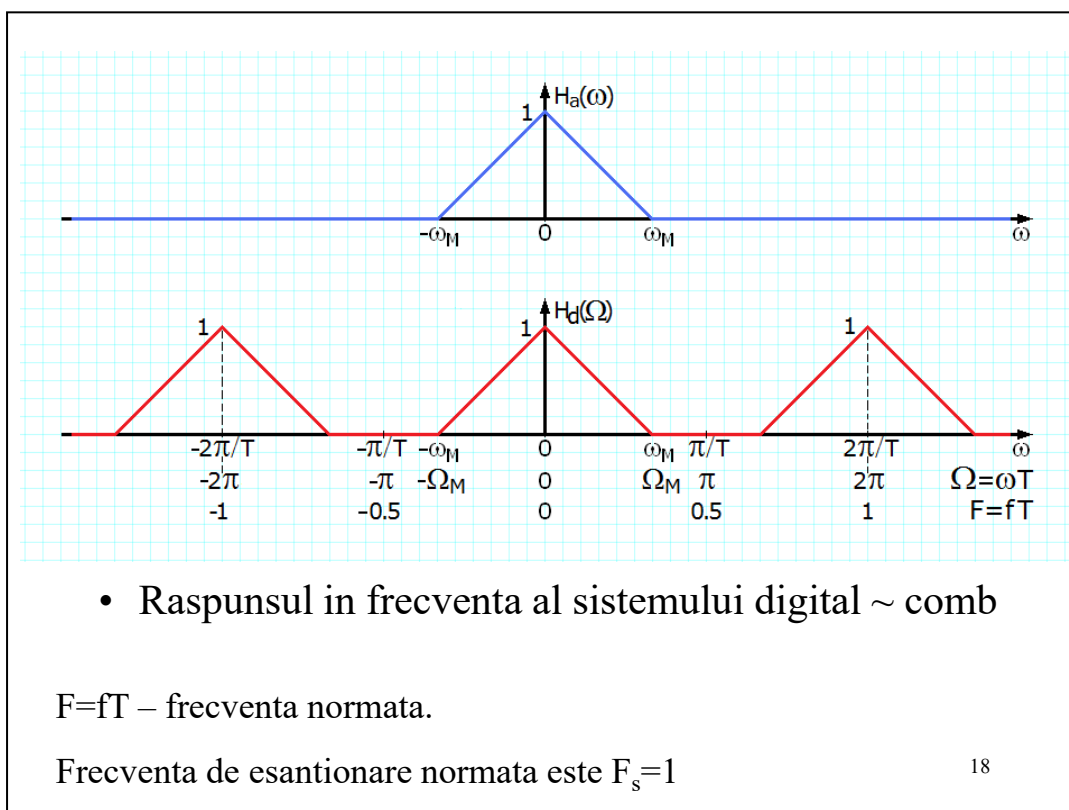
$$H_d(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right) \Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(\frac{\Omega - k2\pi}{T} \right).$$

17

Am stabilit legătura dintre funcțiile de transfer din prima ecuație.

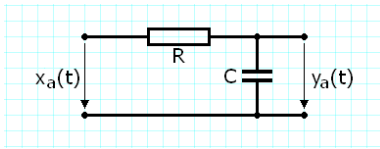
Înlocuind s cu $j\omega$ și z cu $\exp(j\Omega)$, obținem legătura dintre răspunsurile în frecvență ale sistemului digital echivalent și sistemul analogic echivalat din ecuația a doua.

Legătura dintre frecvența digitală Ω și frecvența analogică ω este $\Omega = \omega T$.



Un exemplu este prezentat în figură. Dacă răspunsul în frecvență al sistemului analogic echivalat este prezentat în graficul de sus atunci răspunsul în frecvență al sistemului digital echivalent are forma din figura de jos. Răspunsul în frecvență al sistemului digital se obține prin prelungirea prin periodicitate cu perioada 2π a răspunsului în frecvență al sistemului analogic scalat. Frecvenței maxime ω_M îi corespunde frecvența digitală $\omega_M T$. F este frecvența normată și este produsul dintre f și pasul de esantionare T

Exemplu: circuitul RC



Sistem de banda nelimitată $\Rightarrow$ erori de aliare (aliasing)

$$RC \frac{dy_a(t)}{dt} + y_a(t) = x_a(t) \Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}}; \omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}.$$

$$\text{raspunsul in frecventa } H_a(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega}.$$

$$\text{Sistemul analogic: } h_a(t) = \omega_0 e^{-\omega_0 t} \sigma(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \sigma(t).$$

$$\text{Sistemul digital: } h_d[n] = Th_a(nT) = \frac{T}{\tau} e^{-\frac{nT}{\tau}} \sigma[n].$$

19

Dacă considerăm de exemplu sistemul analogic de ordinul I din figură, descris de ecuația diferențială specificată obținem funcția de transfer $H_a(s)$ cu frecvența de tăiere ω_0 .

Cu τ s-a notat constanta de timp a circuitului.

Rezultă răspunsul în frecvență $H_a(\omega)$, căreia îi corespunde răspunsul la impuls $h_a(t)$ un semnal cauzal exponential descrescator.

Aplicând metoda invarianței răspunsului la impuls se obține răspunsul la impuls al sistemului digital $h_d[n]$.

Raspunsul la impuls al sistemului discret este

$$h_d[n] = Th_a(nT) = \frac{T}{\tau} e^{-\frac{nT}{\tau}} \sigma[n].$$

cu conditia ca pasul de esantionare T sa fie suficient de mic in comparatie cu τ (constanta de timp a circuitului)

Deoarece sistemul nu este de banda limitata,

apar erorile de aliere (raspunsul in frecventa al sistemului digital este afectat la frecventa mari)

Raspunsurile indiciale $s(t)$, $s[n]$ al sistemelor analogic si digital la semnalele treapta unitara $\sigma(t)$, $\sigma[n]$

$$Y_a(s) = H_a(s) X_a(s) = \frac{\omega_0}{(\omega_0 + s)s} \longleftrightarrow y_a(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \sigma(t)$$

$$Y_d(z) = H_d(z) X_d(z) = \frac{\frac{T}{\tau}}{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow y_d[n] = \frac{T}{\tau} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \cdot e^{-\frac{nT}{\tau}}\right) \sigma[n]$$

$$\text{Eroarea: } e(nT) = y_a(nT) - y_d(nT) \neq 0$$

21

Se poate verifica eroarea obtinuta atunci cand se schimba semnalul de intrare.

Se aplica la intrarea sistemului analogic, treapta unitara $\sigma(t)$, respectiv treapta unitara in timp discret $\sigma[n]$. Iesirile celor doua sisteme reprezinta raspunsurile indiciale $s_a(t)$ respective $s_d[n]$.

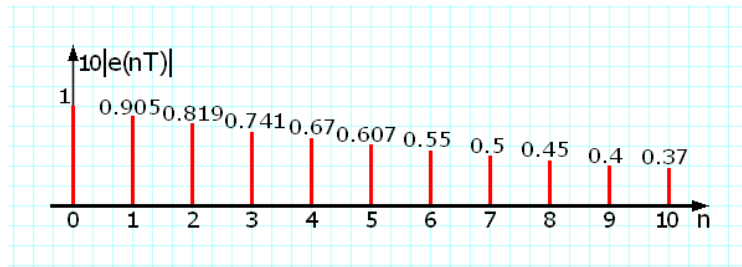
Eroarea este data de diferenta $s_a(nT) - s_d(nT)$, ea nu este zero.

Pentru $n \geq 0$: $y_a(nT) = 1 - e^{-\frac{nT}{\tau}}$,

$y_d(nT) \cong 1 - \left(1 - \frac{T}{\tau}\right) e^{-\frac{nT}{\tau}}$, dacă $\frac{T}{\tau} \ll 1$.

$\Rightarrow e(nT) \cong -\frac{T}{\tau} e^{-\frac{nT}{\tau}}$, $\frac{T}{\tau} \ll 1$, $n \geq 0$.

Pentru $\frac{T}{\tau} = \frac{1}{10}$, $e^{-\frac{T}{\tau}} \cong 0,905$, eroarea este: $|e(nT)| \cong 0,1e^{-\frac{n}{10}}$.



Pentru valori mai mici ale raportului T/τ , eroare este chiar mai mica

22

Considerând $T/\tau = 1/10$, se obține eroarea din figură.

Pentru $T/\tau = \omega_0 T = \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.1$

Frecventa de esantionare este: $\omega_s = 20\pi\omega_0$

La $\omega = \frac{\omega_s}{2} = 10\pi\omega_0$, modulul raspunsului in frecventa al sistemului analogic

$$|H(10\pi\omega_0)| = \frac{1}{|1 + j10\pi|} \cong \frac{1}{10\pi} \cong 0.0318$$

$$20\log|H(10\pi\omega_0)| \cong -30dB$$

ceea ce inseamna ca eroarea de aliere este neglijabila

23

Pentru $T/\tau = 1/10$, frecventa de esantionare este $20\pi\omega_0$

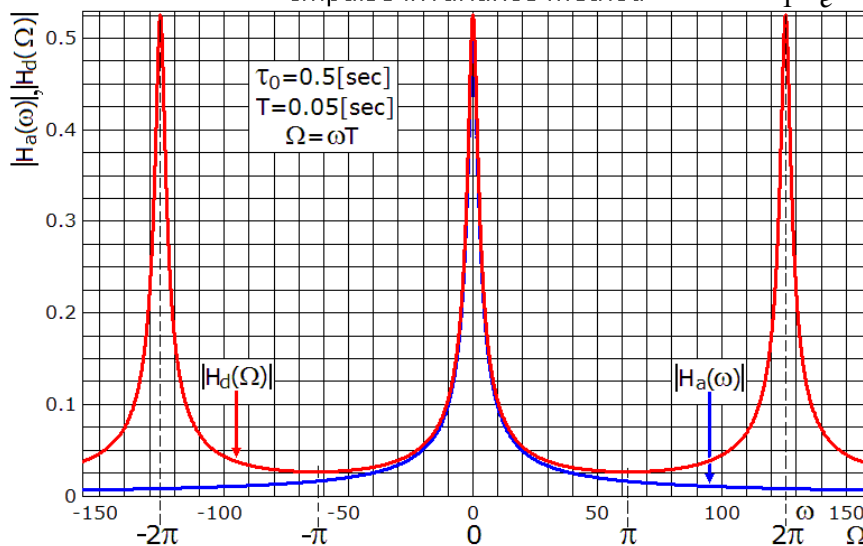
La frecventa π/T , jumatate din frecventa de esantionare adica $10\pi\omega_0$, modulul raspunsului in frecventa pentru sistemul analogic este 0.0318 sau -30dB, ceea ce inseamna o eroare de aliere neglijabila.

Raspunsul in frecventa

$$H_a(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{\tau} + j\omega}$$

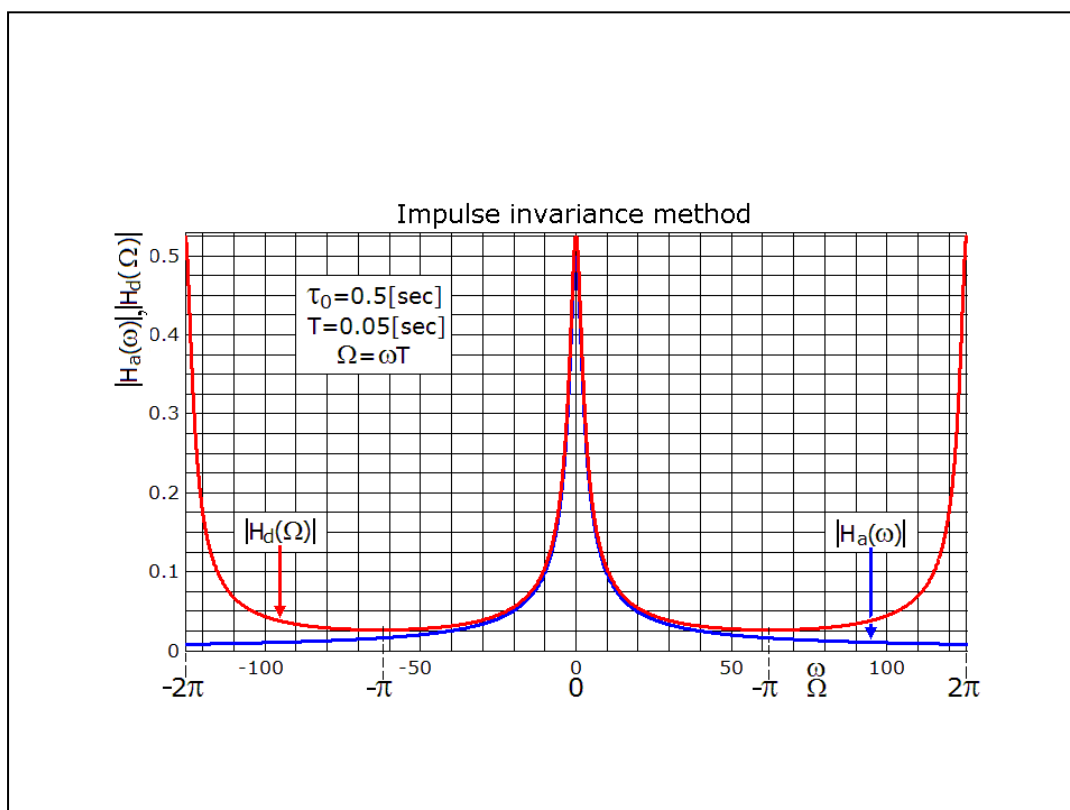
$$H_d(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \cdot e^{-j\Omega}}$$

Impulse invariance method

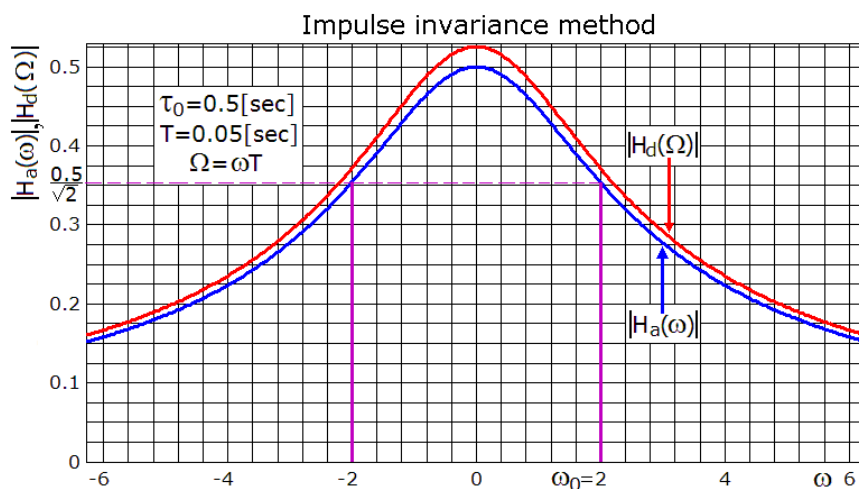


Se constată că ambele corespund la filtre trece jos dar că pe măsură ce frecvența crește devin tot mai diferite din cauza alierii. Figura dovedește că metoda invarianței răspunsului la impuls are performanțe modeste, în special când se încearcă echivalarea unui sistem de bandă nelimitată, așa cum este filtrul trece jos de ordinul I considerat în acest exemplu. Nici măcar la frecvențe foarte joase cele două răspunsuri în frecvență nu sunt identice.

Cu albastru este reprezentat modulul răspunsului în frecvență pentru sistemul analogic
 Cu roșu pentru cel digital echivalent folosind metoda invarianței răspunsului la impuls, (periodic de perioada 2π)



Cu albastru este reprezentat modulul raspunsului in frecventa pentru sistemul analogic
 Cu rosu pentru cel digital echivalent folosind metoda invariantei raspunsului la impuls,
 (periodic de perioada 2π)



26

Cu albastru este reprezentat modulul raspunsului in frecventa pentru sistemul analogic
 Cu rosu pentru cel digital echivalent folosind metoda invariantei raspunsului la impuls,
 (periodic de perioada 2π)
 Cele doua caracteristici nu sunt egale nici la frecvente joase.

2. Echivalarea sistemelor de banda limitata prin *metoda invariantei raspunsului indicial*

$$s_d[n] = s_a(nT)$$

Semnalul de intrare: semnalul treapta

$$x_a(t) = \sigma(t) \longleftrightarrow X_a(s) = \frac{1}{s}$$

Raspunsul indicial al sistemului analogic

$$y_a(t) = h_a(t) * \sigma(t) \longleftrightarrow Y_a(s) = H_a(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Semnalul de intrare al sistemului digital :

$$x_d[n] = \sigma[n] \xrightarrow{z} X_d(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

27

O alta metoda de echivalare este cea pentru care semnalul de intrare este semnalul treapta unitara $\sigma(t)$ pe ramura analogica, respective pe ramura digitala, prin esantionare, treapta unitate in timp discret $\sigma[n]$.

La iesirea sistemului analogic se obtine raspunsul indicial $s_a(t)$, cu transformata Laplace din ecuatie.

Funcția de transfer al sistemului digital:

$$H_d(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\} (nT) \right\}$$

Răspunsurile indiciale:

$$s_a(t) = h_a(t) * \sigma(t) \quad \text{și} \quad s_d[n] = h_d[n] * \sigma[n]$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{H_d(z)}{1 - z^{-1}} \right\} [n] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\} (nT)$$

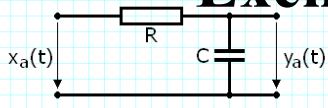
$$\Rightarrow s_d[n] = s_a(nT)$$

28

La ieșirea sistemului digital se obține răspunsul indicial $s_d[n]$, cu transformata Z din ecuație.

Metoda de echivalare este dată de ultima ecuație, adică răspunsul indicial al sistemului digital echivalent se obține prin esanționarea răspunsului indicial al sistemului analogic de echivalat.

Exemplu: circuitul RC



$$RC \frac{dy_a(t)}{dt} + y_a(t) = x_a(t)$$

Raspunsul indicial

$$s_a(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \sigma(t)$$

Raspunsul indicial al sistemului digital echivalent

$$s_d[n] = \left(1 - e^{-\frac{nT}{\tau}}\right) \sigma[n]$$

cu raspunsul la impuls

$$h_d[n] = \left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1\right) \left(e^{-\frac{nT}{\tau}} \sigma[n] - \delta[n]\right) \neq h_a(nT).$$

Pentru $\frac{T}{\tau} \ll 1$: $h_d[n] \cong \frac{T}{\tau} e^{-\frac{nT}{\tau}} \sigma[n] - \frac{T}{\tau} \delta[n]$.

29

Reluam exemplul filtrului RC pentru care se calculeaza raspunsul indicial $s_a(t)$.

Sistemul echivalent are raspunsul indicial dat de $s_d[n] = s_a(nT)$.

Se observa ca pentru aceasta metoda, se obtine raspunsul la impuls $h_d[n]$ ce difera de raspunsul la impuls al sistemului analogic esantionat la momentele nT , $h_a(nT)$

Sistemul digital echivalent, pentru $\frac{T}{\tau} \ll 1$:

$$h_d[n] \cong \frac{T}{\tau} e^{-\frac{nT}{\tau}} \sigma[n] - \frac{T}{\tau} \delta[n] .$$

- Daca se aplica la intrare impulsul Dirac

$$\delta(t) \Rightarrow h_a(t)$$

$$\delta[n] \Rightarrow h_d[n] \neq h_a(nT)$$

Eroarea este

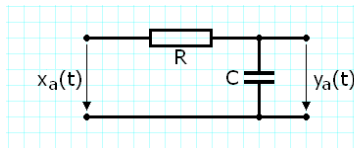
$$e(nT) = h_a(nT) - h_d[n] \cong \frac{T}{\tau} \delta[n] , \quad \frac{T}{\tau} \ll 1.$$

30

Sistemul digital echivalent se poate rescrie pentru $T/\tau \ll 1$ ca in prima relatie.

Daca aplicam la intrare un impuls unitar pentru ambele sisteme, se obtine o eroare la momentele nT de valoare T/τ pentru $n=0$ si zero in rest.

3. Echivalarea unui sistem analogic prin *aproximarea ecuației diferențiale* care îl descrie *printr-o ecuație cu diferențe finite*



$$RC \frac{dy_a(t)}{dt} + y_a(t) = x_a(t)$$

$$\tau = RC = \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow \tau \frac{dy_a(t)}{dt} + y_a(t) = x_a(t) \Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

Derivata întâi se poate aproxima prin :

$$\left. \frac{dy_a(t)}{dt} \right|_{t=nT} \cong \frac{y_a(nT) - y_a(nT - T)}{T} = \frac{y_d[n] - y_d[n-1]}{T} \Rightarrow$$

$$\frac{\tau}{T} (y_d[n] - y_d[n-1]) + y_d[n] = x_d[n] \text{ sau}$$

$$\left(\frac{\tau}{T} + 1 \right) y[n] - \frac{\tau}{T} y[n-1] = x[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_d(z) = \frac{1}{\frac{\tau}{T} + 1 - \frac{\tau}{T} z^{-1}} = \frac{1}{1 + \tau \frac{1 - z^{-1}}{T}} = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

31

O alta metodă de echivalare a sistemelor analogice cu sisteme digitale pe care o studiem se referă la aproximarea ecuației diferențiale care descrie sistemul analogic cu o ecuație cu diferențe finite care descrie sistemul digital echivalent. Pornim de la exemplul filtrului RC trece-jos de ordinul I pe care l-am studiat deja în exemplul anterior.

Produsul RC este notat cu τ , constanta de timp a circuitului.

Funcția de transfer a circuitului este $H_a(s)$. Derivata de ordinul întâi a semnalului de la ieșire (care intervine în ecuația diferențială) calculată la momentul nT se aproximează cu diferența finită înainte $y_d[n] - y_d[n-1]$ împărțită la T .

Sistemul digital echivalent este o ecuație cu diferențe finite. Acestei ecuații cu diferențe finite îi corespunde funcția de transfer $H_d(z)$.

Comparând formele celor două funcții de transfer, $H_a(s)$ și $H_d(z)$ se constată că ele devin identice dacă se face transformarea de variabilă $s = (1 - 1/z)/T$.

Un sistem analogic este descris de ecuația diferențială : $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Rightarrow H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$.

Am utilizat deja aproximarea : $\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=nT} \cong \frac{u[n] - u[n-1]}{T}$. Aceasta aproximare reprezintă un caz

particular (obținut pentru $k=1$) al relației : $\left. \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right|_{t=nT} \cong \frac{1}{T^k} \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p u[n-p]$. Transformata z a

membrului drept este : $\frac{1}{T^k} \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p \left(z^{-1} \right)^k \cdot U(z) = \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^k U(z)$. Substituind aproximările

derivatelor în ecuația diferențială se obține : $\sum_{k=0}^N a_k \frac{1}{T^k} \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p y[n-p] = \sum_{k=0}^M b_k \frac{1}{T^k} \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p x[n-p]$.

Luând în ambii membri transformata z rezultă : $\sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^k Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^k X(z) \Rightarrow$

$$H_d(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^k}. \text{ Deci : } H_d(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}.$$

32

Generalizarea pentru sisteme de ordinul N

În cazul general, sistemul analogic este descris de ecuația diferențială din prima ecuație și are funcția de transfer din cea de a doua ecuație. Aproximarea din a treia ecuație reprezintă un caz particular al relației din cea de a patra ecuație. **Demonstrați prin inducție completă cea de a patra relație.**

Substituind cea de a patra relație în ambii membri ai ecuației diferențiale din prima ecuație se obține o ecuație cu diferențe finite în relația a șasea. Ținând seama de binomul lui Newton, transformata z a membrului drept al ecuației cu diferențe finite poate fi pusă în forma din cea de a cincea ecuație. Luând în ambii membri ai ecuației cu diferențe finite din relația a șasea transformata z , se obține cea de a șaptea ecuație. Împărțind transformatele z ale ieșirii și intrării se obține funcția de transfer a sistemului digital din cea de a opta ecuație. Se observă că s-a obținut aceeași dependență dintre variabilele s și z ca și în cazul exemplului considerat anterior, $s=(1-1/z)/T$.

Relația dintre planele s și z în cazul aproximării ecuației diferențiale printr-o ecuație cu diferențe finite

$z = x + jy = re^{j\Omega}$ și $s = \sigma + j\omega$. S-a demonstrat relația: $s = \frac{1-z^{-1}}{T} \Rightarrow z = \frac{1}{1-sT}$ adică:

$$r = |z| = \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma T)^2 + (\omega T)^2}}. \text{ Dacă } \sigma < 0 \Rightarrow 1 - \sigma T > 1 \Rightarrow (1 - \sigma T)^2 + (\omega T)^2 > 1 \Rightarrow r < 1.$$

Semiplanul stâng din planul s se transformă în interiorul cercului unitate din planul z .

Dacă sistemul analogic este stabil și sistemul numeric echivalent va fi stabil.

$$\text{Dacă } \sigma = 0 \Rightarrow s = j\omega \Rightarrow z = \frac{1}{1-j\omega T} = \frac{1+j\omega T}{1+(\omega T)^2} = x + jy \Rightarrow x = \frac{1}{1+(\omega T)^2}; y = \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \omega T \Rightarrow x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{x^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-x=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Axa imaginară din planul s se transformă în conturul cercului de centru $(1/2, 0)$ și de rază

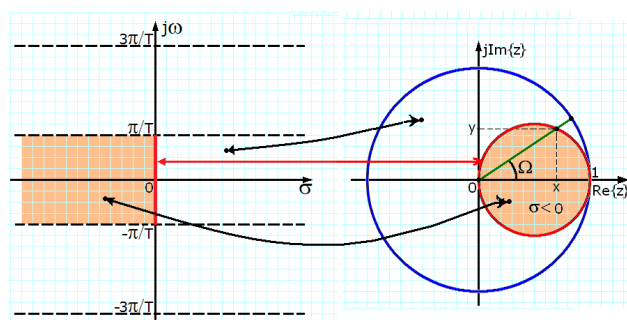
$1/2$ din planul z .

33

Am obținut corespondența dintre planele s și z .

- Semiplanul stâng al planului s se transformă în interiorul cercului de centru $(1/2, 0)$ și rază $1/2$ din planul z ,
- axa imaginară din planul s se transformă în conturul cercului de centru $(1/2, 0)$ și rază $1/2$ din planul z iar
- semiplanul drept din planul s se transformă în exteriorul cercului de centru $(1/2, 0)$ și rază $1/2$ din planul z .

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \Omega = \omega T \Rightarrow \Omega = \arctg \omega T$. Pentru ca sistemul numeric echivalent să aibă răspuns în frecvență ar fi necesar ca axa imaginara din planul s să se transforme în cercul unitate din planul z . Nu este cazul acestei metode de echivalare. Pentru $|\Omega| \leq \frac{\pi}{36}$ cele 2 cercuri sunt foarte apropiate. Dacă se notează cu ω_M frecvența maximă din răspuns în frecvență $H_a(\omega)$ atunci condiția de mai sus se scrie: $\omega_M T = \operatorname{tg} \Omega_M \cong \Omega_M \leq \frac{\pi}{36}$. Frecvența de esantionare ω_e trebuie aleasă a. i. $\omega_e \geq 36 \cdot 2\omega_M$. Aceasta valoare este foarte mare.



34

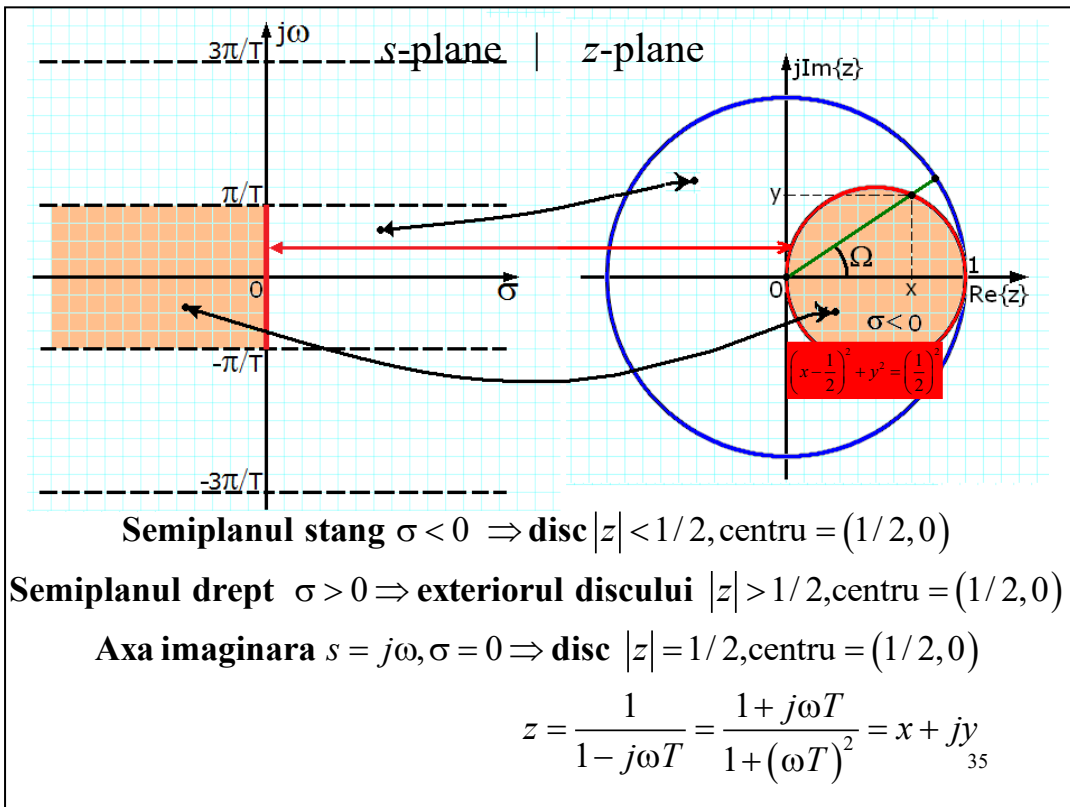
Întrucât cercul de centru $(1/2, 0)$ și de rază $1/2$ este înscris în cercul unitar din planul z , dacă sistemul analogic echivalat este stabil atunci și sistemul digital echivalent va fi stabil.

Raportul dintre părțile imaginară și reală ale variabilei complexe z ne dă tangenta frecvenței digitale (Ω) rezultă că $\operatorname{tg}(\Omega) = \omega T$.

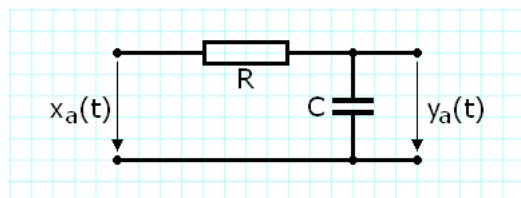
Legătura dintre frecvența digitală Ω și frecvența analogică ω , introdusă de metoda de echivalare bazată pe aproximarea ecuației diferențiale nu este o relație liniară, și forma răspunsului în frecvență al sistemului digital nu va fi identică cu forma răspunsului în frecvență al sistemului analogic. Mai mult, este posibil ca sistemul digital nici să nu aibă răspuns în frecvență.

Într-adevăr, în conformitate cu cerințele metodelor de echivalare, pentru ca sistemul digital să aibă răspuns în frecvență ar fi necesar ca axa imaginară din planul s să se transforme în cercul unitate din planul z . Nu este cazul acestei metode de echivalare decât dacă Ω este foarte mic (pentru $\Omega < \pi/36$ cele două cercuri sunt foarte apropiate). Condiția ca Ω să fie foarte mic revine la condițiile ca ω să fie foarte mic sau ca T să fie foarte mic.

Dacă considerăm că sistemul analogic este de bandă limitată la valoarea ω_M , atunci pentru ca $\Omega_M < \pi/36$ e necesar ca frecvența de eșantionare pe care o folosim să fie de 72 de ori mai mare decât ω_M . Această valoare poate fi foarte mare. În sfârșit, nu e sigur că sistemul digital va fi cauzal. Pentru ca să fie cauzal, ar fi necesar ca regiunea sa de convergență să fie în exteriorul cercului unitate, ceea ce nu se întâmplă neapărat în cazul metodei de echivalare bazată pe aproximarea ecuației diferențiale care descrie sistemul analogic de echivalat cu o ecuație cu diferențe finite.



Exemplu: FTJ de ordinul intai



constanta de timp: $\tau = RC = \frac{1}{\omega_0}$.

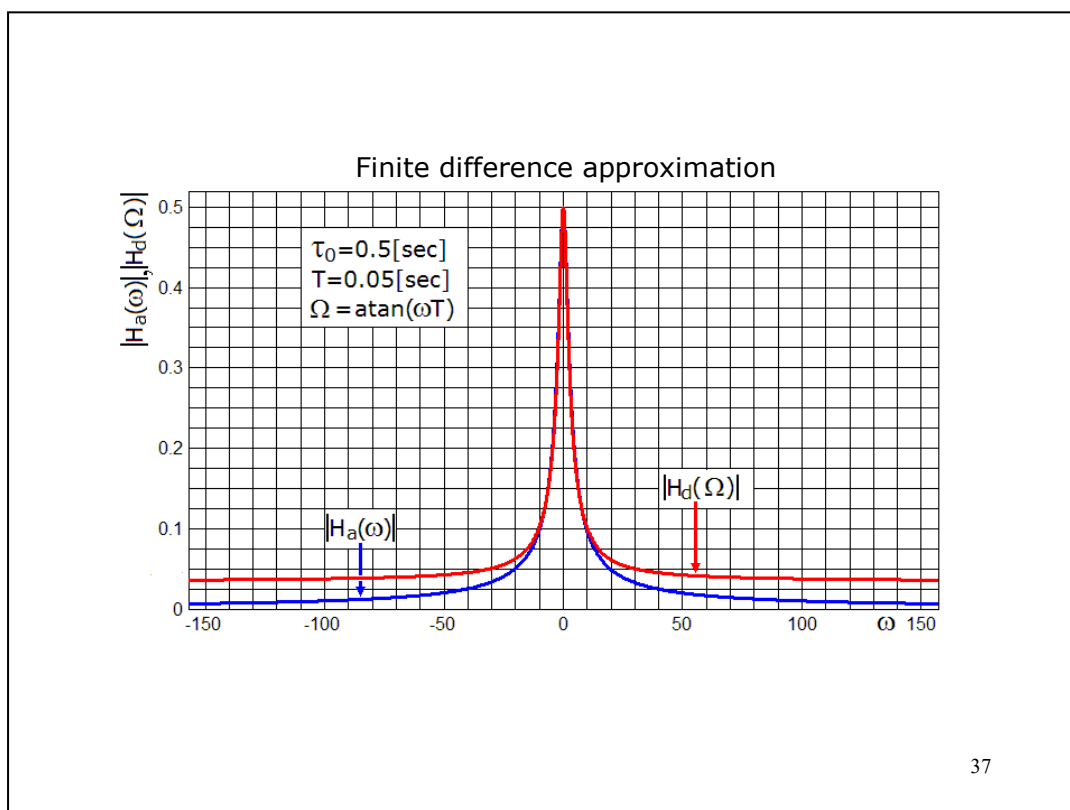
$$H_a(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

$$H_d(z) = \frac{\frac{T}{T + \tau}}{1 - \frac{\tau}{T + \tau} z^{-1}}$$

36

În scopul comparării performanțelor metodei de echivalare bazată pe invarianța răspunsului la impuls cu metoda de echivalare bazată pe aproximarea ecuației diferențiale cu o ecuație cu diferențe finite, vom relua exemplul din cazul echivalării bazate pe invarianța răspunsului la impuls (schema circuitului este prezentată în prima figură). Vom considera că valoarea constantei de timp este egală cu 0.5 sec iar pasul de esantionare $T=0.05$ sec.

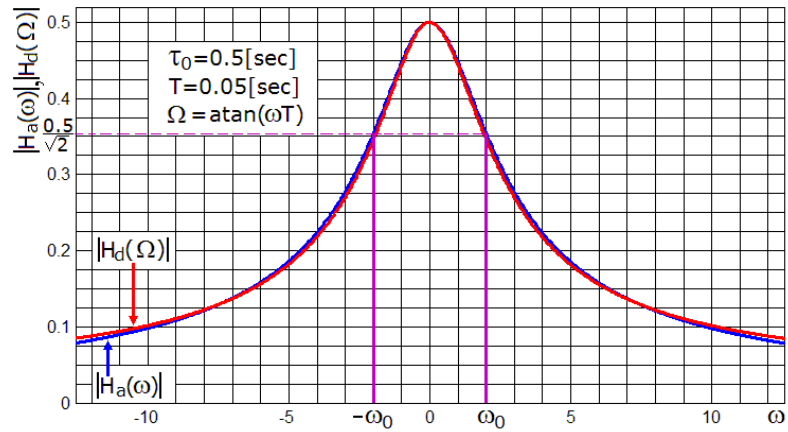
Expresia funcției de transfer a sistemului analogic este $H_a(s)$. Expresia funcției de transfer a filtrului digital echivalent obținut cu metoda de echivalare bazată pe aproximarea ecuației diferențiale cu o ecuație cu diferențe finite este $H_d(z)$.

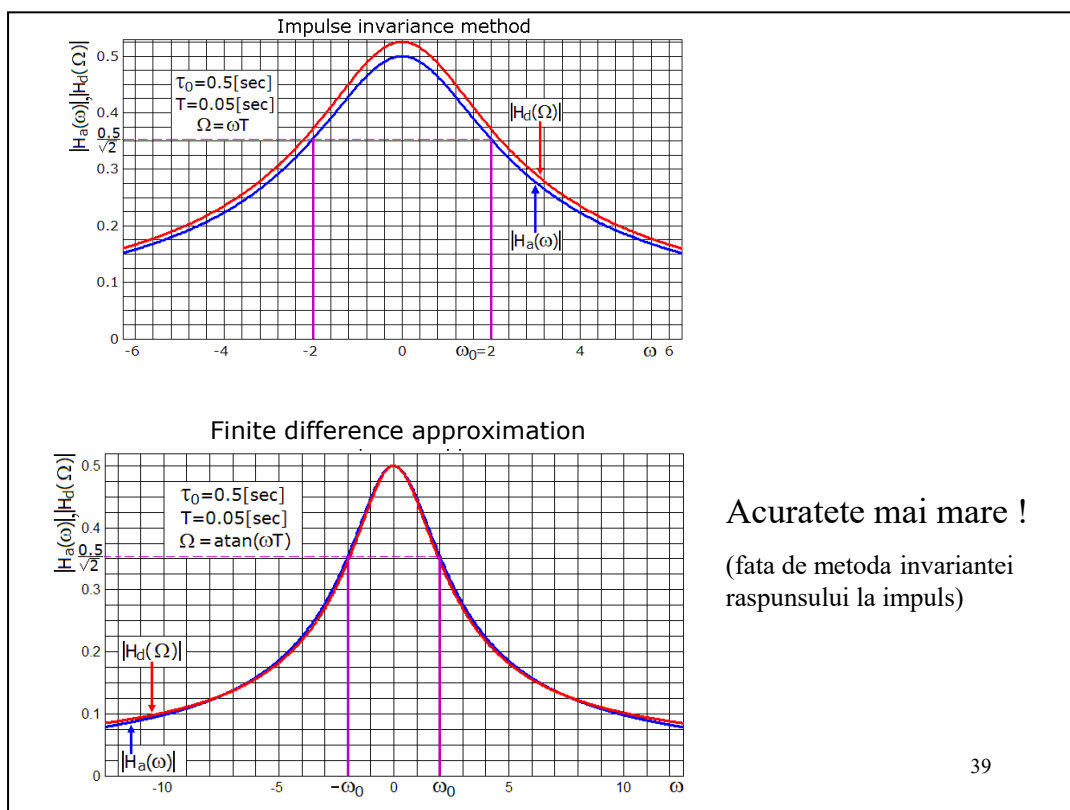


Se compară răspunsurile în frecvență ale sistemului analogic de echivalat și al filtrului digital echivalent în cazul metodei de echivalare bazată pe aproximarea ecuației diferențiale cu o ecuație cu diferențe finite.

Se constată că răspunsul în frecvență al filtrului digital echivalent este apropiat de răspunsul în frecvență al filtrului analogic în special la frecvențe joase (vezi slideul următor)

Finite difference approximation





În figura de sus se compară răspunsurile în frecvență ale filtrului analogic de echivalat și al filtrului digital echivalent obținut pe baza metodei de echivalare bazată pe invarianța răspunsului la impuls.

În figura de jos se compară răspunsurile în frecvență ale sistemului analogic de echivalat și al filtrului digital echivalent în cazul metodei de echivalare bazată pe aproximarea ecuației diferențiale cu o ecuație cu diferențe finite

Se constată că răspunsul în frecvență al filtrului digital echivalent este mai apropiat de răspunsul în frecvență al filtrului analogic în cazul metodei de echivalare bazată pe aproximarea ecuației diferențiale cu o ecuație cu diferențe finite.

4. Echivalarea bazată pe *transformarea biliniară*

Considerăm cazul integratorului analogic, descris de ecuația diferențială:

$$\frac{dy}{dt} = x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{s}.$$

Integrala I_n poate fi calculată numeric folosind, metoda trapezelor.

Aria A_n poate fi aproximată cu aria trapezului ABCD.

$$I_n = y(nT) - y((n-1)T) = \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau) d\tau \cong \frac{(AB + CD)AD}{2} = \frac{[x(nT) + x((n-1)T)]T}{2}.$$

S-a obținut:

$$y[n] - y[n-1] = \frac{T}{2} (x[n] + x[n-1]).$$

Aceasta este ecuația cu diferențe finite care caracterizează sistemul digital cu funcția de transfer

$$H_d(z) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = H_a(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

40

Ultima metodă de echivalare a sistemelor analogice cu sisteme digitale este bazată pe transformarea biliniară. Această transformare a fost studiată și la matematică și este folosită la construcția diagramei cercurilor utilizată la cursul de Tehnica frecvențelor înalte.

Se consideră cazul integratorului ideal. Ecuația diferențială care descrie acest sistem analogic este prezentată în prima ecuație. Integrând în ambii membri și aplicând transformata Laplace se obține funcția de transfer a sistemului analogic $H_a(s)$.

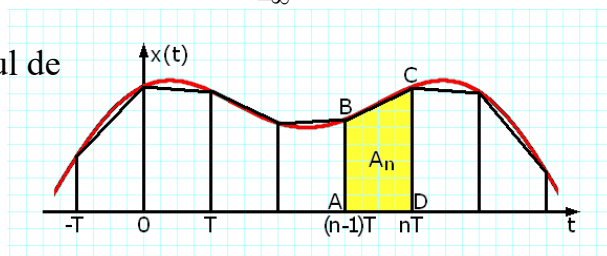
Există metode numerice pentru calculul integralei I_n . Una dintre ele este metoda trapezelor. Se consideră exemplul din figura de pe slideul următor.

Se obține o ecuație cu diferențe finite ce descrie sistemul digital echivalent cu funcția de transfer $H_d(z)$.

Comparând expresiile funcțiilor de transfer ale sistemelor analogic de echivalat $H_a(s)$ și digital echivalent $H_d(z)$ se constată că legătura dintre planele s și z introdusă de această metodă de echivalare este $s = (2/T)(1-1/z)/(1+1/z)$. Aceasta este tocmai transformarea biliniară.

$$\frac{dy}{dt} = x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{s}$$

Semnalul de
intrare



Aria A_n (ABCD) ~ integrala I_n : metode numerice

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}; \quad H_d(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

41

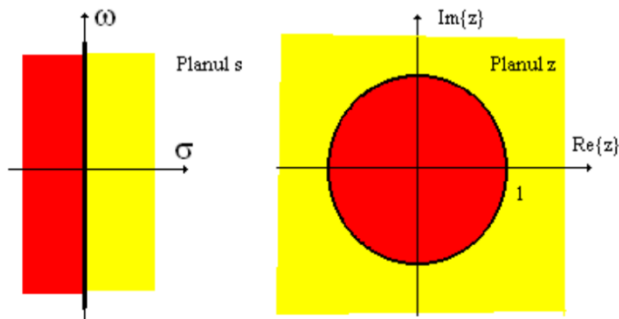
Se consideră exemplul din figură, în care forma de undă a semnalului de intrare este reprezentată cu roșu.

Aria A_n din figură, egală cu diferența dintre $y(nT)$ și $y((n-1)T)$ poate fi aproximată cu aria trapezului ABCD.

Relația dintre planele s și z în cazul echivalării pe baza transformării biliniare

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Leftrightarrow z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{T}{2}\sigma\right)^2 + \left(\frac{T}{2}\omega\right)^2}{\left(1-\frac{T}{2}\sigma\right)^2 + \left(\frac{T}{2}\omega\right)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1 \\ \sigma = 0 \Rightarrow |z| = 1 \\ \sigma > 0 \Rightarrow |z| > 1 \end{cases}$$

Metoda de echivalare bazată pe transformarea biliniară este singura dintre cele trei metode de echivalare la care există o relație între planele s și z care respectă integral condițiile metodelor de echivalare.



$$\begin{cases} \sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1, \text{ semiplanul stâng (planul } s) \Rightarrow \text{discul unitar (planul } z) \\ \sigma = 0 \Rightarrow |z| = 1, \text{ axa imaginara (planul } s) \Rightarrow \text{cercul unitar (planul } z) \\ \sigma > 0 \Rightarrow |z| > 1, \text{ semiplanul drept (planul } s) \Rightarrow \text{o exteriorul discului unitar (planul } z) \end{cases}$$

42

Pe baza primei ecuații se poate exprima z în funcție de s , ca în a doua ecuație. Ținând seama de faptul că $s = \sigma + j\omega$, modulul lui z din ecuația a doua se poate exprima ca în ecuația a treia.

- Se observă că dacă $\sigma < 0$ atunci $|z|$ este subunitar.

Cu alte cuvinte, punctelor din semiplanul stâng al planului s le corespund punctele din interiorul cercului unitate din planul z .

Un sistem analogic stabil se transformă într-un sistem digital stabil.

- Dacă $\sigma = 0$ atunci $|z| = 1$:

Axa imaginară din planul s se transformă în conturul cercului unitate din planul z ;

Dacă sistemul analogic are răspuns în frecvență atunci și sistemul digital echivalent are răspuns în frecvență.

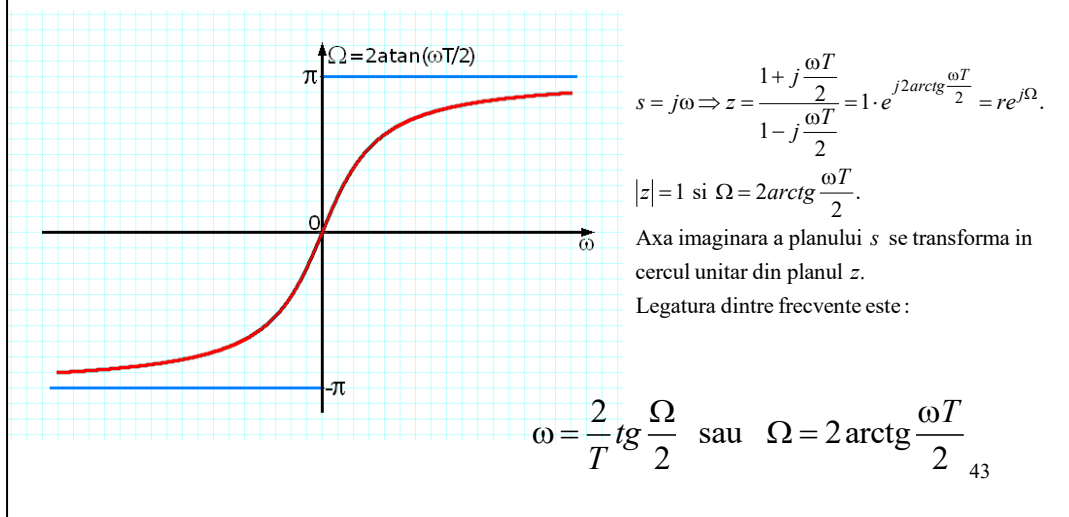
- În sfârșit, dacă $\sigma > 0$ atunci se obține $|z| > 1$.

Semiplanul drept al planului s se transformă în exteriorul cercului unitate din planul z .

Dacă sistemul analogic este cauzal atunci și sistemul digital echivalent este cauzal.

Se remarcă faptul că metoda de echivalare bazată pe transformarea biliniară este singura dintre cele trei metode de echivalare studiate care respectă integral condițiile metodelor de echivalare.

Relația între răspunsurile în frecvență ale sistemelor echivalente în cazul transformării biliniare



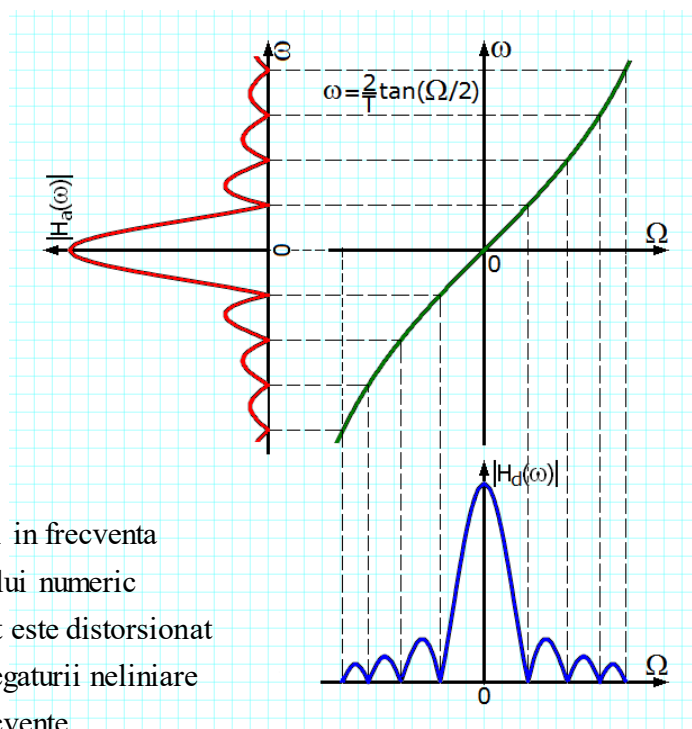
În continuare se determină legătura dintre frecvența digitală și frecvența analogică introdusă de metoda de echivalare a sistemelor analogice cu sisteme digitale bazată pe transformarea biliniară. Așa cum s-a menționat deja, axa imaginară din planul s se transformă în conturul cercului unitate din planul z . Punctele de pe axa imaginară din planul s se exprimă în coordonate polare în forma : $s=j\omega$.

Expresia variabilei z care corespunde transformării biliniare este cea din cea de a doua ecuație. Modulul lui z este egal cu 1.

Relatia de legătura dintre frecvența digitală Ω și frecvența analogică ω nu este liniară.

Dacă la frecvențe joase (ω relativ mic) dependența este cât de cât liniară, pe măsură ce frecvența (ω) crește, dependența devine tot mai neliniară.

În consecință, răspunsurile în frecvență ale sistemului analogic și digital echivalent vor fi asemănătoare la frecvențe joase, dar pe măsură ce frecvența crește aceste răspunsuri vor fi din ce în ce mai diferite.



Raspunsul in frecventa
al sistemului numeric
echivalent este distorsionat
datorita legaturii neliniare
dintre frecvente.