

Transformarea z

http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap10_TransfZ.pdf

Transformarea z generalizează transformarea Fourier în timp discret pentru întreg planul complex la fel ca și transformarea Laplace care generalizează transformarea Fourier pentru întreg planul complex.

Pentru variabila complexă se folosește notația:

$$z = x + j \cdot y = r \cdot e^{j\Omega}; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

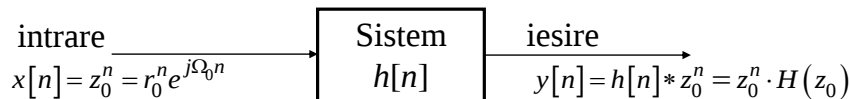
$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Omega = \arg\{z\}$$

1

Următorul capitol este dedicat studiului transformatei z. La fel ca și transformata Laplace care generalizează transformata Fourier pentru întreg planul complex, transformata z generalizează transformata Fourier în timp discret pentru întreg planul complex.

Pentru variabila complexă z se folosește notația în coordonate polare din ecuație, evidențiindu-se modulul și argumentul. Argumentul reprezintă frecvența în timp discret. Partea reală a variabilei z se notează cu x iar partea imaginară cu y.



Răspunsul unui sistem discret liniar și invariant în timp la exponențiala complexă discretă de modul neunitar

$$z = x + jy = re^{j\Omega} ; x, y \in \mathbb{R}; |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ și } \Omega = \arg\{z\}$$

$$z_0^n = r_0^n \cdot e^{j\Omega_0 n} ; y[n] = h[n] * z_0^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z_0^{n-k} = z_0^n \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z_0^{-k}$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k} ; y[n] = z_0^n \cdot H(z_0)$$

$$x[n] = \sum_k c_k z_k^n \Rightarrow y[n] = \sum_k c_k H(z_k) z_k^n.$$

Pentru orice sistem discret LIT

-funcție proprie z_0^n

-valoare proprie $H(z_0)$

2

Am introdus semestrul trecut transformata Fourier în timp discret calculând răspunsul unui sistem discret liniar și invariant în timp la o exponențială complexă de modul unitar. În continuare determinăm răspunsul unui sistem liniar și invariant în timp discret la o exponențială complexă de modul neunitar de forma z_0 la puterea n .

z este variabila complexă de modul r și argument Ω . z_0 este o constantă complexă de modul r_0 și de argument Ω_0 . Semnalul de la ieșirea sistemului liniar și invariant în timp cu răspunsul la impuls $h[n]$ va fi semnalul $y[n]$ obținut prin convoluția dintre $h[n]$ și z_0 la puterea n . Întrucât însumarea se face după indicele k , z_0 la puterea n poate fi dat factor comun. Funcția $H(z)$ reprezintă transformata z bilaterală a răspunsului la impuls $h[k]$ și poartă numele de funcție de transfer a sistemului considerat. Deci răspunsul sistemului la exponențiala complexă discretă de modul neunitar considerată este proporțional cu exponențiala complexă discretă considerată. Exponențiala complexă discretă de modul neunitar este funcție proprie pentru orice sistem liniar și invariant în timp discret. Valoarea proprie corespunzătoare este egală cu valoarea funcției de transfer a sistemului în z_0 . De aceea răspunsul sistemului liniar și invariant în timp discret la o combinație liniară de exponențiale complexe discrete de modul neunitar în care exponențialele complexe sunt ponderate cu coeficienții c_k va fi tot o combinație liniară de exponențiale complexe discrete de modul neunitar în care exponențialele sunt ponderate cu coeficienții $c_k H(z_k)$.

Transformarea z bilaterală

Transformarea z bilaterală a semnalului $x[n]$ discret aperiodic:

$$Z\{x[n]\}(z) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}; z = r \cdot e^{j\Omega}, r \geq 0.$$

Legătura dintre transformata Z și transformata Fourier în timp discret:

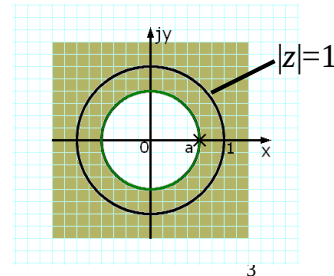
$$Z\{x[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] \cdot r^{-n}) \cdot e^{-j\Omega n} = F\{r^{-n} \cdot x[n]\}(\Omega); r \geq 0.$$

$$|z| = r = 1, Z\{x[n]\}(e^{j\Omega}) = F\{x[n]\}(\Omega).$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r^{-n} x[n]| \cdot |e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r^{-n} x[n]| < \infty$$

$$r^{-n} x[n] \in l^1.$$

Transformata z evaluată pe cercul unitar, de rază $|z|=1$, este transformata Fourier în timp discret



Transformata z bilaterală a semnalului în timp discret $x[n]$ se notează cu $X(z)$ și este definită ca în prima ecuație. Ținând seama de exprimarea variabilei complex z în coordonate polare expresia transformatei z ia forma din ecuația a doua și reprezintă transformata Fourier în timp discret a semnalului r la minus n înmulțit cu $x[n]$. Dacă variabila z este situată pe cercul unitar ($r=1$) atunci transformata z a semnalului $x[n]$ se particularizează la transformata Fourier în timp discret a acestui semnal. Întrucât transformata z reprezintă suma unei serii sunt de interes condițiile în care transformata z este convergentă. Pentru ca să fie convergentă este necesar ca modulul transformatei z să fie finit. Întrucât modulul sumei este mai mic sau egal decât suma modulelor și modulul exponențialei complexe este unitar, modulul transformatei z va fi mai mic sau egal cu suma seriei modulelor $r^{-n} \cdot x[n]$. Această serie este convergentă dacă produsul $r^{-n} \cdot x[n]$ este un semnal de clasă l^1 .

Example

$$1. x[n] = a^n \sigma[n], \quad |a| < 1.$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

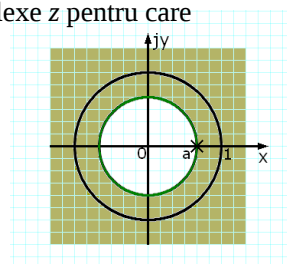
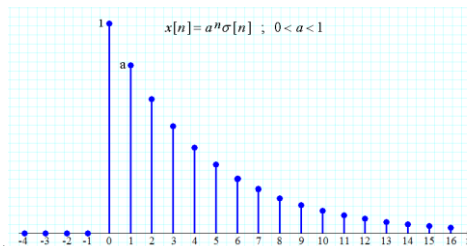
$$\text{Dacă } |az^{-1}| < 1 \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}.$$

Regiunea de convergență (ROC) = valorile variabilei complexe z pentru care $X(z)$ există

$X(z)$ -funcție rațională, **zerourile** = rădăcini ale numărătorului; **polii** = rădăcini ale numitorului.

Constelația de poli și zerouri (PZC).



4

În continuare se prezintă câteva exemple de calcul a transformatei z bilaterale. Pentru semnalul din primul exemplu aplicând definiția transformatei z se obține suma unei serii de puteri de rație $a \cdot z^{-1}$. Această serie este convergentă dacă modulul rației este subunitar. Această condiție este echivalentă cu condiția ca $|z|$ să fie mai mare decât $|a|$. Mulțimea valorilor lui z pentru care o transformată z este convergentă se numește regiune (domeniu) de convergență a acelei transformate. Suma seriei de puteri este egală cu inversul diferenței dintre 1 și rație. Se observă că suma seriei este egală cu $z/(z-a)$, care este o funcție rațională de z . Rădăcinile ecuației obținută prin egalarea numărătorului transformatei z cu zero se numesc zerouri ale transformatei z . Rădăcinile ecuației obținută egalând numitorul transformatei z cu 0 se numesc polii ai transformatei z . Amplasarea în planul complex a polilor și zerourilor unei transformate z se numește constelație de poli și zerouri a acelei transformate z . Polii se notează cu cruciulițe iar zerourile cu cerceulețe. În figură este prezentată constelația de poli și zerouri a transformatei z din acest prim exemplu. S-a considerat că a este pozitiv caz în care este egal cu modulul său. Avem un pol în a și un zero în origine. Pe aceeași figură este reprezentată cu puncte regiunea de convergență a transformatei z . Aceasta reprezintă exteriorul cercului de rază a . După cum s-a spus deja transformata z se particularizează la transformata Fourier în timp discret pe cercul unitate. Întrucât, așa după cum se observă în figură, cercul unitate aparține regiunii de convergență a transformatei z , semnalul considerat are și transformată Fourier în timp discret. Aceasta se obține substituind variabila z cu $\exp(j\Omega)$ în expresia transformatei z . Se obține expresia transformatei Fourier în timp discret din ultima ecuație. Se constată, verificând în tabelul de perechi semnal transformată Fourier în timp discret că această ecuație este într-adevăr corectă.

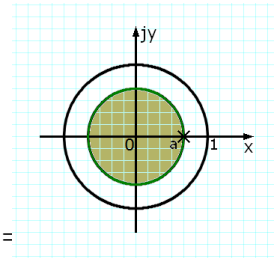
$$2. x[n] = -a^n \sigma[-n-1]$$

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{az^{-1}} \right)^n =$$

$$= - \frac{1}{az^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a \cdot z^{-1}} \right)^n$$

$$\text{Dacă } \frac{1}{|a| |z^{-1}|} < 1 \text{ atunci } X(z) = - \frac{1}{az^{-1} \left(1 - \frac{1}{az^{-1}} \right)} =$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}}; |z| < |a|.$$



5

Semnalul din primul exemplu era causal. În cel de al doilea exemplu se consideră un semnal anticausal. Transformata sa z se calculează pe baza definiției. Făcând schimbarea de indice n în $-n$ se obține suma unei serii de puteri de rație z/a . Această serie este convergentă dacă modul rației este subunitar. În consecință, regiunea de convergență a transformatei z din exemplul 2 este interiorul cercului de rază a (s-a considerat că a este cuprins între 0 și 1). Suma seriei de puteri este egală cu $z/(z-a)$. Constelația de poli și zerouri și regiunea de convergență sunt prezentate în figură. Întrucât cercul unitate nu este cuprins în regiunea de convergență, acest semnal are transformată z dar nu are transformată Fourier în timp discret. Comparând exemplele 1 și 2 constatăm că ambele semnale au aceeași transformată z deși primul este causal și al doilea este anticausal. Diferența între transformatele z ale celor două semnale o face însă domeniul de convergență care în cazul primului semnal este exteriorul unui cerc iar în cazul celui de al doilea semnal este interiorul aceluiași cerc. De aici poate fi înțeleasă importanța regiunii de convergență a transformatei z .

Proprietatile domeniului de convergenta al transformarii z bilaterale

1. Domeniul de convergenta al transformatei z bilaterale nu poate contine nici un pol al acesteia.
2. Daca $x[n]$ este un semnal cu suportul de durata finita, $X(z)$, transformata sa bilaterala exista in tot planul, cu exceptia eventual a punctelor $z = 0$ si/sau $z = \infty$.
3. Daca $x[n]$ este un semnal cu intindere infinita spre dreapta si daca cercul $|z| = r_0$ este din domeniul de convergenta al transformatei z bilaterale, atunci toate punctele din plan $|z| > r_0$, cu exceptia eventual a punctului de la infinit, sunt din domeniul de convergenta.

6

La fel ca în cazul transformatei Laplace și în cazul transformatei z domeniul de convergență are 5 proprietăți.

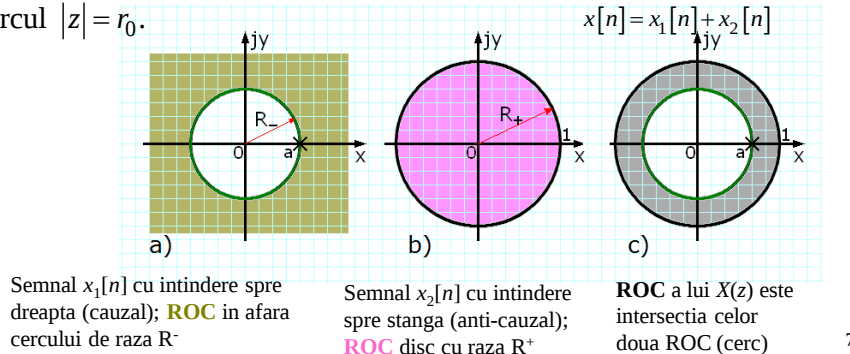
Prima proprietate arată că polii unei transformate z nu pot aparține regiunii sale de convergență. Într-adevăr, când z ia valoarea unui pol, numitorul transformatei z se anulează și valoarea transformatei z devine infinită.

Proprietatea a doua a regiunii de convergență se referă la semnale de durată finită. În cazul acestora transformata z nu se mai exprimă printr-o serie ci ea devine o sumă cu un număr finit de termeni. De aceea problema convergenței dispăre. Putem afirma că regiunea de convergență este întreg planul complex.

Proprietatea 3 se referă la semnale cauzale (cu întindere infinită spre dreapta). Regiunea de convergență a acestora este exteriorul unui cerc (ca în exemplul 1).

Proprietatea 4 se referă la semnale anticauzale (cu întindere infinită spre stânga).

4. Dacă $x[n]$ este un semnal cu întindere infinită spre stânga și dacă cercul $|z| = r_0$ este inclus în domeniul de convergență al transformatei z bilaterale atunci toate punctele din plan $|z| \leq r_0$, cu excepția eventual a punctului din origine sunt din domeniul de convergență.
5. Dacă $x[n]$ este un semnal cu întindere infinită atât la stânga cât și la dreapta și dacă cercul $|z| = r_0$ este inclus în domeniul de convergență al transformatei z bilaterale, atunci acesta este o coroană circulară ce include cercul $|z| = r_0$.



7

Proprietatea 4 se referă la semnale anticauzale (cu întindere infinită spre stânga). Regiunea de convergență a transformatei z a unui semnal anticauzal este interiorul unui cerc (ca în exemplul 2).

Proprietatea 5 se referă la semnale cu întindere infinită atât la dreapta cât și la stânga. Regiunea de convergență a unui astfel de semnal (dacă există) este o coroană circulară. În continuare se dau încă un exemplu de calcul a transformatei z a unui semnal pentru a exemplifica și proprietatea 5.

Exemplu

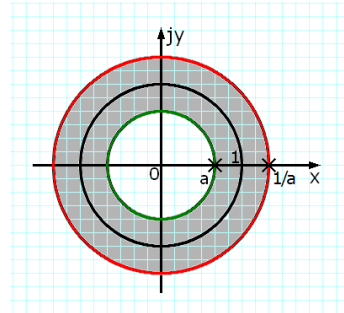
$$3. x[n] = a^{|n|}, 0 < a < 1, x_1[n] = a^n \sigma[n], \\ x_2[n] = a^{-n} \sigma[-n-1], x[n] = x_1[n] + x_2[n].$$

$$a^n \sigma[n] \rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}; |z| > a.$$

$$a^{-n} \sigma[-n-1] = \left(\frac{1}{a}\right)^n \sigma[-n-1] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-1}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{a}.$$

$$a^{|n|} \rightarrow \frac{a^2 - 1}{a} \frac{z}{(z - a)\left(z - \frac{1}{a}\right)}; a < |z| < \frac{1}{a}.$$



8

Semnalul din exemplul 3 este cu întindere infinită atât spre dreapta cât și spre stânga. El poate fi descompus într-o sumă de două semnale, unul cauzal, x_1 , și unul anticauzal x_2 , $x = x_1 + x_2$. Regiunea de convergență a transformatei z a primului semnal este $|z| > a$ deoarece este vorba tocmai despre semnalul din exemplul 1.

Cel de al doilea semnal este de tipul semnalului din exemplul 2 și transformata sa z are regiunea de convergență $|z| < 1/a$.

În consecință regiunea de convergență a transformatei z a semnalului din acest exemplu este coroana circulară cuprinsă între cercurile de rază a și $1/a$. Dacă a are valori cuprinse între 0 și 1 atunci cercul unitar aparține regiunii de convergență a transformatei z și semnalul are și transformată Fourier în timp discret.

Trasformarea z inversa

Fie Γ un contur închis inclus în domeniul de convergență al transformatei z bilaterale

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k}$ se înmulțește cu z^{n-1} și se integrează pe cercul Γ :

$$\int_{\Gamma} z^{n-1} dz = \int_{\Gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{n-k-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^{k-n+1}}. \text{ Pentru orice funcție olomorfa}$$

în DC, $f(z)$ și orice curba închisă Γ din DC avem: $\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z),$

a un punct interior curbei. Funcția $f(z)=1$ este olomorfa în întreg planul complex, deci și în DC. Punctul $a=0$, este interior cercului Γ considerat.

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \begin{cases} \frac{2\pi j}{n!} \cdot 1, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz; \Gamma \in DC$$

$$Z^{-1}\{X(z)\}[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz = x[n]; x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z).$$

9

La fel ca și în cazul inversării transformatei Laplace și în cazul transformatei z se calculează integrala curbilinie a unei funcții complexe. Se consideră un contur închis Γ (de exemplu un cerc) inclus în regiunea de convergență a transformatei z pe care dorim să o inversăm. Se înmulțește $X(z)$ cu z^{n-1} și se integrează pe conturul ales. Datorită liniarității integralei se obține o serie de termen general dat de produsul dintre $x[k]$ și integrala pe contur a funcției $(1/z)^{k-n+1}$. O teoremă din cadrul analizei matematice a funcțiilor complexe afirmă că integrala pe un contur închis a unei funcții olomorfe (indefinit derivabilă) $f(z)$ împărțită la $(z-a)^{n+1}$ este proporțională cu derivata de ordinul n a acelei funcții dacă punctul a se află în interiorul conturului închis. Considerăm funcția constantă $f(z)=1$ și punctul $a=0$, interior cercului considerat drept contur închis. Aplicăm teorema evocată anterior pentru n substituit cu $k-n$ pentru a calcula suma seriei obținută la calculul integralei pe Γ a produsului dintre $X(z)$ și z la puterea $n-1$. Se constată că suma seriei considerate are în acest caz un singur termen diferit de 0 de valoare $2\pi j x[n]$. Împărțind în ambii membri cu $2\pi j$ se obține $x[n]$ transformata z inversă a lui $X(z)$. Pentru a calcula transformata z inversă a lui $X(z)$ este deci necesar să calculăm o integrală curbilinie pe un cerc Γ din produsul $X(z)$ și z la puterea $n-1$.

Definirea transformatei z bilaterale prin constelatia de poli si zerouri

Daca $X(z)$ este o fractie rationala:

$$X(z) = k \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_{0k})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})} ; z \in DC.$$

Este suficienta cunoasterea polilor z_{pk} si a zerourilor z_{0k} pentru a cunoaste $X(z)$ cu exceptia constantei k .

Daca se cunoaste in plus si valoarea $X(z_0)$ intr-un anumit punct z_0 din DC, se poate determina si constanta k .

10

Dupa cum s-a observat in majoritatea exemplelor date deja transformata z este o functie rationala (raport de doua polinoame). Daca se cunosc polii si zerourile transformatei z atunci polinoamele de la numarator si de la numitor pot fi factorizate in monoame care contin radacinile acestora ca in formula. In acest caz, pornind de la poli si zerouri putem identifica transformata z cu exceptia valorii constantei k . Daca cunoastem si valoarea transformatei z intr-un punct, $X(z_0)$ atunci putem determina si valoarea constantei k . Deci pentru a afla expresia unei transformate z este suficient sa-i cunoastem constelatia de poli si zerouri si valoarea intr-un punct.

Exemplu

Fie constelația de poli și zerouri din figura cu $z_0 = 0$ și $z_p = 0,5$.

$$\text{Pentru } k = 1: X(z) = \frac{z}{z - 0,5} = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}.$$

Dacă semnalul $x[n]$ este cauzal atunci

$$DC: |z| > |z_p| = 0,5.$$

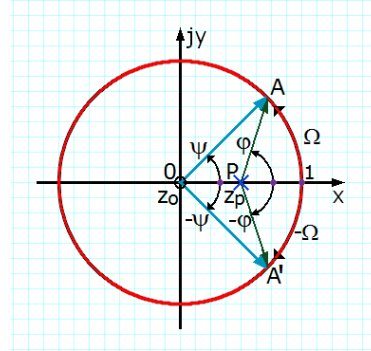
Deoarece cercul unitar este în interiorul DC

semnalul $x[n]$ are și transformata Fourier în timp discret:

$$X(\Omega) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0,5} = \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\Omega}}$$

Fie punctul A de pe cercul unitar, plasat la unghiul Ω (lungimea arcului de cerc în radiani).

$$|X(\Omega)| = \frac{|\overline{OA}|}{|AP|}; \quad \Phi(\Omega) = \arg X(\Omega) = \psi - \varphi.$$



11

De exemplu, în cazul constelației de poli și zerouri din figură, pentru k de valoare 1, găsim expresia transformatei z din prima ecuație. Simplificând cu z , se obține expresia din membrul drept al celei de a doua ecuații. Considerând că este vorba despre un semnal cauzal, domeniul de convergență al acestei transformate z va fi exteriorul cercului de rază 0,5. Deoarece cercul unitar este inclus în acest domeniu de convergență, semnalul considerat va avea și transformată Fourier în timp discret. Expresia acesteia se obține substituind z cu $\exp(j\Omega)$ în expresia lui $X(z)$. Mai mult, pornind de la constelația de poli și zerouri, se poate trasa și hodograful (reprezentarea grafică în planul complex a transformatei Fourier în timp discret) corespunzător. Pentru aceasta, se consideră un punct mobil A pe cercul unitate și se construiesc vectorii cu originea în poli și zerouri și cu vârful în A, PA și OA. Transformata Fourier în timp discret este proporțională cu raportul dintre vectorii OA și AP. Modulul transformatei Fourier în timp discret va fi egal cu raportul dintre modulele vectorilor OA și AP iar argumentul transformatei Fourier în timp discret va fi egal cu diferența unghiurilor pe care le formează acești vectori cu axa reală ($\psi - \varphi$). În consecință măsurând modulele și unghiurile pe care le formează acești vectori cu axa reală pentru diferite poziții ale punctului A, poate fi trasat hodograful transformatei Fourier în timp discret.

În cazul general, notând cu z_{pk} și cu z_{0k} poli și zerourile și cu ψ_k și ϕ_k unghiurile pe care le formează vectorii Az_{pk} și Az_{0k} cu axa orizontală, se poate scrie:

$$|X(z)| = |k| \frac{\prod_{k=1}^M |Az_{0k}|}{\prod_{k=1}^N |Az_{pk}|} ; \Phi(\Omega) = \arg k + \sum_{k=1}^M \psi_k - \sum_{k=1}^N \phi_k.$$

Frecvența Ω reprezintă lungimea arcului de cerc măsurat în radiani, pe cercul unitar, de la intersecția acestuia cu semi-axa $x > 0$ și până în punctul A, sensul fiind cel trigonometric.

12

La fel se procedează și în cazul general. Se construiesc vectorii cu originile în poli și zerouri și cu vârful în punctul A, se măsoară lungimile lor (modulele) și unghiurile pe care le formează cu axa orizontală și se înlocuiesc valorile obținute în cele două formule (prima este pentru modulul transformatei Fourier în timp discret iar cea de a doua pentru argumentul transformatei Fourier în timp discret). În acest mod se obține un punct de pe hodograf. Apoi se modifică poziția punctului A pe cercul unitate și se reiau măsurătorile (calculul) de lungime și de unghiuri. Frecvența reprezintă lungimea arcului de cerc măsurat în radiani pe cercul unitar de la intersecția acestuia cu semi-axa pozitivă a axei orizontale până în punctul A, în sens trigonometric.

Transformata z unilaterală

$$Z_u \{x[n]\}(z) = X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$

Transformata z unilaterală poate fi privită ca și transformata z bilaterală a unui **semnal causal**.

Domeniul de convergență al transformatei unilaterale este fie tot planul, fie exteriorul unui disc cu centrul în origine.

Transformata z unilaterală este indicată pentru studiul sistemelor cauzale caracterizate de ecuații cu diferențe finite liniare și cu coeficienți constanți care au **condiții initiale nule**.

13

În cazul semnalelor cauzale (care au valoarea 0 pentru momente negative) transformata z bilaterală se transformă în transformată z unilaterală. Aceasta se notează cu indice u și are expresia din ecuație. Fiind vorba de un semnal causal, domeniul de convergență al transformatei z unilaterale va fi exteriorul unui cerc sau întreg planul complex. După cum se va vedea în continuare transformata z unilaterală are proprietăți asemănătoare cu proprietățile transformatei z bilaterale.

Apar câteva diferențe în cazul proprietăților care se referă la întârzierea unui semnal respectiv la diferențele finite ale unui semnal.

Din acest motiv, se recomandă folosirea transformatei z unilaterale în cazul sistemelor liniare și invariante în timp discret cauzale descrise prin ecuații cu diferențe finite cu coeficienți constanți dar cu condiții inițiale nule.

Proprietatile transformarii z

Notatii:

$$x[n] \stackrel{Z}{\leftrightarrow} X(z), z \in DC_x; x[n] \stackrel{Z_u}{\leftrightarrow} X_u(z)$$

$$y[n] \stackrel{Z}{\leftrightarrow} Y(z), z \in DC_y; y[n] \stackrel{Z_u}{\leftrightarrow} Y_u(z).$$

Tema de curs:
Demonstratiile

1. Liniaritate

$$ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(z) + bY(z); z \in DC_x \cap DC_y, \text{ cel puțin}$$

$$ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX_u(z) + bY_u(z)$$

14

Întrucât transformata z bilaterale este o generalizare a transformatei Fourier în timp discret, proprietățile sale vor fi asemănătoare cu proprietățile transformatei Fourier în timp discret. La fel ca și în cazul transformatei Laplace, care reprezintă o generalizare a transformatei Fourier, vor apărea două proprietăți suplimentare înscrise sub denumirile de teorema valorii inițiale respectiv teorema valorii finale. Diferența majoră dintre proprietățile transformatei z bilaterale și proprietățile transformării Fourier în timp discret rezidă în faptul că în cazul transformatei z trebuie să ținem seama și de domeniul de convergență.

Prima proprietate a transformatei z este cea de liniaritate. Dacă transformatele z ale semnalelor x și y au domeniile de convergență DC_x și DC_y atunci domeniul de convergență al combinației liniare a semnalelor x și y va fi intersecția domeniilor de convergență DC_x și DC_y , cel puțin.

În tema de curs se solicită demonstrarea proprietății de liniaritate a transformatelor z bilaterală și unilaterală. Această demonstrație poate fi făcută pornind de la definițiile celor două transformate z.

2. Translatia in timp

$$x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z), z \in DC.$$

Demonstratie

$$Z\{x[n - n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n} \stackrel{n-n_0=m}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m}$$

Daca $n_0 > 0$, $z = 0$ se elimina din DC iar daca $n_0 < 0$, $z = \infty$ se elimina din DC.

In cazul transformarii unilaterale, pentru $n_0 > 0$:

$$\begin{aligned} Z_u\{x[n - n_0]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n} \stackrel{n-n_0=m}{=} \sum_{m=-n_0}^{\infty} x[m] z^{-m} z^{-n_0} \\ &= z^{-n_0} \left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} + \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m] z^{-m} \right), \end{aligned}$$

$$x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} \left(X_u(z) - \sum_{n=-n_0}^{-1} x[n] z^{-n} \right)$$

15

Proprietatea a doua se referă la translația în timp. Domeniul de convergență al transformatei z a semnalului traslatat în timp este identic cu domeniul de convergență al semnalului inițial. Demonstrația în cazul transformatei z bilaterale pornește de la definiția transformatei z a semnalului traslatat. Se face schimbarea de variabilă $n-n_0=m$ și se obține rezultatul din enunțul proprietății. Se constată că apare un pol cu ordinul de multiplicitate n_0 suplimentar în zero. În consecință, din domeniul de convergență trebuie exclus punctul 0 pentru n_0 pozitiv și punctul de la infinit pentru n_0 negativ.

În cazul transformatei z unilaterale, nu se pune problema ca n_0 să fie negativ. În urma schimbării de variabilă $n-n_0=m$ se obține o sumă de la $-n_0$ la infinit, care se descompune în două sume, una de la $-n_0$ la -1 și cealaltă de la 0 la infinit. Suma de la 0 la infinit reprezintă transformata z unilaterală a semnalului original iar cealaltă sumă depinde de condiții inițiale $x[-1]$, $x[-2]$, etc.

3. Modularea în timp

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{-j\Omega_0} z), z \in DC.$$

Demonstratie

$$Z\{e^{j\Omega_0 n} x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 n} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (e^{-j\Omega_0} z)^{-n},$$

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X_u(e^{-j\Omega_0} z).$$

Mai general:

$$z_0^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \frac{z}{z_0} \in DC; \quad z_0^n x[n] \leftrightarrow X_u\left(\frac{z}{z_0}\right).$$

4. Reflectarea semnalului

$$x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1}), \quad \frac{1}{z} \in DC.$$

Demonstratie

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} \stackrel{m=-n}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{z}\right)^{-m} = X\left(\frac{1}{z}\right).$$

16

Și proprietatea de modulare în timp (înmulțire cu o exponențială complexă de modul unitar) poate fi demonstrată aplicând direct definiția transformatei z (bilaterală sau unilaterală). Se constată că prin înmulțire cu exponențiala complexă de modul unitar nu se modifică domeniul de convergență.

Această proprietate poate fi formulată și într-o formă mai generală, care se referă la înmulțirea dintre semnal, $x[n]$ și o exponențială complexă de modul cunoscut (nu neapărat unitar) z_0 la puterea n . Transformata z a produsului este transformata z a lui x de variabilă z/z_0 . Domeniul de convergență al transformatei z a produsului este mulțimea valorilor lui z pentru care noua variabilă z/z_0 aparține domeniului de convergență al lui $X(z)$.

Pentru a demonstra această proprietate, demonstrație solicitată în tema de curs, se recomandă să folosiți definițiile transformatelor z bilaterală și unilaterală.

Și proprietatea transformării z bilaterale referitoare la reflectarea semnalului se poate demonstra pe baza definiției. Se face schimbarea de variabilă $m=-n$ și se obține drept rezultat transformata z a lui x de variabilă $1/z$. Domeniul de convergență al transformatei z bilaterale a semnalului reflectat este mulțimea valorilor lui z pentru care $1/z$ aparține domeniului de convergență a lui $X(z)$.

Această proprietate nu există pentru transformata z unilaterală deoarece prin reflectarea unui semnal cauzal se obține un semnal anticauzal.

5. Diferențierea în domeniul n

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - z^{-1})X(z); z \in DC;$$

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - z^{-1})X_u(z) - x[-1].$$

6. Insumarea în domeniul n

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{X(z)}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} X(z); z \in DC \cap DC^*; DC^* = \{z \mid |z| > 1\}.$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{X_u(z) + \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]}{1 - z^{-1}}; |z| > 1.$$

Demonstratie

$$\text{Fie } y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \Rightarrow x[n] = y[n] - y[n-1] \leftrightarrow X(z) = (1 - z^{-1})Y(z);$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z).$$

Pentru transformata unilateriala:

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \leftrightarrow X_u(z) = (1 - z^{-1})Y(z) - y[-1], y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k].$$

Proprietatea de diferențiere în domeniul n poate fi demonstrată folosind proprietatea de translație în timp (proprietatea 2) pentru $n_0=1$. Se observă că transformata z unilaterială depinde de condiția inițială $x[-1]$.

Proprietatea de însumare în domeniul n poate fi demonstrată cu ajutorul proprietății de diferențiere în domeniul n. Dacă se notează cu $y[n]$ suma eșantioanelor semnalului $x[k]$ calculată de la minus infinit la n atunci semnalul $x[n]$ se poate exprima ca diferență între $y[n]$ și $y[n-1]$. Luând în ambii membri transformata z bilaterală se obține legătura dintre transformatele z ale semnalelor x și y. De aici rezultă expresia lui Y în funcție de X. Domeniul de convergență al transformatei z a rezultatului însumării în domeniul timp este intersecția dintre domeniul de convergență al lui X(z) și exteriorul cercului de rază unitară. În cazul transformatei z unilaterale proprietatea de diferențiere în timp este diferită, apărând și valoarea $y[-1]$.

7. Diferențierea în domeniul z

$$nx[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} ; z \in \text{DC}.$$

$$nx[n] \leftrightarrow -z \frac{dX_u(z)}{dz}.$$

8. Conjugarea complexă în domeniul timp

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*\left(z^*\right), z \in \text{DC}.$$

$$x^*[n] \leftrightarrow X_u^*\left(z^*\right).$$

Demonstratie

$$Z\left\{x^*[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(z^*\right)^{-n} \right)^* = X^*\left(z^*\right);$$

18

Proprietatea de diferențiere în domeniul z poate fi verificată prin calculul direct al derivatei.

Și proprietatea de conjugare complexă (a unui semnal în timp discret cu valori complexe) poate fi demonstrată pe baza definiției transformatei z . Se știe de la seminarul 1 de la semnale și sisteme că prin conjugarea complexă a unei sume de numere complexe se obține suma conjugatelor complexe. Transformata z a conjugatului complex al semnalului $x[n]$ este conjugata complexă a transformatei z a lui x de variabilă z conjugat.

9. Teorema convoluției în domeniul timp

$$x[n], y[n] \in C.$$

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(z)Y(z) \quad z \in DC_x \cap DC_y \text{ cel puțin.}$$

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X_u(z)Y_u(z).$$

Demonstratie

$$\begin{aligned} Z\{x[n] * y[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] * y[n])z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]z^{-k}z^{-(n-k)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = Y(z)X(z). \end{aligned}$$

19

Una dintre cele mai importante proprietăți ale transformatei z este proprietatea de convoluție în domeniul timp. Transformata z a convoluției semnalelor $x[n]$ și $y[n]$ este egală cu produsul dintre transformatele z ale semnalelor x și y . Dacă domeniul de convergență al transformatei z a semnalului x este DC_x și domeniul de convergență al transformatei z a semnalului y este DC_y atunci domeniul de convergență al transformatei z a convoluției este intersecția dintre DC_x și DC_y , cel puțin. Demonstrația proprietății se face pe baza definiției transformatei z , în care se explicitează suma de convoluție și se înmulțește și se împarte cu z la puterea $-k$. Apoi se face schimbarea de variabilă $n-k=m$ și se separă cele două sume obținându-se produsul transformatelor z $Y(z)$ și $X(z)$.

10. Teorema produsului semnalelor in domeniul timp

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(u)Y\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}, \Gamma \in \text{DC}.$$

$$\text{DC}_x = \left\{ z | R_x^- < |z| < R_x^+ \right\}; \text{DC}_y = \left\{ z | R_y^- < |z| < R_y^+ \right\}$$

$$\Rightarrow R_x^- < |u| < R_x^+ \text{ si } R_y^- < \frac{|z|}{|u|} < R_y^+.$$

Prin inmultire $\Rightarrow$

$$R_x^- \cdot R_y^- < |z| < R_x^+ \cdot R_y^+ \Leftrightarrow \text{DC} = \left\{ z | R_x^- \cdot R_y^- < |z| < R_x^+ \cdot R_y^+ \right\}.$$

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X_u(u)Y_u\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}, \Gamma \in \text{DC}.$$

20

Proprietatea duală se referă la produsul în domeniul timp. Transformata z a produsului semnalelor x și y este proporțională cu o integrală curbilinie din produsul dintre $X(u)$ și $Y(z/u)$. Dacă regiunile de convergență ale transformatei z ale semnalelor x și y sunt coroanele circulare cuprinse între cercurile de raze R_x^- și R_x^+ și respectiv R_y^- și R_y^+ atunci regiunea de convergență a transformatei z a produsului dintre semnalele x și y va fi coroana circulară cuprinsă între cercurile de raze $R_x \cdot R_y^-$ și $R_x \cdot R_y^+$.

Demonstratie

$$\begin{aligned} Z\{x[n]y[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(u)u^{n-1} du \right) y[n]z^{-n} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{\Gamma} X(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \left(\frac{z}{u} \right)^{-n} \right] \frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(u)Y\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Particularizari.

$$\begin{aligned} x[n] \in l^2, y[n] = x^*[n] &\Rightarrow \|x[n]\|^2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(u) X^*\left(\frac{z^*}{u^*}\right) \frac{du}{u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(u) X^*\left(\frac{z^*}{u^*}\right) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Daca $u = e^{j\Omega} \Rightarrow u^* = e^{-j\Omega}$ si $du = je^{j\Omega} d\Omega$ si

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) X^*(e^{j\Omega}) j \frac{e^{j\Omega} d\Omega}{e^{j\Omega}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega \end{aligned}$$

21

Pentru demonstrație se aplică definiția transformatei z bilaterală a produsului xy și se exprimă semnalul x ca și transformare z inversă a lui X(u). În expresia obținută se identifică transformata z a lui y și se obține integrala curbilinie deja amintită.

O particularizare interesantă se obține dacă se consideră că semnalul x[n] este de energie finită și că semnalul y[n] este egal cu conjugatul complex al semnalului x[n]. În acest caz produsul dintre x și y devine egal cu pătratul modulului lui x. Se obține expresia transformatei z a pătratului modulului semnalului x[n]. Substituind u cu exp(jΩ) se obține transformata Fourier în timp discret a pătratului modulului semnalului x[n]. S-a demonstrat în acest mod relația lui Parseval pentru semnale în timp discret de energie finită.

11. Teorema valorii initiale a unui semnal discret cauzal

$$x[0] = \lim_{|z| \rightarrow \infty} X_u(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} X(z).$$

Demonstratie

$$X(z) = X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + \frac{1}{z}x[1] + \dots$$

Trecand la limita se obtine relatia din enunt.

12. Teorema valorii finale a unui semnal discret cauzal

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X_u(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z).$$

Demonstratie

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]z^{-n} - X_u(z) \stackrel{n+1=m}{=} \sum_{m=1}^{\infty} x[m]z^{-(m-1)} - X_u(z) = \\ &= z \left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} - x[0] \right) - X_u(z) = (z-1)X_u(z) - zx[0]. \end{aligned}$$

$$\text{Pentru } z \rightarrow 1: \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])z^{-n} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X_u(z) - x[0],$$

$$\text{sau: } x[\infty] - x[0] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X_u(z) - x[0] \Leftrightarrow x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X_u(z). \quad 22$$

În cazul semnalelor în timp discret cauzale teorema valorii inițiale are forma din prima ecuație, valoarea inițială a semnalului $x[0]$ se calculează ca limită când modul de z tinde la infinit din $X(z)$. Demonstrația face din nou apel la definiția transformatei z (unilaterală de data aceasta). Transformata z unilaterală a semnalului $x[n]$ se exprimă ca și sumă dintre valoarea inițială și alți termeni care sunt proporționali cu puteri negative ale lui z . Acești termeni tind la zero când modulul lui z tinde la infinit.

Valoarea finală a unui semnal cauzal în timp discret se poate calcula ca limită când z tinde la 1 din produsul $(z-1)X(z)$. Pentru demonstrație se pornește de la transformata z unilaterală a diferenței $x[n+1]-x[n]$. Aceasta este egală cu diferența dintre transformata z unilaterală a semnalului $x[n+1]$ și transformata z unilaterală a semnalului $x[n]$.

În urma substituției $n+1=m$ și a adăugării și scăderii lui $x[0]$, poate fi dat z factor comun și se obține forma finală a transformatei z a semnalului $x[n+1]-x[n]$ ca diferență a produselor dintre $z-1$ și transformata z unilaterală a semnalului x și z și $x[0]$. Apoi se trece la limită pentru z tinzând la 1. În membrul stâng se obține sumă după n luând valori de la 0 la infinit din $x[n+1]-x[n]$ iar în membrul drept se obține diferența dintre limită și $x[0]$. Suma din membrul stâng este egală cu diferența dintre $x[\infty]$ și $x[0]$. În final valoarea finală este egală cu limita.

Relatia dintre transformata z si transformata Laplace

$x_a(t) \leftrightarrow X_a(s)$ Prin esantionare se obtine

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\hat{x}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \mathcal{L}\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-snT_s}.$$

$$x_a(nT_s) = x_d[n] \Rightarrow Z\{x_d[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) z^{-n}$$

$$\mathcal{L}\{x_a(t) \delta_{T_s}(t)\} \Big|_{e^{sT_s}=z} = Z\{x_d[n]\}; \quad \mathcal{L}_u\{x_a(t) \delta_{T_s}(t)\} \Big|_{e^{sT_s}=z} = Z_u\{x_d[n]\}.$$

Tr.Laplace a semnalului analogic esantionat Tr.Z a semnalului digital corespunzator

$$\mathcal{L}\{x_a(t) \delta_{T_s}(t)\} \Big|_{e^{sT_s}=z} = Z\{x_d[n]\}; \quad x_d[n] = x_a(nT_s)$$

$$z = e^{sT_s}$$

23

Se consideră semnalul analogic x_a cu transformata Laplace X_a . Se eşantionează ideal semnalul $x_a(t)$, cu pasul de esantionare T_s , obţinându-se semnalul $x^\wedge$.

Transformata Laplace a semnalului eşantionat rezultă pe baza liniarităţii transformatei Laplace ca sumă ponderată de transformate Laplace ale unor distribuţii Dirac translatate în timp cu nT_s . Aceste transformate Laplace sunt egale cu $\exp(-snT_s)$.

În urma eşantionării ideale a semnalului x_a se obţine semnalul digital x_d ale cărui eşantioane sunt egale cu eşantioanele semnalului x_a prelevate la momente nT_s . Transformata z a semnalului x_d este o sumă ponderată de puteri ale lui z . Comparând transformata Laplace a semnalului eşantionat ideal cu transformata z a semnalului digital constatăm că ele sunt identice pentru $z = \exp(sT_s)$.

Studiul sistemelor discrete liniare și invariante în timp prin intermediul transformării z

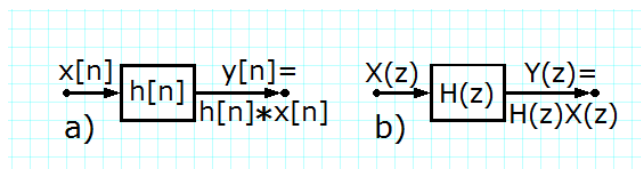
Forma simplă a teoremei convoluției semnalelor discrete face din transformata Z un instrument util pentru studiul sistemelor discrete LIT.

Dacă sistemul studiat este cauzal și are condiții inițiale **nenule**, este utilă transformarea Z unilaterală.

24

La fel cum se folosește transformata Laplace pentru studiul sistemelor analogice liniare și invariante în timp se folosește și transformata z pentru studiul sistemelor liniare și invariante în timp discret.

Funcția de sistem a unui sistem discret, liniar și invariant în timp



Funcția $H(z)$, numită "funcția (de) sistem" sau "funcția de transfer a sistemului" caracterizează complet comportarea sa în planul complex z , după cum răspunsul la impuls $h[n]$ caracterizează complet comportarea sistemelor în timp.

25

Semnalul de la ieșirea sistemului liniar și invariant în timp cu răspunsul la impuls $h[n]$ când la intrarea sistemului se aduce semnalul $x[n]$ se exprimă ca și convoluția semnalului de intrare cu răspunsul la impuls. În conformitate cu proprietatea 9 a transformatei z (teorema convoluției) $Y(z) = X(z)H(z)$. În consecință funcția de transfer a sistemului se obține ca raport al transformatelor z ale semnalelor de la ieșire și de la intrare.

Dacă sistemul discret este **stabil**, există și transformata Fourier în timp discret a lui $h[n]$ și prin urmare **cercul unitar este în domeniul de convergență** al funcției de sistem ce caracterizează un sistem stabil.

Dacă sistemul este **cauzal**: $H_u(z) = H(z)$, atunci domeniul de convergență al funcției este exteriorul unui disc.

Dacă sistemul este **stabil și cauzal**, **cercul unitar este în DC**. Toți **polii** funcției sistem a unui sistem stabil și cauzal au **modulul subunitar** ceea ce este echivalent cu faptul că sunt cuprinși în interiorul discului unitar:

$$|z_p| < 1$$

26

Dacă sistemul discret considerat este stabil atunci cercul unitate este în domeniul de convergență DC al $H(z)$.

Dacă sistemul discret considerat este cauzal atunci domeniul de convergență al funcției sale de transfer este exteriorul unui cerc.

Dacă sistemul discret considerat este cauzal și stabil atunci polii săi se află în interiorul cercului unitate. În consecință cercul unitate se află în domeniul de convergență al funcției de transfer a unui sistem cauzal și stabil.

Determinarea raspunsului unui sistem discret liniar si invariant în timp, utilizand transformarea Z

Daca $x[n]$ este dat si se specifica $h[n] \leftrightarrow H(z)$ atunci se aplica semnalului de intrare transformarea directa rezultand $X(z)$. Raspunsul in complex este $Y(z) = H(z)X(z)$.

Aplicand transformarea Z inversa, rezulta semnalul raspuns, $y[n]$. Daca se lucreaza cu sisteme si semnale cauzale în conditii initiale nenule, se va utiliza numai transformarea Z unilaterala.

27

Atunci când calculul convoluției se dovedește prea laborios se poate determina răspunsul unui sistem la un anumit semnal de intrare cu ajutorul transformatei z . Transformata z a semnalului de la ieșire se obține înmulțind transformata z a semnalului de intrare cu funcția de transfer a sistemului. Răspunsul sistemului se poate determina calculând transformata z inversă a lui $Y(z)$.

Calculul transformării z inverse

Sunt aplicabile trei metode:

1. **Calculul direct al integralei,**
2. **Transformarea funcției $Y(z)$ într-o sumă de fracții simple,**
3. **Metoda dezvoltării funcției $Y(z)$ în serie de puteri.**

28

Din fericire toate transformările z pe care va trebui să le inversăm sunt funcții raționale de z (așa după cum s-a văzut și în primele trei exemple pe care le-am considerat). De aceea le vom putea descompune în fracții simple și vom putea folosi tabelele de perechi semnal transformată z pentru a inversa fiecare fracție simplă.

2. Transformarea functiei $Y(z)$ intr-o suma de fractii simple

Metoda se aplica in cazurile in care $Y(z)$ este o functie rationala. Functia $Y(z)$ poate fi un raport de polinoame în z^{-1} sau z .

Recomandam sa se lucreze în z^{-1} , notand pentru comoditate $z^{-1} = x$, deoarece in majoritatea cazurilor tabelele sunt date în functie de puterile lui z^{-1} .

29

Se procedează la fel ca în cazul inversării transformatei Laplace doar că semiplanul drept al planului complex se înlocuiește cu exteriorul cercului unitate iar semiplanul stâng se înlocuiește cu interiorul cercului unitate.

$$Y(x) = Y(z^{-1}) = \frac{N(x)}{D(x)} = I(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

$$I(x) = \sum_k c_k x^k = \sum_k c_k z^{-k} \leftrightarrow \sum_k c_k \delta[n-k]$$

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_m \frac{a_m}{x - x_m} + \sum_k \sum_{i=1}^{s_k} \frac{b_{ki}}{(x - x_k)^i}.$$

$$a_m = \left[(x - x_m) \frac{R(x)}{D(x)} \right] \Big|_{x=x_m};$$

$$b_{ki} = \frac{1}{(s_k - i)!} \left\{ \frac{d^{s_k-i}}{dx^{s_k-i}} \left[(x - x_k)^{s_k} \frac{R(x)}{D(x)} \right] \right\} \Big|_{x=x_k}.$$

Se aplica transformarea inversa fiecarui termen din suma, dupa ce se revine mai intai la $z^{-1} = x$, utilizand tabelele de transformate si tabelele de proprietati ale transformarii.

30

Dacă gradul numărătorului $N(x)$ este mai mare decât gradul numitorului $D(x)$ atunci se efectuează prima dată împărțirea obținându-se câtul împărțirii $I(x)$ și restul $R(x)/D(x)$. Câtul este un polinom $I(x)$ care în urma inversării conduce la o sumă ponderată de impulsuri unitare întârziate. Restul se poate descompune în fracții simple.

Cu x_m au fost notați polii simpli iar cu x_k polii multipli cu ordinul de multiplicitate s_k . Coeficienții a_m se calculează cu formula din ecuația a patra iar coeficienții b_{ki} cu formula din ecuația a cincea.

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_m \frac{a_m}{x - x_m} + \sum_k \sum_{i=1}^{s_k} \frac{b_{ki}}{(x - x_k)^i}$$

$$a_m = \left[(x - x_m) \frac{R(x)}{D(x)} \right]_{x=x_m} \quad b_{ki} = \frac{1}{(s_k - i)!} \left\{ \frac{d^{s_k-i}}{dx^{s_k-i}} \left[(x - x_k)^{s_k} \frac{R(x)}{D(x)} \right] \right\} \bigg|_{x=x_k}$$

Example

$$1. Y(z) = \frac{z}{(z - 0.5)(z - 0.25)} = Y_u(z) \Rightarrow DC = \{z \mid |z| > 0.5\}$$

$$Y(z) = \frac{8z^{-1}}{(2 - z^{-1})(4 - z^{-1})} = \frac{8x}{(2 - x)(4 - x)} = \frac{8}{2 - x} - \frac{16}{4 - x};$$

$$Y(z) = \frac{8}{2 - z^{-1}} - \frac{16}{4 - z^{-1}} = \frac{4}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{4}{1 - 0.25z^{-1}}.$$

$$y[n] = 4[(0.5)^n - (0.25)^n] \sigma[n].$$

$$2. \text{ Aceeasi transformata } Y(z) \text{ dar } DC = \{z \mid |z| < 0.25\}$$

$$y[n] = -4[(0.5)^n - (0.25)^n] \sigma[-n - 1].$$

$$3. \text{ Aceeasi transformata } Y(z) \text{ dar } DC = \{z \mid 0.25 < |z| < 0.5\}$$

$$y[n] = -4(0.5)^n \sigma[-n - 1] - 4(0.25)^n \sigma[n].$$

32

Se prezintă un exemplu de inversare a transformatei z . Transformata z unilaterală se notează cu indicele u și se calculează făcând suma de la 0 la infinit și nu de la $-\infty$ la infinit. Transformata $Y(z)$ din prima ecuație are un zero în zero și doi poli : unul în 0,5 și celălalt în 0,25. Întrucât polii nu pot aparține regiunii de convergență putem avea trei regiuni de convergență : interiorul cercului de rază 0,25, coroana circulară dintre cercurile de rază 0,25 și 0,5 și exteriorul cercului de rază 0,5. Dacă simplificăm transformata $Y(z)$ cu z pătrat obținem expresia din cea de a doua ecuație care poate fi descompusă într-o sumă de două fracții simple. Amândouă sunt de forma transformatei z din primele două exemple. Dacă considerăm regiunea de convergență exteriorul cercului de rază 0,5 atunci fiecare fracție simplă se inversează într-un semnal causal și semnalul $y[n]$ va fi causal la rândul său. Dacă considerăm că regiunea de convergență a lui $Y(z)$ este coroana circulară atunci prima fracție simplă se va inversa într-un semnal anticauzal iar cea de a doua fracție simplă într-un semnal causal. Dacă considerăm regiunea de convergență este interiorul unui cerc atunci ambele fracții simple se vor inversa în semnale anticauzale.

3. Metoda dezvoltarii functiei $Y(z)$ in serie de puteri

Dezvoltarea functiei $Y(z)$ in serie de puteri in jurul
originii

Exemplul #a

$$Y(z) = e^{z-1}, \quad ROC : |z| > 0$$

$$e^{z-1} = 1 + \frac{1}{1!}z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \dots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^{-n}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{n!}$$

33

Se dau cateva exemple in care se dezvoltă functia $Y(z)$ într-o serie de puteri în jurul originii, rezulta astfel semnalul $y[n]$

Exemplul #b

$$Y(z) = e^z, \quad \text{ROC} : |z| \geq 0, |z| \neq \infty$$

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots + \frac{1}{m!}z^m + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}z^m$$

$$= \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!}z^{-n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!}z^{-n}$$

$$\Rightarrow y[n] = \delta[n] - \frac{1}{(-n)!}\sigma[-n-1] = \frac{1}{(-1)^n n!}\sigma[-n]$$

Exemplul #c

$$Y(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad \text{ROC} : |z| > |a| \Rightarrow \text{semnal cauzal}$$

$$Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} z^{-n} \longrightarrow y[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}; \quad n \geq 1$$

Teorema valorii initiale:

$$y[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} \ln(1 + az^{-1}) = 0$$

$$y[n] = \frac{(-1)^n}{n} a^n \sigma[n-1]$$

Exemplul #d

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a \Rightarrow y[n] = a^n \sigma[n]$$

$$\begin{array}{r|l}
 1 & 1 - az^{-1} \\
 \hline
 -1 + az^{-1} & 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots \\
 / & az^{-1} \\
 \hline
 -az^{-1} + a^2 z^{-2} & \\
 / & a^2 z^{-2} \\
 \hline
 -a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} & \\
 / & a^3 z^{-3} \\
 \hline
 \vdots &
 \end{array}$$

**Exemplul #e, aceeași transformata ca și la #d,
ROC diferită**

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|$$

$\Rightarrow$ semnal anticausal, transformata z conține doar puteri ale lui z

$$\Rightarrow Y(z) = - \sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^m = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \Rightarrow y[n] = -a^n \sigma[-n-1]$$

$$\begin{array}{r|l} z & -a + z \\ \hline -z + a^{-1}z^2 & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - a^{-4}z^4 \dots \\ / & a^{-1}z^2 \\ \hline -a^{-1}z^2 + a^{-2}z^3 & \\ / & a^{-2}z^3 \\ \hline -a^{-2}z^3 + a^{-3}z^4 & \\ / & a^{-3}z^4 \\ \hline & \ddots \end{array}$$

37

Sisteme discrete liniare si invariante in timp,
caracterizate prin ecuatii cu diferente finite
liniare si cu coeficienti constanti

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]; \quad a_0 \neq 0$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \text{ functia de transfer}$$

Funcția de transfer a unui sistem discret LIT: funcție ratională în z or z^{-1} .

Zerouri : radacinile numaratorului $N(z)$;

Poli : radacinile numitorului $D(z)$.

38

Sistemele liniare și invariante în timp discret sunt caracterizate de ecuații cu diferențe finite cu coeficienți constanți.

Funcția de transfer a sistemului $H(z)$ se obține cu relația dată; pentru descompunerea în fracții simple se lucrează cu puteri ale lui z^{-1}

S-a presupus că avem condiții initiale nule, prin urmare am utilizat transformarea Z bilaterală.

Pentru un sistem **cauzal si stabil**: **polii sunt in interiorul cercului unitar** $|z|=1$

$$|z_{pk}| < 1$$

Teorema valorii initiale:

$$h[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} H_u(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{N(z)}{D(z)} - \text{finita}$$

$\nearrow$ Gr. M
 $\searrow$ Gr. N

Gradul numaratorului functiei de transfer a unui sistem cauzal si stabil este mai mic sau egal cu gradul numitorului, $M \leq N$

Contributia polilor unui sistem discret cauzal in raspunsul la impuls al acestuia

Vom considera numai cazul polilor simpli si dubli, celelalte cazuri tratandu-se in mod identic.

1. Perechi de poli simpli complex conjugati; $z_p = r_p e^{j\Omega_p}$ si $z_p^* = r_p e^{-j\Omega_p}$

Termenii corespunzatori in descompunerea lui $H(z)$ in fractii simple sunt:

$$\dots + \frac{a}{1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a^*}{1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}} + \dots \text{ iar contributia lor in } h[n] \text{ este de forma}$$

$$A r_p^n \sin(\Omega_p n + \Phi_n).$$

Daca $r_p < 1$, raspunsul se amortizeaza, perechea de poli nu confera instabilitate sistemului.

Daca $r_p > 1$, raspunsul creste exponential, sistem-instabil.

Caz aparte: poli simpli situati pe cercul unitar. Contributia lor la $h[n]$ este de forma:

$$A \sin(\Omega_p n + \Phi_p), \text{ oscilatie de amplitudine fixa (chiar si dupa disparitia excitatiei).}$$

Stabilitate la limita-oscilator.

40

Răspunsul la impuls al unui sistem liniar și invariant în timp se calculează prin inversarea transformatei z dată de funcția de transfer a aceluia sistem. După cum am arătat deja inversarea unei transformate z se face prin descompunere în fracții simple. Vom considera în continuare că funcția de transfer are doar poli simpli sau dubli.

Dacă z_p este un pol simplu, număr complex de modul r_p și de argument Ω_p , atunci și conjugatul său complex va fi pol deoarece coeficienții polinomului de la numitorul funcției de transfer sunt numere reale. Frațiile simple corespunzătoare acestor poli sunt specificate în ecuație. Inversând fiecare dintre aceste fracții simple cu ajutorul tabelului de perechi semnal transformată z în ipoteza că sistemul este cauzal și adunând cele două inverse obținem contribuția unei perechi de poli simpli complex conjugăți la răspunsul la impuls de forma r_p^n la puterea n înmulțit cu un sinus. Acest semnal se amortizează (anvelopa sa descrește în timp) dacă r_p este subunitar. El este deci de clasă I1 și asigură stabilitatea sistemului (știm de semestrul trecut că dacă răspunsul la impuls al sistemului este de clasă I1 atunci sistemul este stabil). Condiția $r_p < 1$ plasează cei doi poli complex conjugăți în interiorul cercului unitate. Deci sistemul este stabil dacă funcția sa de transfer are doar poli simpli situați în interiorul cercului unitate.

2. Pereche de poli dubli complex conjugati,

$$z_p = r_p e^{j\Omega_p} \text{ si } z_p^* = r_p e^{-j\Omega_p}$$

Contributia lor la functia de transfer este de forma:

$$\dots + \frac{a_1}{1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a_1^*}{1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a_2}{\left(1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}\right)^2} + \frac{a_2^*}{\left(1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}\right)^2} + \dots$$

Contributia lor in raspunsul la impuls este de forma:

$$\left[A_1 r_p^n \sin(\Omega_p n + \Phi_p) + A_2 n r_p^n \sin(\Omega_p n + \Phi_p) \right] \sigma[n].$$

Daca $r_p < 1$, raspunsul este amortizat-sistem stabil.

Daca $r_p > 1$, raspunsul creste in timp-sistem instabil.

41

În cazul în care z_p este un pol dublu al funcției de transfer și conjugatul său complex va fi un pol dublu al funcției de transfer. Contribuția acestor poli dubli la funcția de transfer este dată în ecuație. Inversând fiecare fracție pe baza tabelului de perechi semnal transformată z și în ipoteza că sistemul este cauzal și adunând rezultatele se obține pe seama relației lui Euler suma a două sinusoide ca în cea de a doua ecuație. La fel ca și în cazul polilor simpli, dacă $r_p < 1$, contribuția polilor dubli la răspunsul la impuls al sistemului se amortizează în timp, contribuția este de clasă II, sistemul va fi stabil. Dacă ordinul de multiplicitate al polilor este mai mare decât 2, ei vor contribui la răspunsul la impuls al sistemului cu o sumă de mai multe sinusoide ale căror amplitudini vor fi proporționale cu n la diferite puteri înmulțit cu r_p la puterea n . Toate aceste componente se amortizează dacă $r_p < 1$.

Deci sistemul discret este stabil dacă este cauzal și dacă are polii în interiorul cercului unitate.

Calculul raspunsului unui SLIT discret caracterizat printr-o ecuatie cu diferente finite

Se considera SLIT cauzal, cu conditii initiale nenule (dar semnalul de la iesire este necauzal):

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad a_0 \neq 0$$

$$\sum_{k=0}^N a_k Z_u \{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^M b_k Z_u \{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left[Y_u(z) + \sum_{n=1}^k y[-n] z^n \right] = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \left[X_u(z) + \sum_{n=1}^k x[-n] z^n \right].$$

Daca semnalul de intrare este cauzal, $x[-n] = 0$ pentru $n > 0$:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left[Y_u(z) + \sum_{n=1}^k y[-n] z^n \right] = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} [X_u(z)].$$

Cunoscand $X_u(z)$ si conditiile initiale, se determina $Y_u(z)$ si apoi $y[n]$. ⁴²

După cum se știe, sistemele liniare și invariante în timp discret sunt caracterizate de ecuații cu diferențe finite cu coeficienți constanți. Până acum am considerat cazul în care ecuația cu diferențe finite are condiții inițiale nule. În acest caz am arătat semestrul trecut la studiul transformatei Fourier în timp discret că răspunsul în frecvență al sistemului digital considerat se poate scrie automat dacă se cunosc coeficienții ecuației cu diferențe finite. La fel, se poate demonstra folosind transformata z bilaterală că funcția de transfer a sistemului considerat poate fi scrisă automat dacă se cunosc coeficienții ecuației cu diferențe finite cu condiții inițiale nule. În continuare arătăm cum se poate determina răspunsul unui sistem liniar și invariant în timp discret descris printr-o ecuație cu diferențe finite la un semnal de intrare specificat. Să considerăm de această dată că ecuația cu diferențe finite are condiții inițiale nenule. Aplicăm în ambii membri ai ecuației cu diferențe finite din prima ecuație transformata z unilaterală. Pe baza liniarității acestei transformate se obține cea de a doua ecuație. Folosind proprietatea de translație în timp a transformatei z unilaterale (proprietatea 2) se obține ecuația a treia. Dacă semnalul de intrare este cauzal atunci valorile inițiale $x[-n]$ sunt nule și se obține forma din ultima ecuație. Cunoscând transformata z unilaterală a semnalului de intrare și valorile inițiale ale semnalului de ieșire $y[-n]$ se determină, folosind ultima ecuație, transformata z unilaterală a semnalului de ieșire. Inversând această transformată z se obține expresia semnalului de ieșire.

Exemplu

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \quad x[n] = ke^{j\Omega_0 n} \sigma[n], \quad y[-1] \neq 0,$$

$$Y_u(z) - az^{-1}(Y_u(z) + y[-1]z) = \frac{k}{1 - e^{j\Omega_0} z^{-1}}; \quad |z| > 1.$$

$$\begin{aligned} Y_u(z) &= \frac{k}{(1 - e^{j\Omega_0} z^{-1})(1 - az^{-1})} + \frac{ay[-1]}{1 - az^{-1}} = \\ &= \frac{-ke^{j\Omega_0}}{a - e^{j\Omega_0}} \frac{1}{1 - e^{j\Omega_0} z^{-1}} + \frac{ka}{a - e^{j\Omega_0}} \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{ay[-1]}{1 - az^{-1}}. \end{aligned}$$

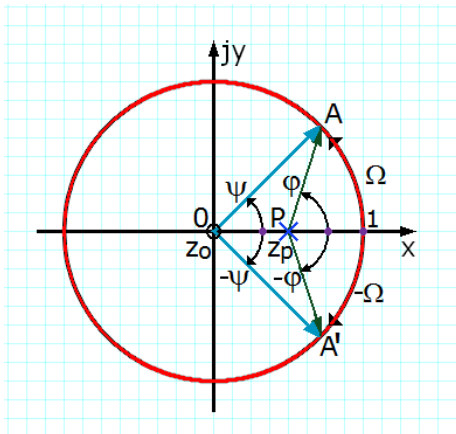
$$y[n] = \left(a^{n+1} y[-1] + \frac{ka^{n+1}}{a - e^{j\Omega_0}} + \frac{ke^{j\Omega_0(n+1)}}{a - e^{j\Omega_0}} \right) \sigma[n]; \quad |a| < 1, |z| > 1.$$

43

De exemplu, se consideră sistemul de ordinul întâi descris de ecuația cu diferențe finite din prima relație. Expresia semnalului de intrare este dată în cea de a doua ecuație. Se consideră condiția inițială nenulă din cea de a treia ecuație. Luând în ambii membri ai primei ecuații transformata z unilaterală și aplicând proprietățile transformatei z unilaterale și folosind tabelul de perechi semnal transformată z , se obține cea de a patra ecuație. Pe baza transformatei z a semnalului $x[n]$ (considerat cauzal) se lucrează într-un domeniu de convergență identic cu exteriorul cercului unitar. Separându transformata z unilaterală a semnalului y se obține expresia din cea de a patra ecuație. Descompunând primul termen din membrul drept al celei de a treia ecuații în fracții simple obținem cea de a patra ecuație. Inversând transformata z din fiecare dintre cei trei termeni ai membrului drept al celei de a patra ecuații obținem expresia răspunsului sistemului liniar și invariant în timp de ordinul întâi considerat în prima ecuație la semnalul considerat în cea de a doua ecuație.

Sisteme de ordinul I

$$y[n] - ay[n-1] = kx[n] \Rightarrow H(z) = \frac{k}{1 - az^{-1}} = \frac{kz}{z - a}; z \in \text{DC}.$$



$$h[n] = ka^n \sigma[n], H(\Omega) = \frac{\left| \frac{OA}{PA} \right|}{\left| \frac{OA}{PA} \right|} e^{j(\psi - \phi)} = \frac{1}{\left| \frac{PA}{OA} \right|} e^{j(\Omega - \phi)}.$$

Dacă $0 < a < 1$

maximul răspunsului în frecvență

$\Rightarrow$ pentru $\left| \frac{PA}{OA} \right|$ minim, $\Omega = 0$, filtru trece jos.

Dacă $-1 < a < 0$,

maximul rezulta pentru $\Omega = \pi$, filtru trece sus.

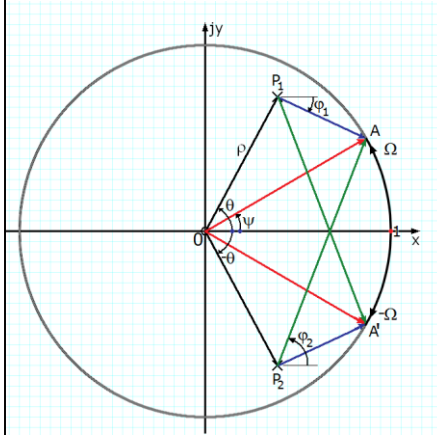
44

Un sistem de ordinul întâi este descris de ecuația cu diferențe finite din prima ecuație. Luând în ambii membri transformata z bilaterală și folosind proprietățile acesteia obținem funcția de transfer din ecuația a doua. Folosind tabelul de perechi semnal transformată z rezultă răspunsul la impuls din ecuația a treia. Pe baza expresiei funcției de transfer constatăm că avem un zero în zero și un pol în a . Constelația de poli și zerouri a sistemului de ordinul întâi este reprezentată în figură. Pe baza acesteia putem reprezenta hodograful sistemului de ordinul întâi. Considerăm punctul A , mobil pe cercul unitar și trasăm vectorii OA și PA . Răspunsul în frecvență al sistemului considerat se obține înlocuind în expresia funcției de transfer z cu $\exp(j\Omega)$. Răspunsul în frecvență este egal cu raportul vectorilor OA și PA . Maximul modulului răspunsului în frecvență rezultă atunci când vectorul PA are lungime minimă. Considerăm că a este pozitiv și subunitar (ca în figură). Lungimea vectorului PA devine minimă atunci când punctul A este pe semi-axa orizontală pozitivă (adică la frecvența $\Omega=0$). Este deci vorba despre un filtru trece-jos. Dacă considerăm că a este cuprins între -1 și 0 atunci vectorul PA devine maxim atunci când punctul P ajunge pe semi-axa orizontală negativă. În acest caz $\Omega=\pi$ și sistemul de ordinul I este un filtru trece-sus.

Sisteme de ordinul doi

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = kx[n] \Rightarrow H(z) = \frac{k}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{kz^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Avem un zero de ordinul 2 in origine si polii $z_{p1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$.



Daca $a_1^2 < 4a_2$ cei doi poli sunt complex conjugati $z_{p1,2} = \rho e^{\pm j\theta}$.

Daca $a_1^2 \geq 4a_2$ polii sunt reali.

Se considera sistemul cauzal si se cauta conditiile pe care trebuie sa le indeplineasca coeficientii a_1 si a_2 pentru a obtine stabilitatea.

$$\rho = \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2 - a_1^2}}{2} = \sqrt{a_2} < 1; a_1^2 < 4a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_2| < 1, a_2 > \frac{a_1^2}{4} \text{ sau daca polii sunt reali :}$$

$$-2 < -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2; a_1^2 - 4a_2 \geq 0.$$

Rezolvand sistemul de inegalitati rezulta :

$$a_1^2 - 4a_2 \geq 0; a_2 > -a_1 - 1; a_2 > a_1 - 1.$$

45

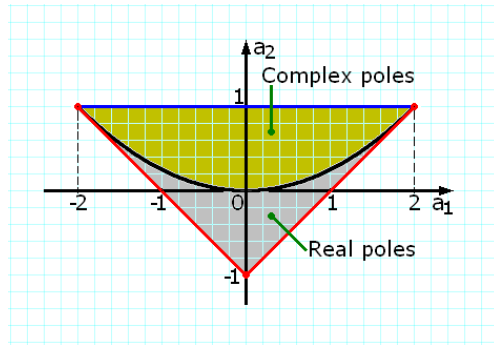
În prima relație este prezentată o ecuație cu diferențe finite de ordinul II. Coeficienții $a_{1,2}$ și k sunt reali. Luând în ambii membri transformata z bilaterală se poate determina funcția de transfer a sistemului din cea de a doua ecuație. Se constată că există un zero dublu în origine și doi poli, $z_{p1,2}$. Se specifică condițiile pe care trebuie să le satisfacă coeficienții ecuației cu diferențe finite pentru ca acești poli să fie complex conjugăți respectiv reali. În figură este prezentat cazul polilor complex conjugăți. Considerăm că sistemul este cauzal și determinăm condițiile pe care trebuie să le satisfacă coeficienții ecuației cu diferențe finite pentru ca sistemul să fie stabil.

În cazul polilor complex conjugăți avem prima condiție $a_1^2 < 4a_2$. Pentru ca sistemul cauzal să fie stabil e necesar ca polii să fie în interiorul cercului unitate. Această condiție este îndeplinită dacă modulul polilor, $\rho < 1$. Modulul polilor este egal cu radical din a_2 . Este deci necesar ca $|a_2| < 1$. Din prima condiție rezultă că $a_2 > a_1^2/4$. În consecință, în cazul polilor complex conjugăți, coeficienții ecuației cu diferențe finite trebuie să satisfacă dubla inegalitate : $a_1^2/4 < a_2 < 1$.

În cazul polilor reali prima condiție este $a_1^2 > 4a_2$ iar polii sunt dați de $-[a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}]/2$.

Pentru ca sistemul să fie stabil este necesar ca polii reali să fie cuprinși între -1 și 1. În cazul polilor reali se obține sistemul de inecuații din penultima relație. Prima inecuație dublă se rezolvă prin ridicarea la pătrat a celor trei expresii și prin efectuarea calculelor. Se obțin condițiile pentru coeficienți din ultima relație.

În continuare se reprezintă condițiile pe care trebuie să le satisfacă coeficienții ecuației cu diferențe finite pentru ca sistemul să fie stabil în planul coeficienților (a_1, a_2) .



Parabola corespunde existentei unui singur pol real dublu.

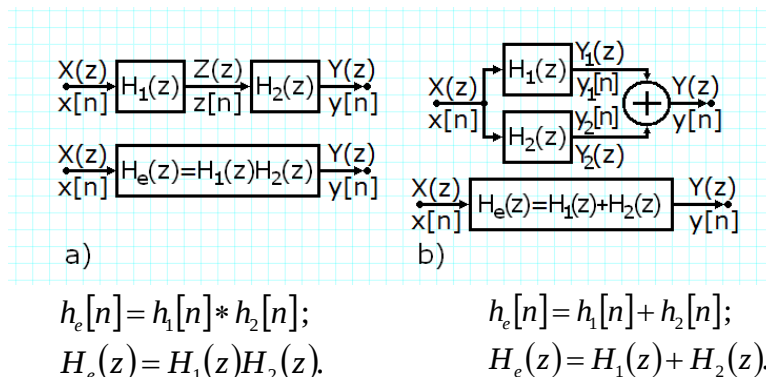
Răspunsul în frecvență al sistemului :
$$H(\Omega) = k \frac{1}{\|P_1 A P_2 A\|} e^{j(2\Omega - \varphi_1 - \varphi_2)}.$$

46

Parabola de ecuație $a_1^2 - 4a_2$ împarte planul în două regiuni. Punctele de deasupra parabolei corespund cazului în care polii sunt complex conjugați iar punctele de sub parabolă corespund cazului în care polii sunt reali. Punctele de pe parabolă corespund cazului în care avem un singur pol real dublu. În cazul polilor complex conjugați a_2 nu poate depăși valoarea 1. În consecință dreapta de ecuație $a_2 = 1$ limitează superior domeniul din plan în care pot fi aleși coeficienți ai ecuației cu diferențe finite pentru care sistemul descris să fie stabil. În cazul polilor reali domeniul care conferă stabilitate este limitat de dreptele de ecuație $a_2 = a_1 - 1$ și $a_2 = -a_1 - 1$. Prima dintre aceste drepte limitează în dreapta domeniul de interes iar cea de a doua îl limitează în stânga. În consecință domeniul de interes este interiorul triunghiului isoscel cu vârful în jos din figură.

Răspunsul în frecvență al sistemului are expresia din ultima ecuație în care $P_1 A$ și $P_2 A$ reprezintă vectorii care unesc cei doi poli cu punctul mobil A de pe cercul unitate.

Funcția de sistem echivalentă unor sisteme discrete conectate în serie și în paralel



47

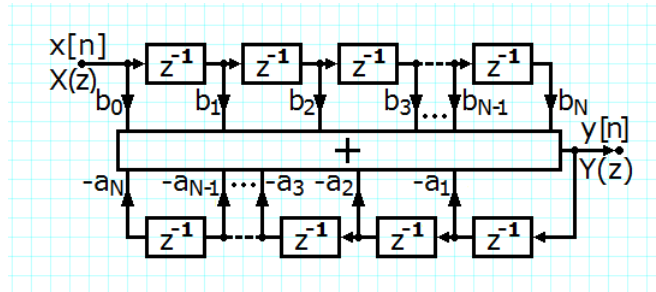
Prin conectarea în serie a două sisteme liniare și invariante în timp discret cu răspunsurile la impuls h_1 și h_2 se obține un sistem echivalent cu răspunsul la impuls $h_1 * h_2$. Întrucât convoluției în domeniul timp îi corespunde înmulțirea transformatei z , funcția de transfer a sistemului echivalent va fi H_1H_2 .

Prin conectarea în paralel a două sisteme liniare și invariante în timp discret cu răspunsurile la impuls h_1 și h_2 se obține un sistem echivalent cu răspunsul la impuls $h_1 + h_2$. Întrucât transformata z este liniară, funcția de transfer a sistemului obținut prin conectarea în paralel a două sisteme cu funcțiile de transfer H_1 și H_2 este $H_1 + H_2$.

Prin conectarea în serie și în paralel a unor sisteme de ordinul I și II se poate obține orice sistem liniar și invariant în timp discret. De aceea studiul sistemelor de ordinele I și II este foarte important.

Forme de implementare ale filtrelor numerice utilizand transformarea Z

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], a_0 = 1, M = N \Leftrightarrow y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

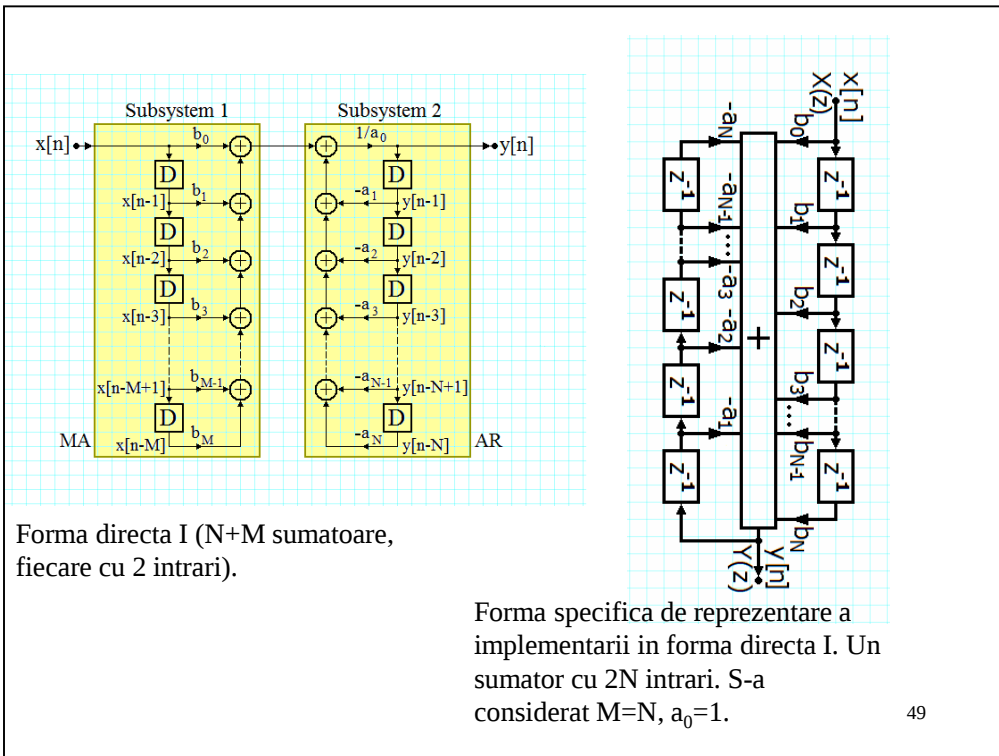


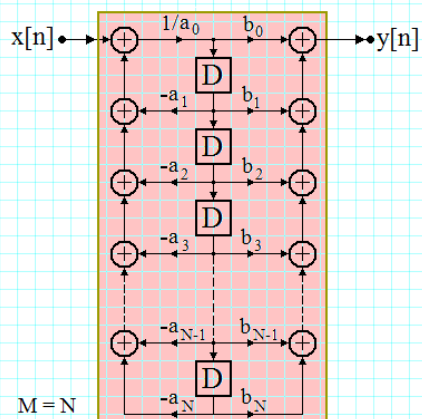
Forma specifica de reprezentare a implementarii in
forma directa I. S-a considerat $a_0 = 1$

48

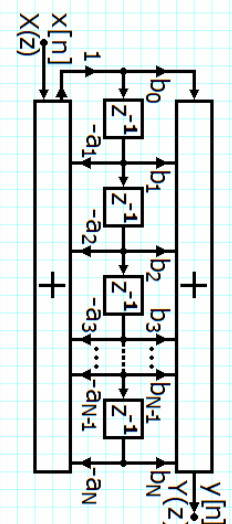
Forme de implementare utilizand transformarea Z

-forma directa I in care avem un sumator cu $2N$ intrari





Forma directa II ($2 \cdot N$ sumatoare, fiecare cu 2 intrari). S-a considerat $M=N$.



Forma specifica de reprezentare a implementarii in forma directa II. Doua sumatoare fiecare cu N intrari. S-a considerat $M=N$, $a_0=1$.

50

-forma directa II cu 2 sumatoare, avand fiecare N intrari (dreapta)