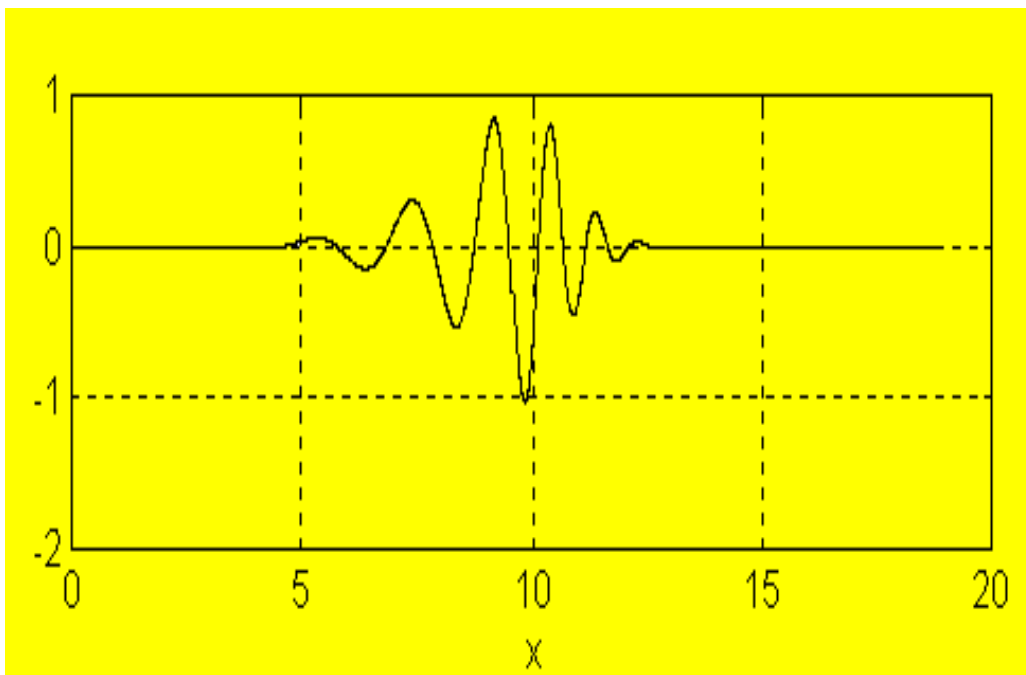


Théorie des ondelettes

Cours



Professeur Alexandru Isar

“Ce à quoi l’un s’était failli, l’autre y est arrivé et ce qui était inconnu à un siècle, le siècle suivant l’a éclairci, et les sciences et les arts ne se jettent pas en moule mais se forment et figurent en les maniant et polissant à plusieurs fois [...] Ce que ma force ne peut découvrir, je ne laisse pas de le sonder et essayer et, en retastant et pétrissant cette nouvelle matière, la remuant et l’eschaufant, j’ouvre à celui qui me suit quelque facilité et la lui rends plus souple et plus maniable. Autant en fera le second au tiers qui est cause que la difficulté ne me doit pas désespérer, ni aussi peu mon impuissance...”

Montaigne, Les Essais, Livre II, Chapitre XII.

Table de matières

1. Ondelettes. Principales applications	1
1.1. Les ondelettes et les moments nuls	1
1.2. Applications en analyse numérique	3
1.3. Codage en sous-bandes	6
2. L'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$	9
2.1. Fonction d'échelle	13
2.2. Exemples d'analyse multirésolution	17
2.2.1. Un point de vue algorithmique	27
3. Décomposition orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$	29
3.1. L'algorithme FWT (Fast Wavelet Transform)	38
3.2. La caractérisation des analyses multirésolution à l'aide des polynômes associés aux ondelettes	41
3.2.1. Exemples	48
3.2.2. La régularité des bases. Le problème du produit infini pour les filtres finis	52
4. La décomposition de l'espace $l^2(\mathbb{Z})$	55
5. La construction de la fonction d'échelle à l'aide du produit infini	60
6. Bases biorthogonales	65
7. Dérivation et intégration dans les analyses multirésolution	69
8. Paquets d'ondelettes	71
8.1. Les ondelettes de Malvar	71
8.2. Les paquets d'ondelettes	73
8.2.1. Le choix de la meilleure base	78
9. L'algorithme de Mallat pour les signaux d'image	82
10. Quelques applications	86
10.1 L'augmentation du rapport signal/bruit	86
10.2. La compression des données	92
Bibliographie	95

1. Ondelettes. Principales applications

Les ondelettes $\psi_{a,b}(t)$ sont des fonctions générées par la translation et la dilatation d'une fonction génératrice, appelée ondelette mère $\psi(t)$:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Les principales applications des ondelettes sont: l'analyse du signal (par exemple la localisation des discontinuités dans un signal), l'analyse fonctionnelle (par exemple l'approximation des espaces fonctionnelles ou l'analyse numérique) et le traitement du signal (par exemple le codage en sous-bandes). Dans la suite on présente brièvement l'apport de la théorie des ondelettes dans chaque application déjà mentionnée. Prenons pour le commencement le cas de la localisation des discontinuités d'un signal.

1.1. Les ondelettes et les moments nuls

Soit $f(x)$ une fonction régulière, $f \in C^2$. Cette fonction peut être développée en série de Taylor:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^r}{r!} f^{(r)}(0) + r(x)$$

Soit:

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)dx$$

Alors:

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^r}{r!} f^{(r)}(0) + r(x) \right) \psi(x) dx$$

Si $\psi(x)$ est régulière, alors:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0, \quad m = \overline{0, r}$$

On dit que la fonction $\psi(x)$ a r moments nuls.

Donc:

$$C_0 = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx + f'(0) \int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x) dx + \dots + f^{(r)}(0) \int_{-\infty}^{\infty} x^r \psi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\psi(x) dx$$

ou:

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\psi(x) dx$$

Mais:

$$|r(x)| \leq M$$

où M est une constante très petite. Donc:

$$C_0 \cong 0$$

On peut dire que si f est régulière alors C_0 est très petite. Considérons maintenant que $f(x)$ est la masse de Dirac:

$$f(x) = \delta(x)$$

Soit:

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$$

Alors:

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)dx = \delta(x) * \tilde{\psi}(x) \Big|_{x=0} = \tilde{\psi}(0) = \psi(0)$$

Si on utilise la fonction $\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ alors:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \delta(x) * \tilde{\psi}_a(x) \Big|_{x=b} = \tilde{\psi}_a(b)$$

où on a utilisé la notation:

$$\psi_a(x) = \psi\left(\frac{x}{a}\right)$$

En utilisant donc la fonction $\psi_a(x-b)$ au lieu de la fonction $\psi(x)$, on obtienne pour C_0 la valeur $\tilde{\psi}_a(b)$ qui peut être grande. Ainsi on peut avoir une indication sur la irrégularité d'un signal (la distribution de Dirac n'est pas une distribution régulière) en utilisant la valeur de la constante C_0 . On peut donc avoir une indication sur la régularité d'une fonction en utilisant les ondelettes.

La régularité de la fonction $\psi(x)$ peut être exprimée aussi dans le domaine fréquence. La transformée de Fourier de l'ondelette mère est:

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)e^{-i\xi x} dx \Rightarrow \hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$$

En dérivant la transformée de Fourier on peut écrire les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x)dx &= i\hat{\psi}'(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi(x)dx &= -\hat{\psi}''(0) \\ &\vdots \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k\psi(x)dx &= (i)^k \hat{\psi}^{(k)}(0) \end{aligned}$$

On a montré ainsi que si la fonction $\psi(x)$ a r moments nuls alors:

$$\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq r$$

On dit que la transformée de Fourier d'une fonction qui a r moments nuls est de classe C^∞ . Donc l'ondelette mère est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande.

Dans la suite on présente l'utilisation des ondelettes dans l'analyse numérique.

1.2. Applications en analyse numérique

Cette application de la théorie des ondelettes a été introduite par Strang et Fix en 1969. On veut développer les fonctions en utilisant les éléments de la famille:

$$G = \left\{ h^{-\frac{1}{2}} g\left(\frac{x}{h} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

On cherche une fonction g simple pour les calculs numériques. Considérons que l'ensemble G engendre un espace vectoriel V_h et que la fonction g est à support compact. Nous nous posons la question si le développement à l'aide des éléments de l'ensemble G (qui peut être considérée comme une base de l'espace vectoriel V_h) est stable numériquement.

Soit:

$$g_{h,k}(x) = h^{-\frac{1}{2}} g\left(\frac{x}{h} - k\right)$$

Si le développement dans la base G est stable numériquement alors on peut trouver pour chaque fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ une suite $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que:

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g_{h,k}(x) - f(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon \quad (1.1)$$

quelque soit ε quand h est suffisamment petit. On peut démontrer que si la famille G est une base de Riesz alors la relation (1) est vérifiée.

Definition 1. La famille $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de Riesz si et seulement s'il existe deux constantes A et B , positives tel que:

$$A \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \right) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right|^2 dx \leq B \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \right) \quad (1.2)$$

Cette condition de bi-continuité peut être écrite aussi dans la forme:

$$0 < A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq B \quad (1.3)$$

Remarque

Soit:

$$a(\xi) = |\hat{g}(\xi)|^2$$

La fonction $a(x)$ représente l'autocorrelation de la fonction $g(x)$ (c'est la relation de Wiener-Hincin). La somme $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(\xi + 2k\pi)$ représente le spectre du signal obtenu par

l'échantillonnage idéal du signal $a(x)$ en utilisant une période d'échantillonnage unitaire.

Donc $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ représente le spectre de l'autocorrelation de la fonction génératrice de la base considérée, échantillonnée en utilisant une période d'échantillonnage égale à 1. On démontre maintenant l'équivalence: (1.2) \Leftrightarrow (1.3).

Démonstration

Montrons pour le commencement que (1.3) \Rightarrow (1.2)

En multipliant tous les membres de la relation :

$$0 < A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq B$$

par $|A(\xi)|^2$ où $A(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ik\xi}$ on obtient:

$$0 < A|A(\xi)|^2 \leq |A(\xi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq B|A(\xi)|^2$$

ou:

$$0 < A \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi \leq B \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 d\xi \quad (1.4)$$

Mais:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi + 2k\pi)|^2 |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi$$

parce que la fonction $A(\xi)$ est périodique de période 2π , étant une transformation de Fourier à temps discrète (voir sa définition). Donc la dernière relation peut être écrite dans la forme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(\xi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |A(u)|^2 |\hat{g}(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |A(u)\hat{g}(u)|^2 du$$

Mais:

$$A(\xi)\hat{g}(\xi) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ik\xi} \right) \hat{g}(\xi) \leftrightarrow \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right)$$

Donc:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right|^2 d\xi$$

Maintenant la relation (1.4) peut s'écrire:

$$0 < A \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right|^2 d\xi \leq B \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 d\xi \quad (1.5)$$

En utilisant la relation de Parseval pour les signaux d'énergie finie on obtient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right|^2 dx \quad (1.6)$$

La relation de Parseval pour les signaux à énergie finie à temps discrète s'écrit:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 d\xi, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad (\forall) k \in \mathbb{Z} \quad (1.7)$$

En utilisant (1.6) et (1.7), (1.5) peut s'écrire:

$$0 < A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k)^2 2\pi \leq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right|^2 dx \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k)^2 2\pi$$

ce qui représente la relation (1.2). Donc (1.3) \Rightarrow (1.2) On prouve dans la suite que (1.2) \Rightarrow (1.3) aussi.

En partant de la relation (1.2) on peut obtenir la relation:

$$A \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\xi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi \leq B \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \right) \quad (1.8)$$

d'où en utilisant le noyau de Fischer on peut obtenir (1.3).

On revient maintenant a la relation (1.1).

Théorème 1.

Il existe une suite $\{a_k^h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^h g_{h,k}(x) - f \right\|_{L^2} = 0 \quad (1.9)$$

à la condition:

$$0 < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}_h(\xi + 2k\pi)|^2$$

où $g_{h,k}(x) = g_h(x-k)$ et l'ensemble $\{g_{h,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de Riesz.

Remarque

Ce théorème assure la stabilité numérique. Soit $\mu_h(x) = h^{-\frac{1}{2}} \mu\left(\frac{x}{h}\right)$ et

$\mu_{h,k}(x) = h^{-\frac{1}{2}} \mu\left(\frac{x}{h} - k\right)$ et $a_k^h = \langle f(x), \mu_{h,k}(x) \rangle$. En ce qui concerne la vitesse de convergence

en (9) on peut affirmer que la suivante équivalence est valable:

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \mu_{h,k}(x) \rangle g_{h,k}(x) - f(x) \right\|_{L^2} = O(h^2) \Leftrightarrow \{1, x, \dots, x^r\} \subset V_h$$

L'interprétation fréquentielle de cette équivalence est la suivante:

$$\hat{g}(0) \neq 0, \hat{g}(2k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ et } \hat{g}^{(p)}(2k\pi) = 0, \forall p = \overline{1, r}$$

Donc la fonction g représente la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas.

1.3. Codage en sous-bandes

Prenons deux filtres numériques avec les réponses impulsionnelles $\{h_{1k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (passe-bas) et $\{h_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (passe-haut) et les réponses en fréquence $\hat{h}_1(\omega)$ et $\hat{h}_2(\omega)$. Soit:

$$\hat{h}_1(0) = 1 \text{ et } \hat{h}_1(\pi) = 0$$

et:

$$\hat{h}_2(0) = 0 \text{ et } \hat{h}_2(\pi) = 1$$

Un exemple est présenté dans la figure 1.3.1.

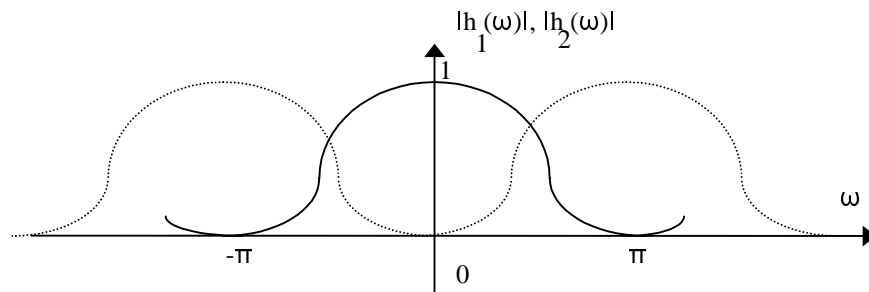


Figure 1.3.1. Un exemple de paire de filtre pour le codage en sous-bandes.

Considérons le système présenté dans la figure 1.3.2.

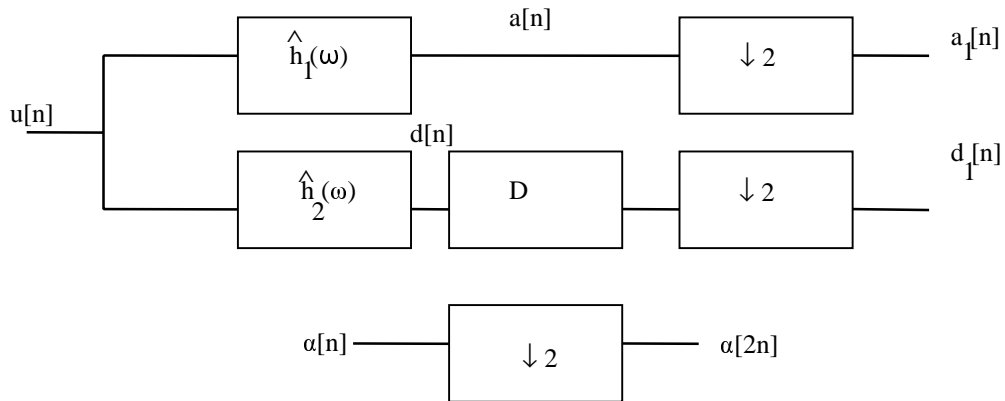


Figure 1.3.2. Système de codage en sous-bandes.

On peut écrire:

$$a_1[n] = a[2n] \quad \text{et} \quad d_1[n] = d[2n-1]$$

Le fonctionnement du systeme présenté dans la figure 1.3.2. peut être compris par l'exemple présenté dans la figure 1.3.3.

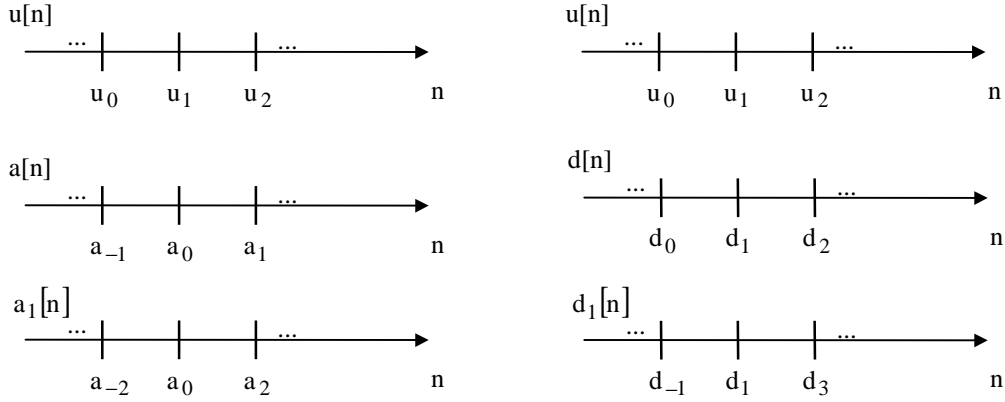


Figure 1.3.3. Un exemple de fonctionnement du systeme présenté dans la figure 1.3.2.

Pour la branche superieure on peut écrire:

$$a[n] = u[n] * h_1[n] \Rightarrow \hat{a}(\omega) = \hat{u}(\omega) \hat{h}(\omega)$$

et:

$$\hat{a}_1(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a[2p] e^{-i\omega p}$$

ou:

$$\hat{a}_1(\omega) = \frac{1}{2} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} a[p] e^{-i\frac{\omega}{2} p} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p a[p] e^{-i\frac{\omega}{2} p} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{a}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right) \quad (1.10)$$

Donc:

$$\hat{a}_1(\omega) = \frac{1}{2} \left(\hat{u}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{h}_1\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{u}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{h}_1\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right)$$

Pour la branche inferieure:

$$\begin{aligned} \hat{d}_1(\omega) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} d_1[2p] e^{-i\omega p} = \frac{1}{2} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} d[p] e^{-i\frac{\omega}{2} p} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p d[p] e^{-i\frac{\omega}{2} p} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{d}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \hat{d}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{u}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{h}_1\left(\frac{\omega}{2}\right) - \hat{u}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{h}_1\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right) \end{aligned}$$

On peut faire la reconstruction de la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ à partir des suites $\{a_1[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{d_1[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Considérons à ce but le systeme présenté dans la figure 1.3.4.

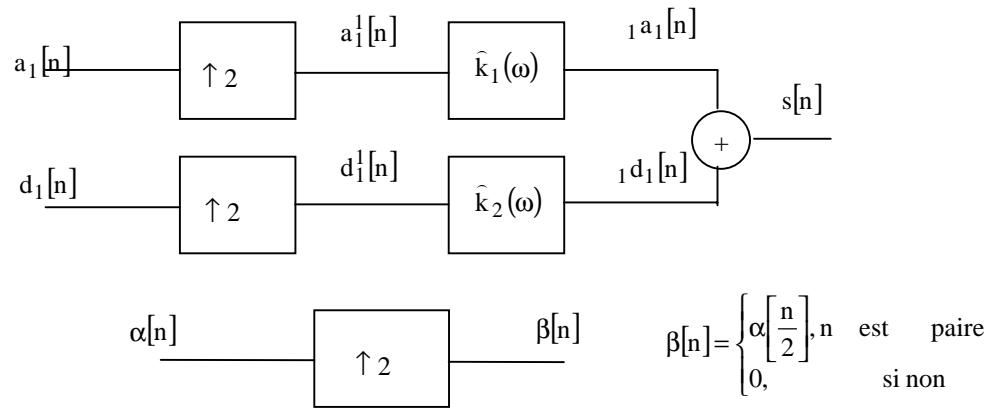


Figure 1.3.4. Un système de de-codage.

On peut écrire:

$$\hat{s}(\omega) = \hat{u}(\omega) \left[\left(\frac{1}{2} \right) \hat{k}_1(\omega) \hat{h}_1(\omega) + \left(\frac{1}{2} \right) \hat{k}_2(\omega) \hat{h}_2(\omega) \right] + \hat{u}(\omega + \pi) \left[\left(\frac{1}{2} \right) \hat{k}_1(\omega) \hat{h}_1(\omega + \pi) - \left(\frac{1}{2} \right) \hat{k}_2(\omega) \hat{h}_2(\omega + \pi) \right]$$

Pour la reconstruction parfaite est nécessaire que:

$$\hat{s}(\omega) = \hat{u}(\omega)$$

Cette condition est vérifiée si:

$$\begin{cases} \hat{k}_1(\omega) \hat{h}_1(\omega) + \hat{k}_2(\omega) \hat{h}_2(\omega) = 2 \\ \hat{k}_1(\omega) \hat{h}_1(\omega + \pi) - \hat{k}_2(\omega) \hat{h}_2(\omega + \pi) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de 2 équations et 2 inconnues les fonctions $\hat{k}_1(\omega)$ et $\hat{k}_2(\omega)$. Les solutions sont:

$$\hat{k}_1(\omega) = \frac{2\hat{h}_2(\omega + \pi)}{\hat{h}_1(\omega)\hat{h}_2(\omega + \pi) + \hat{h}_1(\omega + \pi)\hat{h}_2(\omega)}$$

et:

$$\hat{k}_2(\omega) = \frac{-2\hat{h}_1(\omega + \pi)}{\hat{h}_1(\omega)\hat{h}_2(\omega + \pi) + \hat{h}_1(\omega + \pi)\hat{h}_2(\omega)}$$

Un choix possible pour les solutions du système est:

$$\hat{k}_1(\omega) = \hat{h}_2(\omega + \pi)$$

$$\hat{k}_2(\omega) = -\hat{h}_1(\omega + \pi)$$

à la condition que:

$$\hat{h}_1(\omega)\hat{h}_2(\omega + \pi) + \hat{h}_1(\omega + \pi)\hat{h}_2(\omega) = 2$$

Si $\hat{h}_1(\omega)$ et $\hat{h}_2(\omega)$ sont des réponses en fréquence des filtres avec des réponses impulsionnelles finies alors toutes les quatre réponses en fréquence sont des polynômes.

2. L'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

Soit V_j l'espace vectoriel emboîté par l'ensemble $\{g_{j,k}(x)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$:

$$V_j = \left[\text{e.v. engendré par } \{g_{j,k}(x)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \right] \cap L^2(\mathbb{R})$$

avec:

$$g_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} g(2^j x - k)$$

Remarque

$$\langle g_{j,k}, g_{j,0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} g(2^j x - k) 2^{\frac{j}{2}} g(2^j x) dx = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} g(2^j x - k) g(2^j x) dx$$

En faisant la substitution:

$$2^j x = y$$

on obtient:

$$\langle g_{j,k}, g_{j,0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(y-k) g(y) dy = R_{gg}(-k) = \gamma_k$$

Il s'agit donc de l'autocorrelation de la fonction génératrice de la base considérée. Donc le produit scalaire ne dépend pas de j .

Soit $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une base de Riesz dans l'espace V_0 . Alors il y a deux constantes positives A et B tel que:

$$0 < A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 < B$$

Donc:

$$\begin{aligned} \forall f(x) \in V_j; f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g_{j,k}(x) \text{ et } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2^{\frac{j}{2}} g(2^j x - k) \right) e^{-i\xi x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} g\left(2^j \left(x - \frac{k}{2^j}\right)\right) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable:

$$X = x - \frac{k}{2^j}$$

on obtient:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} g(2^j X) e^{-i\xi \left(X + \frac{k}{2^j}\right)} dX = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-i\xi \frac{k}{2^j}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} g(2^j X) e^{-i\xi X} dX$$

On note le premier facteur du membre droit de la dernière relation avec $m_f(\xi)$ et on constate que l'autre facteur représente la transformée de Fourier de la fonction $g_j(x)$, $\hat{g}_j(\xi)$. On a la proposition suivante:

Proposition 2.1. Pour chaque fonction f de V_j on a:

$$\hat{f}(\xi) = m_f(\xi) \hat{g}_j(\xi) \quad (2.1)$$

où $m_f(\xi)$ est une fonction $2\pi \cdot 2^j$ périodique.

Cette proposition a été déjà démontrée. On prouve maintenant la proposition suivante:

Proposition 2.2 $\forall j \in \mathbb{Z} \quad V_j \subset V_{j+1}$

Démonstration

$$\forall x, g_{j,k}(x) \in V_j, g_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} g(2^j x - k) \Rightarrow g_{j,k}(2x) \in V_j$$

et:

$$g_{j,k}(2x) = 2^{\frac{j}{2}} g(2^{j+1} x - k) = \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} g(2^{j+1} x - k) = \frac{1}{\sqrt{2}} g_{j+1,k}(x) \in V_{j+1}$$

Mais chaque signal de V_j peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des fonctions $g_{j,k}(x)$:

$$f(x) \in V_j \Rightarrow f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g_{j,k}(x)$$

Donc:

$$f(2x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g_{j,k}(2x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{2}} g_{j+1,k}(x)$$

qui représente une combinaison linéaire des fonctions $\{g_{j+1,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, donc est un élément de V_{j+1} . On a démontré ainsi que:

$$\forall f(x) \in V_j \Rightarrow f(2x) \in V_j \text{ et } f(2x) \in V_{j+1} \Rightarrow V_j \subset V_{j+1}$$

Remarque

On a démontré en même temps que:

$$\forall f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$$

Définition 1. On dit que la suite des sous-espaces emboîtés de $L^2(\mathbb{R})$, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ si on a les conditions:

1. $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$
2. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
3. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
4. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
5. Il existe une fonction g en V_0 , tel que la famille $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz.

Remarques

A) La condition équivalente pour que $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz est:

$$0 < A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 < 1 \text{ (voir le chapitre antérieur).}$$

On note:

$$|m(\omega)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 \quad (2.2)$$

Donc on peut écrire la condition pour que $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz comme:

$$0 < A < |m(\omega)|^2 < B$$

B) On peut démontrer la relation:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2l\pi)|^2 \quad (2.3)$$

Démonstration

Soit:

$$\gamma_k = R_{gg}[k]$$

l'autocorrelation de la fonction g calculée aux moments discrets.

$$R_{gg}(x) \leftrightarrow |\hat{g}(\xi)|^2$$

En utilisant la formule sommatoire de Poisson on obtient (2.3).

C) Si la fonction g subit les conditions de Strang et Fix alors on doit avoir:

$$\hat{g}(0) \neq 0 \text{ et } \hat{g}(2k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

D) On peut démontrer que la condition de décroissance rapide de la fonction g peut être exprimée dans la forme:

$$|\gamma_k| < \frac{1}{|1+k|^m}, \forall m \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

La fonction: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\omega}$ est de classe C^∞ .

Démonstration

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\omega} & \stackrel{B)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2l\pi)|^2 = C(\omega) \\ \frac{dC(\omega)}{d\omega} & = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \gamma_k e^{-ik\omega} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou, en utilisant la relation (2.4):

$$|k\gamma_k| < \frac{|k|}{|1+k|^m} < \frac{|1+k|}{|1+k|^m} = \frac{1}{|1+k|^{m-1}}$$

donc la série en (5) est convergente.

$$\frac{d^2 C(\omega)}{d^2 \omega} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \gamma_k e^{-ik\omega} \quad (2.6)$$

En utilisant de nouveau la relation (2.4) on peut écrire:

$$|k^2 \gamma_k| < \frac{|k^2|}{|1+k|^m} < \frac{|1+k|^2}{|1+k|^m} = \frac{1}{|1+k|^{m-2}}$$

Donc la série en (2.6) est convergente elle aussi. Par récurrence on peut affirmer que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\omega} \in C^\infty \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 \in C^\infty$$

Proposition 2.3. Il existe une fonction $m_0(\omega) \in C^\infty$ telle que:

$$\hat{g}(2\omega) = m_0(\omega) \hat{g}(\omega)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V_{-1} \subset V_0: g\left(\frac{x}{2}\right) \in V_0 &\Rightarrow \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k g(x-k) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) g\left(\frac{x}{2}\right) e^{-i\xi x} dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \int_{-\infty}^{\infty} g(x-k) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

Mais en faisant le changement de variable:

$$\frac{x}{2} = X$$

on peut écrire:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) g\left(\frac{x}{2}\right) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) e^{-i\xi 2X} dX = \hat{g}(2\xi)$$

et à l'aide du changement de variable:

$$X = x - k$$

on obtient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-k) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) e^{-i\xi(X+k)} dX = e^{-i\xi k} \int_{-\infty}^{\infty} g(X) e^{-i\xi X} dX = e^{-i\xi k} \hat{g}(\xi)$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \int_{-\infty}^{\infty} g(x-k) e^{-i\xi x} dx = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\xi k} \right) \hat{g}(\xi)$$

ou:

$$\hat{g}(2\xi) = m_0(\xi) \hat{g}(\xi)$$

2.1. Fonction d'échelle

On appelle la fonction g , de la définition 1, fonction d'échelle. Soit l'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ avec:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{m(\omega)} \quad (2.1.1)$$

où $m(\omega)$ est donné par la relation (2.2). Supposons que $m(\omega)$ représente la réponse en fréquence d'un filtre RIF, alors $m(\omega)$ n'a pas des zéros ($m(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$). Soit:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k g(x-k)$$

la décomposition de la fonction $\varphi(x)$ dans la base $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de l'espace V_0 . Alors:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-ik\omega} \hat{g}(\omega) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{m(\omega)}$$

Donc les coefficients de la décomposition de la fonction $\varphi(x)$ dans la base $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont les échantillons de la séquence φ_k qui représente la réponse impulsionnelle du filtre inverse du filtre avec la réponse en fréquence $m(\omega)$.

Proposition 2.1.1. La condition d'orthonormalité de l'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2l\pi)|^2 = 1 \quad (2.1.2)$$

Démonstration

Supposons que l'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormal.

$$\langle \varphi(x-k), \varphi(x-l) \rangle = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) \overline{\varphi(x-l)} dx = \begin{cases} 1, & k-l=0 \\ 0, & k-l \neq 0 \end{cases}$$

Mais l'autocorrelation de la fonction φ est:

$$R_{\varphi\varphi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(x+u)} dx$$

ou à l'aide du changement de variable:

$$x = y - k$$

on obtient:

$$R_{\varphi\varphi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-k) \overline{\varphi(y-k+u)} dy$$

Donc:

$$R_{\varphi\varphi}(k-l) = \langle \varphi(x-k), \varphi(x-l) \rangle = \begin{cases} 1, & k-l=0 \\ 0, & k-l \neq 0 \end{cases}$$

On a démontré ainsi que:

$$R_{\varphi\varphi_n} = \delta_n$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\varphi\varphi_k} e^{-ik\omega} = 1$$

Mais, en utilisant la formule sommatoire de Poisson on a:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\varphi\varphi_k} e^{-ik\omega} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2l\pi)|^2$$

Donc:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2l\pi)|^2 = 1 \quad (\text{c.q.f.d})$$

Proposition 2.1.2. L'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ défini plus haut est une base orthonormée de V_0 .

Démonstration

On vérifie que l'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2}{|m(\omega + 2k\pi)|^2}$$

Mais la fonction $|m(\omega)|^2$ est périodique de période 2π donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2}{|m(\omega)|^2} = \frac{1}{|m(\omega)|^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

Donc l'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormé.

On démontre maintenant que chaque fonction de V_0 peut être développée comme une combinaison linéaire des éléments de l'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Soit $f(x)$ une fonction de V_0 .

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g(x-k) \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-i\xi k} \hat{g}(\xi) = m_f(\xi) \hat{g}(\xi)$$

où on a noté:

$$m_f(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-ik\xi}$$

Donc:

$$\hat{f}(\xi) = m_f(\xi) m(\xi) \frac{\hat{g}(\xi)}{m(\xi)} = \hat{m}_\varphi(\xi) \frac{\hat{g}(\xi)}{m(\xi)} = \hat{m}_\varphi(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$$

où on a noté:

$$\hat{m}_\varphi(\xi) = \hat{m}_f(\xi) m(\xi)$$

On peut observer que $m_f(\xi)$ et $m(\xi)$ représentent des transformées de Fourier des signaux à temps continu échantillonnés. La relation équivalente (en temps) à la dernière relation est:

$$f(x) = m_\varphi(x) * \varphi(x), \quad m_\varphi(x) \Leftrightarrow \hat{m}_\varphi(\xi)$$

où:

$$m_\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_{\varphi_k} \delta(x-k); \quad m_{\varphi_k} = m_\varphi(k)$$

Donc:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_{\varphi_k} \delta(x-k) * \varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_{\varphi_k} \varphi(x-k)$$

On a démontré ainsi que chaque fonction $f(x)$ en V_0 peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de l'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Donc cet ensemble est une base orthonormée de V_0 . On a démontré que pour chaque base de Riesz de V_0 $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ on peut trouver une base orthonormée correspondante $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en utilisant la relation:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{m(\omega)}$$

avec:

$$|m(\omega)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2l\pi)|^2$$

On cherche maintenant la base duale de la base $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en V_0 .

Soit:

$$\hat{\Omega}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{|m(\omega)|^2} \quad (2.1.3)$$

Proposition 2.1.3. L'ensemble $\{\Omega(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est la base duale de la base $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en V_0 .

Démonstration

$$\langle g(x-k), \Omega(x-l) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-k) \overline{\Omega(x-l)} dx$$

L'intercorrélation des fonctions g et Ω est :

$$R_{g\Omega}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{\Omega(x+u)} dx$$

A l'aide du changement de variable:

$$x = y - k$$

on obtient:

$$R_{g\Omega}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y-k) \overline{\Omega(y-k+u)} dy$$

Pour $u = k-1$ on obtient:

$$R_{g\Omega}(k-1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y-k) \overline{\Omega(y-1)} dy = \langle g(x-k), \Omega(x-1) \rangle$$

Mais:

$$\begin{aligned} \langle g(x-k), \Omega(x-1) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{g}(\xi) e^{-ik\xi}, \hat{\Omega}(\xi) e^{-i\xi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{\Omega}(\xi)} e^{-i(k-1)\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{g}(\xi)|^2}{|m(\xi)|^2} e^{-i(k-1)\xi} d\xi \end{aligned}$$

ou:

$$\langle g(x-k), \Omega(x-1) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{(2p-1)\pi}^{(2p+1)\pi} \frac{|\bar{g}(\xi)|^2}{|m(\xi)|^2} e^{-i(k-1)\xi} d\xi$$

Après le changement de variable $\xi - 2p\pi = u$ on obtient:

$$\begin{aligned} \langle g(x-k), \Omega(x-1) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\bar{g}(u+2p\pi)|^2}{|m(u+2p\pi)|^2} e^{-i(k-1)(u+2p\pi)} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|m(u)|^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\bar{g}(u+2p\pi)|^2 e^{-i(k-1)u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-1)u} du = \\ &= \begin{cases} 1, & k-1=0 \\ 0, & k-1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc:

$$\langle g(x-k), \Omega(x-1) \rangle = \delta_{k-1} \quad (\text{c.q.f.d}) \quad (2.1.4)$$

Soit f une fonction en $L^2(\mathbb{R})$ et $P_0(f)$ sa projection orthogonale sur V_0 . On peut écrire:

$$\langle P_0(f) - f, g(x-k) \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ou:

$$\langle P_0(f)(x), g(x-k) \rangle = \langle f(x), g(x-k) \rangle$$

Donc le développement de la fonction $P_0(f)$ dans la base de Riesz $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est:

$$P_0(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle P_0(f)(x), g_{0,k}(x) \rangle g_{0,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), g_{0,k}(x) \rangle g_{0,k}(x) \quad (2.1.5)$$

où on a utilisé la notation:

$$g_{0,k}(x) = g(x-k)$$

Mais l'ensemble $\{\Omega(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est aussi une base de l'espace V_0 . On peut donc écrire aussi:

$$P_0(f)(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \Omega(x-1) \rangle \Omega(x-1)$$

Soit:

$$\Omega_{0,1}(x) = \Omega(x-1)$$

Donc:

$$\begin{aligned} P_0(f)(x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \Omega_{0,1}(x) \rangle \Omega_{0,1}(x) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), g_{0,k}(x) \rangle g_{0,k}(x), \Omega_{0,1}(x) \right\rangle \Omega_{0,1}(x) \end{aligned}$$

ou:

$$P_0(f)(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), g_{0,k}(x) \rangle \langle g_{0,k}(x), \Omega_{0,1}(x) \rangle \Omega_{0,1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), g_{0,k}(x) \rangle \Omega_{0,k}(x)$$

On peut démontrer aussi la relation suivante:

$$P_0(f)(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \Omega_{0,1}(x) \rangle g_{0,1}(x)$$

2.2. Exemples d'analyses multirésolution

Exemple 1. Fonction d'échelle de la base de Haar

$$V_j = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \mid f(x) \text{ constante sur } [2^j k, 2^j(k+1)] \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

On peut vérifier facilement les conditions 1 et 2 de la définition de l'analyse multirésolution.

Soit:

$$g(x) = 1_{[0,1]}(x)$$

la fonction caractéristique pour l'intervalle $[0,1]$.

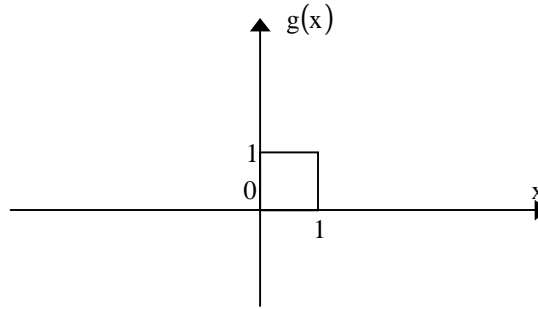


Figure 2.2.1. La fonction d'échelle pour la base de Haar.

$$R_{gg_0} = R_{gg}[0] = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$R_{gg_k} = R_{gg}[k] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x+k) dx = 0 \quad k \neq 0$$

parce que les supports des fonctions $g(x)$ et $g(x+k)$ sont disjointes. On peut donc écrire:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

Donc l'ensemble $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0 .

Remarque

En utilisant la dernière relation on peut montrer que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right)}{\frac{\omega + 2k\pi}{2}} \right|^2 = 1$$

Démonstration

$$\hat{g}(\xi) = \int_0^1 e^{-i\xi x} dx = -\frac{1}{i\xi} (e^{-i\xi} - 1) = -\frac{e^{-\frac{i\xi}{2}}}{i\xi} \left(-2i \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right) = -\frac{e^{-\frac{i\xi}{2}}}{\xi} 2 \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

d'où:

$$|\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = \left| \frac{2 \sin\left(\frac{\xi + 2k\pi}{2}\right)}{\xi + 2k\pi} \right|^2$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(\frac{\xi + 2k\pi}{2}\right)}{\frac{\xi + 2k\pi}{2}} \right|^2 \quad (\text{c.q.f.d})$$

Cette identité, très intéressante, est difficile d'être démontrée en utilisant une méthode différente. On a montré que:

$$|m(\omega)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{gg_k} e^{-ik\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\omega} = 1$$

Remarques

- A. La fonction g est à support compact. On peut donc dire que l'analyse d'un signal de V_0 basée sur le développement dans la base $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est bien localisée en temps.
- B. Le spectre $\hat{g}(\omega)$ a l'aspect présenté dans la figure 2.2.2.

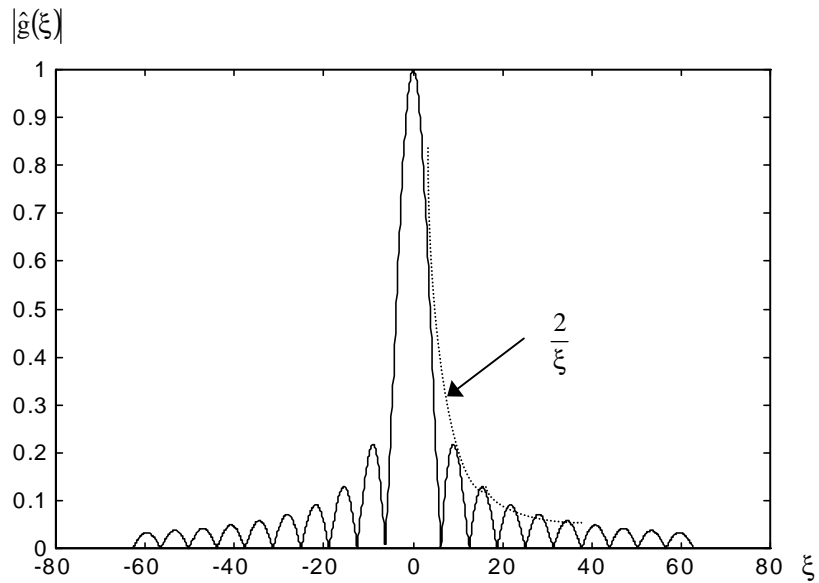


Figure 2.2.2. Le module du spectre de la fonction d'échelle dans le premier exemple.

Grâce à la dernière figure on peut constater que:

$$|\hat{g}(\xi)| \leq \frac{2}{|\xi|}$$

On peut donc affirmer que la décroissance de la fonction $|\hat{g}(\xi)|$ est faible et que la fonction g n'est pas bien localisée en fréquence.

Soit:

$$C(\omega) = |m(\omega)|^2$$

Pour notre exemple:

$$C(\omega) = 1, \quad |m(\omega)|^2 \in C^\infty$$

Remarque

Pour l'exemple considéré:

$$\hat{g}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) = \hat{\Omega}(\omega)$$

donc:

$$g(x) = \varphi(x) = \Omega(x)$$

Ainsi on a vérifié la condition 5 de l'analyse multirésolution. Les fonctions constantes par morceaux appartient à un ensemble dense en $L^2(\mathbb{R})$. Donc:

$$\overline{\bigcup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

L'hypothèse 4 de la définition de l'analyse multirésolution est donc vérifiée elle aussi.

Soit $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ la base orthonormée de V_0 et $P_j(f)$ la projection du signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace V_j . On peut écrire f comme:

$$f = g + h$$

où g est une fonction en escalier et h est une fonction avec une norme arbitrairement petite. Donc:

$$P_j(f) = P_j(g) + P_j(h)$$

Mais:

$$\|P_j(h)\| < \|h\|$$

Donc:

$$\|P_j(f)\| \leq \|P_j(g)\| + \|P_j(h)\| \leq \|P_j(g)\| + \|h\|$$

Mais:

$$g(x) = 1_{[0,1]}(x) \Rightarrow \|P_j(g)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \langle 1_{[0,1]}(x), g_k^j(x) \rangle \right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^1 |g(2^j x - k)|^2 dx \right|^2$$

En utilisant le changement de variable:

$$y = 2^j x$$

on obtient:

$$\|P_j(g)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^{2^j} |g(y-k)|^2 dy \right|^2$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Buniakovski-Schwartz on obtient:

$$\|P_j(g)\|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j} 2^j \int_0^{2^j} |\varphi(y-k)|^2 dy$$

Donc:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j(g)\|^2 = 0$$

On a démontré ainsi que:

$$\bigcap_j V_j = \{0\}$$

Donc l'hypothèse 3 de la définition de l'analyse multirésolution est aussi vérifiée pour notre premier exemple.

Exemple 2.

$$V_0 = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\xi) = 0, \forall \xi, |\xi| > \frac{\pi}{2} \right\}$$

Soit $\hat{g}(\xi)$ la fonction présentée dans la figure 2.2.3.

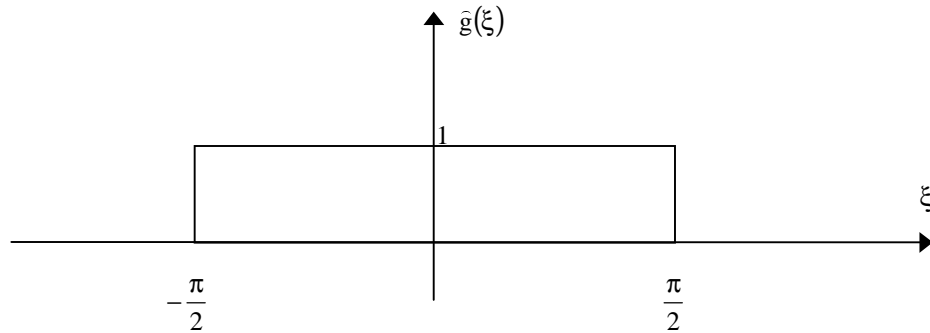


Figure 2.2.3. Le spectre de la fonction d'échelle dans l'exemple 2.

On calcule la fonction d'échelle :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi j x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d(e^{j\xi x}) = \frac{1}{2\pi j x} \left(e^{j\frac{\pi}{2}x} - e^{-j\frac{\pi}{2}x} \right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\pi x} = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Sa représentation graphique est dans la figure 2.2.4.

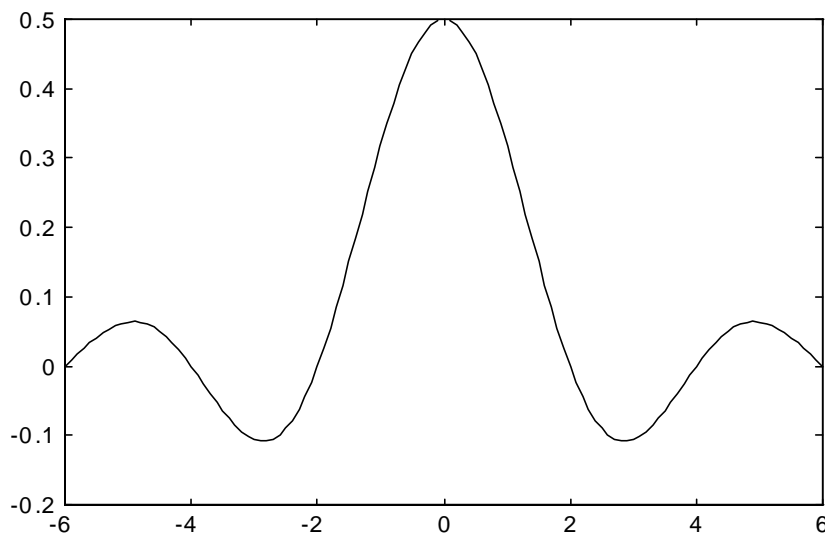


Figure 2.2.4. La fonction d'échelle dans l'exemple 2.

On peut facilement vérifier les hypothèses 1,2,3 et 4 de l'analyse multirésolution en tenant compte de l'exemple 1 et de l'isomorphisme de Fourier entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

L'ensemble $\left\{ \frac{1}{2} \sin c \left(\frac{\pi(x-k)}{2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace V_0 (des fonctions d'énergie finie et bande bornée) grâce au théorème d'échantillonnage (W.K.S). Donc l'hypothèse 5 de la définition de l'analyse multirésolution est aussi vérifiée.

Remarque

Cette analyse multirésolution permet une bonne localisation en fréquence (support compact de $\hat{g}(\xi)$) mais ne permet pas une bonne localisation en temps (le support de $g(x)$ est d'une longueur infinie). De plus, la fonction $g(x)$ n'a pas une décroissance rapide.

Exemple 3.

$$V_0 = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \mid f(x) \text{ est une fonction de degré I sur chaque } [k, k+1), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Un élément de V_0 , $f_0(x)$, peut avoir la représentation graphique présentée dans la figure 2.2.5.

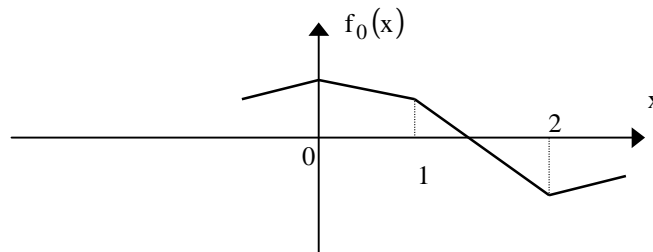


Figure 2.2.5. Un exemple de fonction de V_0 dans l'exemple 3.

La fonction d'échelle de cette analyse multirésolution est présentée dans la figure 2.2.6.

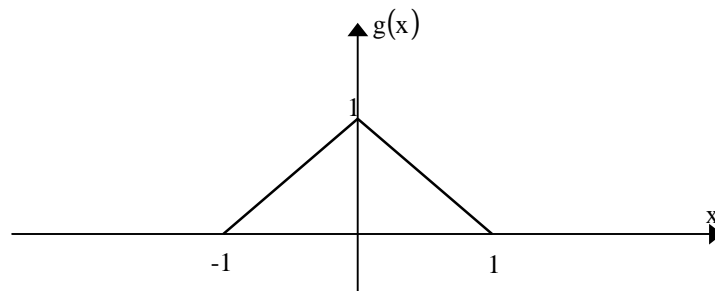


Figure 2.2.6. La fonction d'échelle dans l'exemple 3.

Remarque

$$g(x) = 1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} (x) * 1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} (x)$$

Donc:

$$\hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin \frac{|\xi|}{2}}{\frac{|\xi|}{2}} \right)^2$$

La représentation graphique de la fonction $\hat{g}(\xi)$ est présentée dans la figure 2.2.7.

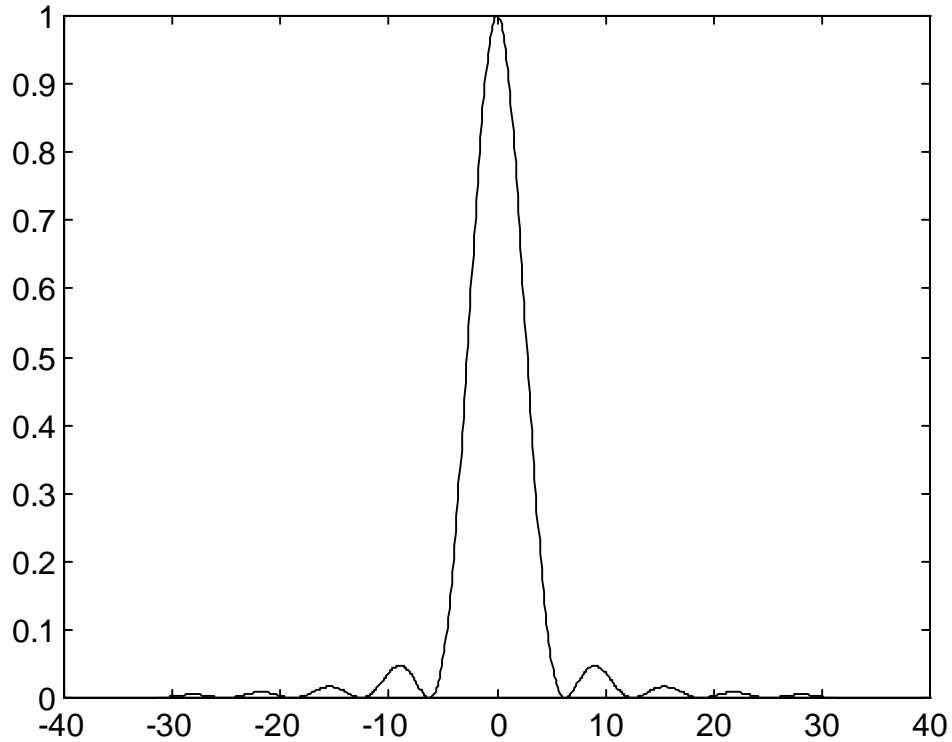


Figure 2.2.7. Le spectre de la fonction d'échelle dans l'exemple 3.

On peut vérifier facilement les hypothèses 1,2, et 3 de la définition de l'analyse multirésolution. En accord avec la figure 2.2.6 on peut écrire:

$$g(x) = (1+x)l_{[-1,0]}(x) + (1-x)l_{[0,1]}(x)$$

Donc:

$$R_{gg}[0] = \gamma_0 = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx = \int_{-1}^0 (1+x)^2 dx + \int_0^1 (1-x)^2 dx = 2 \int_0^1 u^2 du = \frac{2}{3}$$

On a démontré que:

$$R_{gg}[0] = \gamma_0 = \frac{2}{3} \tag{2.2.1}$$

$$R_{gg}[1] = \gamma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x+1) dx = - \int_{-1}^0 (1+x)x dx = \frac{1}{6}$$

$$R_{gg}[-1] = \gamma_{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x-1)dx = \int_0^1 (1-x)x dx = \frac{1}{6}$$

Pour:

$$k \neq -1, 0, 1$$

on obtient:

$$R_{gg}[k] = \gamma_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x+k)dx = 0$$

parce que les supports des fonctions $g(x)$ et $g(x+k)$ sont disjointes. Donc:

$$R_{gg}[n] = \begin{cases} \frac{2}{3}, & n = 0 \\ \frac{1}{6}, & n = \pm 1 \\ 0, & \text{en reste} \end{cases}$$

et la transformée de Fourier de la suite γ_k est:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(e^{i\omega} + e^{-i\omega})$$

Donc:

$$|m(\omega)|^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega$$

Mais:

$$-1 \leq \cos \omega \leq 1$$

C'est pourquoi on peut écrire:

$$\frac{1}{3} \leq |m(\omega)|^2 \leq 1$$

ou:

$$\frac{1}{3} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq 1$$

qui représente la condition pour que $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz avec $A = \frac{1}{3}$ et $B = 1$. On a vérifié ainsi l'hypothèse 5 de la définition d'une analyse multirésolution.

Remarque

Pour cet exemple la relation:

$$|m(\omega)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2$$

s'écrit:

$$|m(\omega)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right)^2}$$

En revenant à la relation:

$$|m(\omega)|^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega$$

et tenant compte que:

$$m^*(\omega) = m(-\omega)$$

pour des suites $m_k \in \mathbb{R}$ ($m(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k e^{-i\omega k}$), nous pouvons trouver l'expression de $m(\omega)$. Soit:

$$m(\omega) = a + be^{-i\omega} \Rightarrow m(-\omega) = a + be^{i\omega} \Rightarrow (a + be^{-i\omega})(a + be^{i\omega}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega$$

ou:

$$a^2 + abe^{i\omega} + abe^{-i\omega} + b^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega$$

d'où:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{2}{3} \\ ab = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Les solutions du système sont:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ b &= \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Avec la notation:

$$b' = \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

on peut écrire:

$$m(\omega) = a(1 + b'e^{-i\omega})$$

La base $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas orthonormée. La base orthonormée correspondante est $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, avec:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\widehat{g}(\omega)}{m(\omega)}; \quad \frac{1}{m(\omega)} \leftrightarrow m_k \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k g(x - k)$$

La base duale de cette base orthonormée est $\{\Omega(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ avec:

$$\hat{\Omega}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{|m(\omega)|^2}; \quad \frac{1}{|m(\omega)|^2} \leftrightarrow M_k \Rightarrow \Omega(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k g(x - k)$$

On présente dans la suite la liaison entre les fonctions $g(x) \in V_0$ et $g\left(\frac{x}{2}\right) \in V_1$. Ces fonctions sont présentés à la figure 2.2.8

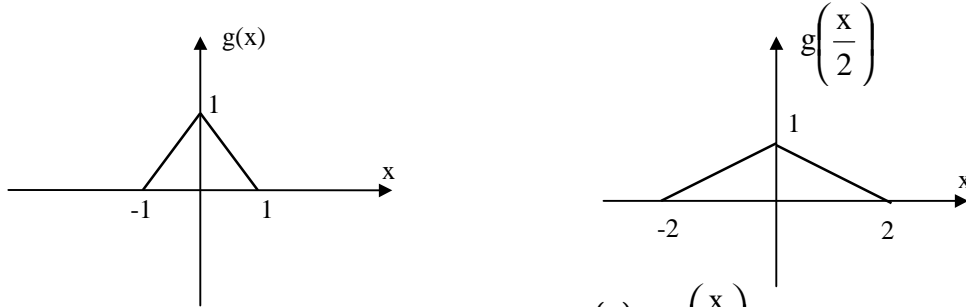


Figure 2.2.8. Les fonctions $g(x)$ et $g\left(\frac{x}{2}\right)$.

On peut écrire:

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}g(x+1) + \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{4}g(x-1)$$

En passant dans le domaine de la fréquence on obtient:

$$\hat{g}(2\xi) = \left(\frac{1}{4}e^{j\xi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j\xi}\right)\hat{g}(\xi) \quad (2.2.2)$$

Soit:

$${}_g m_0(\xi) = \frac{1}{4}e^{j\xi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j\xi}$$

On peut écrire:

$$\hat{g}(2\xi) = {}_g m_0(\xi)\hat{g}(\xi) \Leftrightarrow \hat{g}(2\xi) = \left(\frac{1 + \cos \xi}{2}\right)\hat{g}(\xi)$$

Donc:

$$\hat{g}(2\omega) = {}_g m_0(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (2.2.3)$$

ou:

$$\hat{\varphi}(2\omega) = \frac{\hat{g}(2\omega)}{m(2\omega)} = \frac{{}_g m_0(\omega)m(\omega)}{m(2\omega)}\hat{\varphi}(\omega)$$

Donc:

$$\hat{\varphi}(2\omega) = {}_{\varphi} m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$$

avec:

$${}_{\varphi} m_0(\omega) = \frac{{}_g m_0(\omega)m(\omega)}{m(2\omega)}; \quad {}_{\varphi} m_0(\omega) \leftrightarrow {}_{\varphi} m_{0k} \Rightarrow \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}_{\varphi} m_{0k} \varphi(x - k)$$

On peut observer que:

$$\varphi_{m_{0k}} = \left\langle \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right), \varphi(x-k) \right\rangle$$

On peut démontrer que $\varphi_{m_{0k}}$ est à décroissance rapide. Donc: $\varphi_{m_0}(\omega) \in C^\infty$. Ce résultat peut être utilisé pour démontrer que:

$${}_g m_0(\omega) \in C^\infty$$

et que:

$$\Omega m_0(\omega) \in C^\infty$$

En revenant à la relation (2.2.3) on peut écrire:

$$\tilde{g}(\omega) = {}_g m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \tilde{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.2.4)$$

ou:

$$\tilde{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) = {}_g m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \tilde{g}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

d'où:

$$\tilde{g}(\omega) = {}_g m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) {}_g m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \tilde{g}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

ou:

$$\tilde{g}(\omega) = \prod_{j=1}^N {}_g m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \tilde{g}\left(\frac{\omega}{2^N}\right)$$

Pour $N \rightarrow \infty$ on obtient:

$$\tilde{g}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} {}_g m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \tilde{g}(0) \quad (2.2.5)$$

Si $g(x)$ est une fonction régulière, alors $\tilde{g}(0) \neq 0$.

Remarque

Pour $\omega = 0$ la relation (2.2.4) peut être écrite:

$$\tilde{g}(0) = {}_g m_0(0) \tilde{g}(0)$$

Donc:

$${}_g m_0(0) = 1$$

Le filtre ${}_g m_0(\omega)$ est donc un filtre passe-bas.

2.2.1. Un point de vue algorithmique

En utilisant le dernier exemple, on obtient la relation entre les fonctions génératrices pour divers V_j . Nous avons l'intérêt de connaître les coefficients pour le développement de la fonction $g(x)$ dans la base $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. En partant de la relation:

$$\hat{g}(\omega) = 1 \cdot \hat{g}(\omega)$$

parce que:

$$\delta_n \leftrightarrow 1$$

on peut écrire:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n g(x-n)$$

Donc les coefficients cherchés sont δ_n . Ces coefficients peuvent être obtenus par l'échantillonnage de la fonction $g(x)$ (voir la figure suivante).

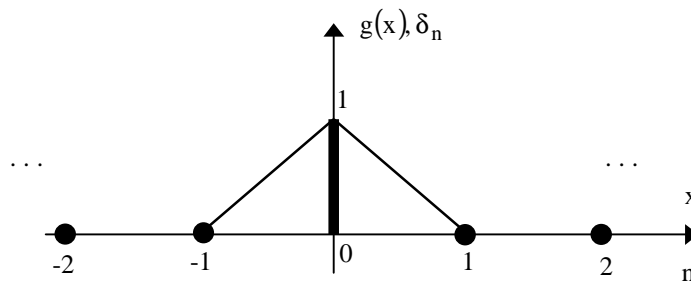


Figure 2.2.1.1. Les coefficients sont obtenus par l'échantillonnage de la fonction $g(x)$.

Maintenant nous trouverons les coefficients du développement de la fonction $g(x)$ dans la base du V_1 . On peut utiliser la relation:

$$\hat{g}(\omega) = g m_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{g} \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

où:

$$g m_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g m_{0k} e^{-i \frac{\omega}{2} k}$$

La relation équivalente dans le domaine du temps est:

$$\frac{1}{2} g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g m_{0k} g(2x-k)$$

Donc les coefficients cherchés sont:

$$g m_{0k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{4}, & k = \pm 1 \\ 0, & k \neq -1, 0, 1 \end{cases}$$

Remarque

Ces coefficients peuvent être obtenus par le suréchantillonnage de la fonction $\frac{1}{2}g(x)$ (voir la figure suivante).

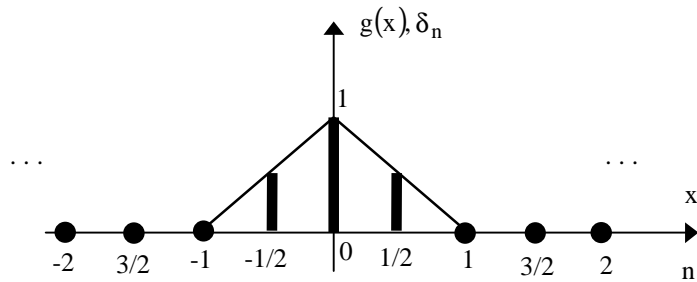


Figure 2.2.2. Le suréchantillonnage de la fonction d'échelle.

Exemple 4.

V_0 - l'espace vectoriel des splines d'ordre m par morceaux.

La fonction d'échelle correspondante est:

$$g(x) = 1_{[0,1]}(x) * 1_{[0,1]}(x) * \dots * 1_{[0,1]}(x) = 1_{[0,1]}^m(x)$$

3. Décomposition orthogonale du $L^2(\mathbb{R})$

On considère une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ avec l'espace V_0 engendré par une base orthonormée $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. On note m_0 par m_0 . On peut donc écrire:

$$\hat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \quad (3.1)$$

et:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Pour $\omega \rightarrow 2\omega$ la relation (3.2) peut être écrite:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

où:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2(\omega + k\pi))|^2 = 1$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + k\pi)|^2 |m_0(\omega + k\pi)|^2 = 1$$

ou:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2p\pi)|^2 |m_0(\omega + 2p\pi)|^2 + \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + (2p+1)\pi)|^2 |m_0(\omega + (2p+1)\pi)|^2 = 1$$

Mais $m_0(\omega)$ est la réponse en fréquence d'un filtre numérique, qui est une fonction 2π périodique. C'est pour ça que la dernière relation peut être écrite comme:

$$|m_0(\omega)|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2p\pi)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + (2p+1)\pi)|^2 = 1 \quad (3.3)$$

Pour $\omega \rightarrow \omega + \pi$ la relation (3.1) est:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + \pi + 2p\pi)|^2 = 1 \quad (3.4)$$

A l'aide des relations (3.1) et (3.4) peut être écrit:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.5)$$

Donc la réponse en fréquence du filtre numérique $m_0(\omega)$, qui fait la liaison entre les bases orthonormées des espaces V_0 et V_1 doit subir à la condition (3.5).

Soit:

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega} (m_0(\omega + \pi))^* \quad (3.6)$$

et:

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \quad (3.7)$$

Soit:

$$W_{-1} = W \cap L^2(\mathbb{R})$$

où W est l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

- Proposition 3.1.**
- i) $W_{-1} \perp V_{-1}$
 - ii) $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_{-1}
 - iii) $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$

Démonstration

$$W_{-1} \subset V_0$$

En effet:

$$m_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} m_{0_{1-n}} e^{-in\omega}$$

$$\widehat{\psi}(2\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2} \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} m_{0_{1-n}} \phi(x - n)$$

Donc les fonctions $\psi\left(\frac{x}{2} - k\right)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et donc: $\left\{ \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset V_0$ On a montré ainsi que chaque combinaison linéaire des fonctions $\left\{ \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est en V_0 . Donc: $W_{-1} \subset V_0$.

Calculons maintenant la somme de la série: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2(\omega + k\pi))|^2$. On obtient:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2(\omega + k\pi))|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_1(\omega + k\pi)|^2 |\widehat{\phi}(\omega + k\pi)|^2 =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} |m_1(\omega + 2p\pi)|^2 |\widehat{\phi}(\omega + 2p\pi)|^2 + \sum_{p=-\infty}^{\infty} |m_1(\omega + (2p+1)\pi)|^2 |\widehat{\phi}(\omega + (2p+1)\pi)|^2$$

Mais $m_1(\omega)$ est une fonction périodique de période 2π parce qu'il s'agit de la réponse en fréquence d'un filtre numérique, donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2(\omega + k\pi))|^2 = |m_1(\omega)|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2p\pi)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\omega + (2p+1)\pi)|^2$$

ou:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2(\omega + k\pi))|^2 = |m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2$$

Mais:

$$|m_1(\omega)|^2 = \left| e^{-i\omega} (m_0(\omega + \pi))^* \right|^2 = \left| e^{-i\omega} \right|^2 |m_0^*(\omega + \pi)|^2 = |m_0(\omega + \pi)|^2$$

et:

$$|m_1(\omega + \pi)|^2 = \left| e^{-i(\omega + \pi)} (m_0^*(\omega + 2\pi)) \right|^2 = |m_0(\omega + 2\pi)|^2 = |m_0(\omega)|^2$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 = |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 \quad (\forall) \omega \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

$$|m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (\forall) \omega \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

Remarque

On a retrouvé les filtres QMF (codage sous-bande).

Pour $\omega \rightarrow \frac{\omega}{2}$ la relation (3.8) devient:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

Donc l'ensemble $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormé.

$$\langle \psi(x-k), \psi(x-1) \rangle = \delta_{k-1} \quad (3.10)$$

Calculons maintenant le produit scalaire:

$$\left\langle 2^{-\frac{1}{2}} \psi(2^{-1}x-k), 2^{-\frac{1}{2}} \psi(2^{-1}x-1) \right\rangle = 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-1}x-k) \psi^*(2^{-1}x-1) dx$$

En faisant le changement de variable:

$$2^{-1}x = u$$

on obtient:

$$\left\langle 2^{-\frac{1}{2}} \psi(2^{-1}x-k), 2^{-\frac{1}{2}} \psi(2^{-1}x-1) \right\rangle = \langle \psi(x-k), \psi(x-1) \rangle = \delta_{k-1}$$

Donc l'ensemble $\left\{ 2^{-\frac{1}{2}} \psi(2^{-1}x-k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormé.

Soit $f(x)$ une fonction en V_0 . Cette fonction peut être développée dans la base $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. La relation correspondante à ce développement, dans le domaine de la fréquence est:

$$f(\omega) = m_f(\omega) \tilde{\varphi}(\omega)$$

Soit la fonction $h(x)$ qui correspond à la relation:

$$h(\omega) = m_1(\omega) f(\omega) = m_f(\omega) m_1(\omega) \tilde{\varphi}(\omega) = m_f(\omega) \tilde{\psi}(2\omega)$$

Donc la fonction $h(x)$ peut être écrite comme une combinaison linéaire des fonctions

$$\left\{ 2^{-\frac{1}{2}} \psi(2^{-1}x-k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{qui sont en } W_{-1}. \text{ On peut donc dire que } h(x) \in W_{-1}. \text{ Pour chaque}$$

$f(x) \in V_0$ existe une fonction $h(x) \in W_{-1}$ qui peut être écrite comme une combinaison

linéaire des fonctions $2^{-\frac{1}{2}}\psi(2^{-1}x-k)$. On a démontré ainsi que l'ensemble

$\left\{2^{-\frac{1}{2}}\psi(2^{-1}x-k)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_{-1} . L'hypothèse ii) est donc vérifiée.

Calculons maintenant:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(2(\omega+k\pi))\widehat{\phi}^*(2(\omega+k\pi)) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_1(\omega+k\pi)\widehat{\phi}(\omega+k\pi)m_0^*(\omega+k\pi)\widehat{\phi}^*(\omega+k\pi) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_1(\omega+k\pi)m_0^*(\omega+k\pi)|\widehat{\phi}(\omega+2p\pi)|^2 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} m_1(\omega+2p\pi)m_0^*(\omega+2p\pi)|\widehat{\phi}(\omega+2p\pi)|^2 + \\ &\sum_{p=-\infty}^{\infty} m_1(\omega+(2p+1)\pi)m_0^*(\omega+(2p+1)\pi)|\widehat{\phi}(\omega+(2p+1)\pi)|^2 \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(2(\omega+k\pi))\widehat{\phi}^*(2(\omega+k\pi)) &= m_1(\omega)m_0^*(\omega) \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\omega+2p\pi)|^2 + m_1(\omega+\pi)m_0^*(\omega+\pi) \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\omega+(2p+1)\pi)|^2 = \\ &= m_1(\omega)m_0^*(\omega) + m_1(\omega+\pi)m_0^*(\omega+\pi) \end{aligned} \quad (3.11)$$

En utilisant la relation (3.6) on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(2(\omega+k\pi))\widehat{\phi}^*(2(\omega+k\pi)) &= e^{-i\omega}m_0^*(\omega+\pi)m_0^*(\omega) + e^{-i\omega}e^{-i\pi}m_0^*(\omega)m_1^*(\omega+\pi) = \\ &= e^{-i\omega}(1-1)m_0^*(\omega+\pi)m_0^*(\omega) = 0, (\forall)\omega \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(2(\omega+k\pi))\widehat{\phi}^*(2(\omega+k\pi)) = 0, (\forall)\omega \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

Pour $\omega \rightarrow \frac{\omega}{2}$ on obtient:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\omega+2k\pi)\widehat{\phi}^*(\omega+2k\pi) = 0$$

On peut écrire:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\omega+2k\pi)\widehat{\phi}^*(\omega+2k\pi) \right] d\omega = 0$$

et aussi:

$$\left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\omega+2k\pi)\widehat{\phi}^*(\omega+2k\pi) \right] e^{-j(m-n)\omega} d\omega = 0$$

ou:

$$0 = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [\widehat{\psi}(\omega+2k\pi)\widehat{\phi}^*(\omega+2k\pi)] e^{-j(m-n)(\omega+2k\pi)} d\omega$$

En utilisant le changement de variable:

$$\omega+2k\pi \rightarrow \omega$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \hat{\psi}(\omega) \hat{\varphi}^*(\omega) e^{-j(m-n)\omega} d\omega = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{-jm\omega} \hat{\varphi}^*(\omega) e^{jn\omega} d\omega = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \right) \langle \hat{\psi}(\omega) e^{-jm\omega}, \hat{\varphi}(\omega) e^{-jn\omega} \rangle = \langle \psi(x-m), \varphi(x-n) \rangle
\end{aligned}$$

Donc pour chaque entiers m et n on a:

$$\langle \psi(x-m), \varphi(x-n) \rangle = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$$

Mais:

$$\langle \psi(x-m), \varphi(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-m) \varphi^*(x-n) dx$$

En faisant le changement de variable:

$$x = \frac{u}{2}$$

la dernière relation devienne:

$$\langle \psi(x-m), \varphi(x-n) \rangle = \left(\frac{1}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{u}{2}-m\right) \varphi^*\left(\frac{u}{2}-n\right) du = \frac{1}{2} \left\langle \psi\left(\frac{x}{2}-m\right), \varphi\left(\frac{x}{2}-n\right) \right\rangle$$

Donc:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{x}{2}-m\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2}-n\right) \right\rangle = 0 \quad (\forall) m, n \in \mathbb{Z}$$

On a démontré ainsi que les ensembles: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{x}{2}-m\right) \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$ et $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2}-n\right) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont orthogonales. L'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormé:

$$\langle \varphi(x-1), \varphi(x-p) \rangle = \delta_{1-p} \quad (3.13)$$

Mais:

$$\langle \varphi(x-1), \varphi(x-p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-1) \varphi^*(x-p) dx$$

Après la substitution:

$$x = \frac{u}{2}$$

on peut écrire:

$$\langle \varphi(x-1), \varphi(x-p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{u}{2}-1\right) \varphi^*\left(\frac{u}{2}-p\right) \frac{du}{2} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2}-1\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2}-p\right) \right\rangle = \delta_{1-p}$$

L'ensemble $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2}-k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est donc orthonormé.

Soit f(x) une fonction en V_0 . Cette fonction peut être développée dans la base $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. La relation correspondante en fréquence est:

$$\hat{f}(\omega) = m_f(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$$

Soit la fonction h(x) définit par:

$$\hat{h}(\omega) = m_0(\omega) \hat{f}(\omega) = m_0(\omega) m_f(\omega) \hat{\varphi}(\omega) = m_f(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$$

Donc la fonction $h(x)$ peut être écrite comme une combinaison linéaire des fonctions

$$\left\{ 2^{-\frac{1}{2}} \varphi(2^{-1}x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

qui sont en V_{-1} .

On peut facilement démontrer que l'ensemble $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée

de V_{-1} . On peut donc dire que l'espace W_{-1} est engendré par l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Donc $V_{-1} \perp W_{-1}$ (voir la relation (3.13). L'hypothèse i) est donc vérifiée

aussi. Soit $f(x)$ une fonction en V_0 . On peut écrire:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^0 \varphi(x - k) \quad (3.14)$$

Soit $f_1(x)$ la projection de la fonction $f(x)$ sur l'espace V_{-1} . On peut écrire:

$$f(x) = f_1(x) + d_1(x)$$

L'erreur d'approximation du signal $f(x)$ par le signal $f_1(x)$, $d_1(x)$, est orthogonale sur l'espace V_{-1} (du au théorème de projection), donc le signal $d_1(x)$ est dans l'espace W_{-1} .

On peut développer ces fonctions dans les bases $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \quad (3.15)$$

$$d_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \quad (3.16)$$

parce que:

$$\left\langle f(x), \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle = \left\langle f_1(x), \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle + \left\langle d_1(x), \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle$$

et le premier terme du membre droit est nul.

Introduisant (3.14) dans (3.15) et (3.16) on obtient:

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^0 \varphi(x - l), \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \quad (3.17)$$

$$d_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^0 \varphi(x - l), \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \quad (3.18)$$

En utilisant les notations:

$$a_k^{-1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^0 \left\langle \varphi(x - l), \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle \quad (3.19)$$

et

$$d_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^0 \left\langle \varphi(x - l), \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle \quad (3.20)$$

On peut donc écrire:

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{-1} \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \quad (3.21)$$

$$d_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \quad (3.22)$$

Soit:

$$h_p = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi^*(x-p) dx$$

Donc:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-p) \varphi^*\left(\frac{x}{2} - k\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-p) \varphi^*\left(\frac{x-2k}{2}\right) dx$$

On utilise le changement de variable:

$$X = x - 2k$$

et la dernière relation peut être écrite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-p) \varphi^*\left(\frac{x}{2} - k\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X+2k-p) \varphi^*\left(\frac{X}{2}\right) dX = 2h_{p-2k}^*$$

La relation (3.19) devienne:

$$a_k^{-1} = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^0 h_{l-2k}^* \quad (3.23)$$

Soit:

$$\tilde{h}_p = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \psi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi^*(x-p) dx$$

Donc:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-p) \psi^*\left(\frac{x}{2} - k\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X+2k-p) \psi^*\left(\frac{X}{2}\right) dX = 2\tilde{h}_{p-2k}^*$$

La relation (3.20) devienne:

$$d_k = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^0 \tilde{h}_{l-2k}^* \quad (3.24)$$

Remarques

A) Les relations (3.23) et (3.24) donnent les modalités de calcul des coefficients des projections de la fonction $f(x)$ sur les espaces V_{-1} et W_{-1} , a_k^{-1} et d_k à l'aide des coefficients du développement de cette fonction dans la base de V_0 , a_k^0 .

B) Les coefficients h_p et \tilde{h}_p sont liés avec les réponses en fréquence $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$. En effet:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right), \varphi(x-p) \right\rangle \varphi(x-p) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_p \varphi(x-p)$$

En fréquence:

$$\hat{\varphi}(2\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_p e^{-i\omega p} \hat{\varphi}(\omega)$$

Mais:

$$\hat{\varphi}(2\omega) = m_1(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$$

Donc la suite $\{h_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ est la réponse impulsionnelle du filtre numérique avec la réponse en fréquence $m_1(\omega)$.

C) Les coefficients des signaux $f_1(x)$ et $d_1(x)$ sont obtenus par codage en sous-bandes de la suite $\{a_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$. En effet les relations (3.23) et (3.24) correspondent au système présenté à la figure 3.1.

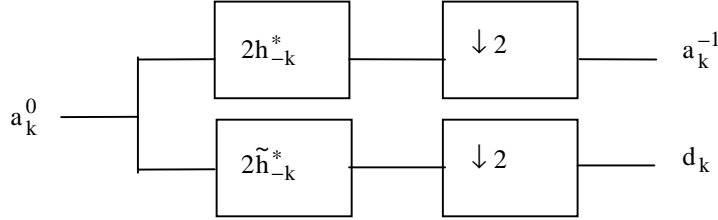


Figure 3.1 Système de codage en sous-bandes qui transforme le signal $\{a_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en générant les signaux a_k^{-1} et d_k .

Si $h_k \in \mathbb{R}$ et $\tilde{h}_k \in \mathbb{R}$ alors:

$$h_k \leftrightarrow m_0(\omega) \Leftrightarrow h_{-k} \leftrightarrow m_0^*(\omega) \quad \tilde{h}_{-k} \leftrightarrow m_1^*(\omega)$$

D) La suite $\{a_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ peut être reconstruite à l'aide des suites $\{a_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^0 \varphi(x-n)$$

$$f_1(x) + d_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-1} \varphi\left(\frac{x}{2} - n\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \psi\left(\frac{x}{2} - n\right)$$

Mais:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} m_{0_p} \varphi(x - 2k - p)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} m_{1_p} \varphi(x - 2k - p)$$

Donc:

$$f_1(x) + d_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n^{-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} m_{0_p} \varphi(x - 2n - p) + d_n \sum_{p=-\infty}^{\infty} m_{1_p} \varphi(x - 2n - p) \right)$$

En faisant le changement de variable:

$$l = 2n + p$$

on obtient:

$$f_1(x) + d_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_{0_{l-2n}} \varphi(x-l) + d_n \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_{1_{l-2n}} \varphi(x-l) \right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(a_n^{-1} m_{0_{l-2n}} + d_n m_{1_{l-2n}} \right) \varphi(x-l) \right)$$

Par identification on obtient:

$$a_1^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-1} m_{0_{1-2n}} + d_n m_{1_{1-2n}} \quad (3.25)$$

C'est la liaison entre les coefficients a_n , a_n^{-1} et d_n . Le schéma d'implantation correspondante est présentée à la figure suivante.

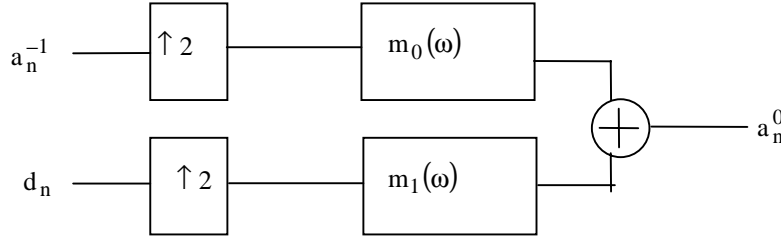


Figure 3.2. Schéma de décodage.

Donc la fonction $f(x)$ peut être reconstruite exactement en utilisant les fonctions $f_1(x)$ et $d_1(x)$, à l'aide des filtres $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$ qui respectent les conditions:

$$\begin{aligned} |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 &= 1 \\ |m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 &= 1 \\ m_0(\omega)m_1^*(\omega) + m_0(\omega + \pi)m_1^*(\omega + \pi) &= 0 \end{aligned}$$

E)

$$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V_{-1} \subset V_0; W_{-1} \subset V_0; V_{-1} \perp W_{-1}; V_{-1} \cap W_{-1} &= \Phi \\ \forall f \in V_0 \exists f_1 \in V_{-1} \text{ et } g_1 \in W_{-1} \text{ tel que: } f &= f_1 + g_1 \Leftrightarrow V_0 = V_{-1} \cup W_{-1} \end{aligned}$$

Donc l'hypothèse III) est aussi vérifiée.

F) On peut démontrer aussi que:

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 = V_{-1} \oplus W_{-1} \oplus W_0$$

C'est à la cause que le produit scalaire est invariant aux dilatations. En iterant on peut démontrer que:

$$V_J = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq p \leq J} W_p \right) \quad (3.26)$$

Mais parce qu'il s'agit d'une analyse multirésolution:

$$\overline{\bigcup_J V_J} = L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{J \in \mathbb{Z}} W_J}$$

Donc l'ensemble $\{W_J\}_{J \in \mathbb{Z}}$ est une décomposition orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$.

3.1. L'algorithme FWT (Fast Wavelet Transform)

On suppose qu'on connaît la projection $f(x)$ sur l'espace V_{J_0} , $f_{J_0}(x)$:

$$f_{J_0}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \varphi_{J_0,k}(x) \rangle \varphi_{J_0,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{J_0,k} \varphi_{J_0,k}(x)$$

La projection de la fonction $f(x)$ sur l'espace V_{J_0-1} , $f_{J_0-1}(x)$ est identique à la projection de la fonction $f_{J_0}(x)$ sur l'espace V_{J_0-1} . On peut donc utiliser pour obtenir les projections de la fonction $f(x)$ sur les espaces V_{J_0-K} , $K > 0$ le schéma présenté dans la figure 3.1.1:

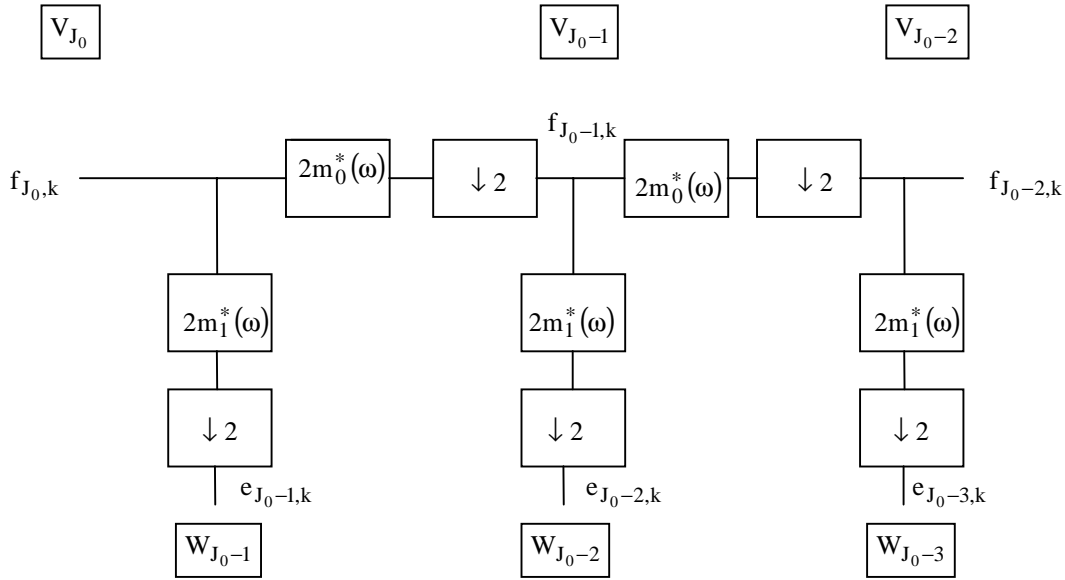


Figure 3.1.1. Le schéma d'implantation de l'algorithme FWT.

Remarque

$$a_k^{-1} = \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle; d_k = \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle$$

$$f_{J_0,k} = \left\langle f(x), \varphi_{J_0,k}(x) \right\rangle^{J_0=-1} = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2} - k\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_k^{-1}$$

Donc:

$$f_{-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_k^{-1} \stackrel{(3.23)}{=} \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_1^0 h_{1-2k}^* = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_1^0 (\sqrt{2} h_{1-2k}^*) = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{0,k} h_{1-2k}^*$$

On peut donc arriver à $f_{-1,k}$ en partant de a_k^0 à l'aide du filtre $\sqrt{2}m_0^*(\omega)$.

On a noté avec $e_{J_0-1,k}$ les coefficients du développement de la fonction $f_{J_0}(x)$ dans la base de l'espace W_{J_0-1} :

$$e_{J_0-1,k} = \langle f(x), \psi_{J_0-1,k}(x) \rangle$$

Soit:

$$a_k^{-J_0} = \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{2^{J_0}} - k\right) \right\rangle \quad (3.1.1)$$

et:

$$d_k^{-J_0} = \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x}{2^{J_0}} - k\right) \right\rangle$$

Le schéma de la figure antérieure devienne:

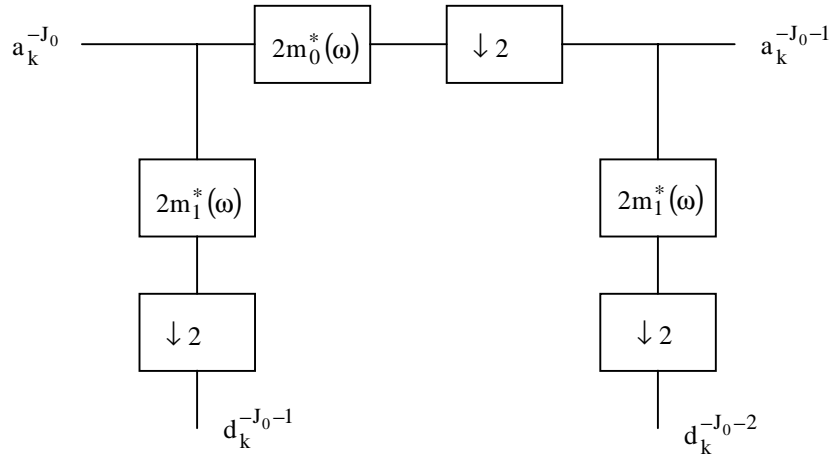


Figure 3.1.2. Une partie de la schème présentée dans la figure 3.1.1.

Parce que on peut reconstituer le signal $\{a_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en utilisant les suites $\{a_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (nous avons vu déjà ça) on peut utiliser le système d'identité présenté à la figure 3.1.3.

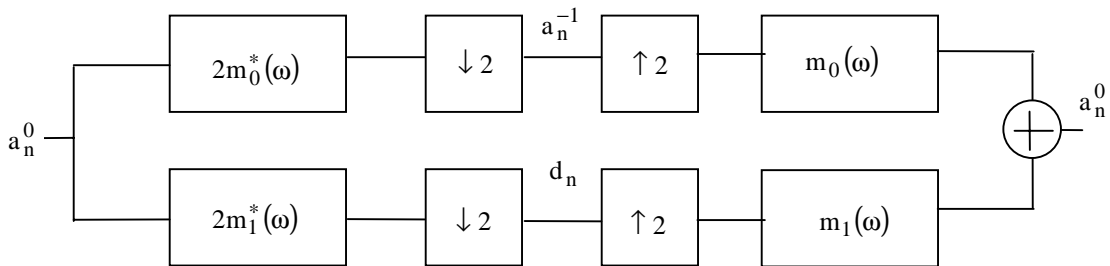


Figure 3.1.3. Système d'identité basé sur le codage et le décodage en sous-bandes.

Les suites a_n^{-1} et d_n ne représentent pas les coefficients des projections du signal $f(x) \in V_0$ sur les sous-espaces V_{-1} et W_{-1} mais ces suites ont des valeurs proportionnelles avec ces coefficients. Le dernier schéma est équivalent avec le schéma présenté dans la figure suivante:

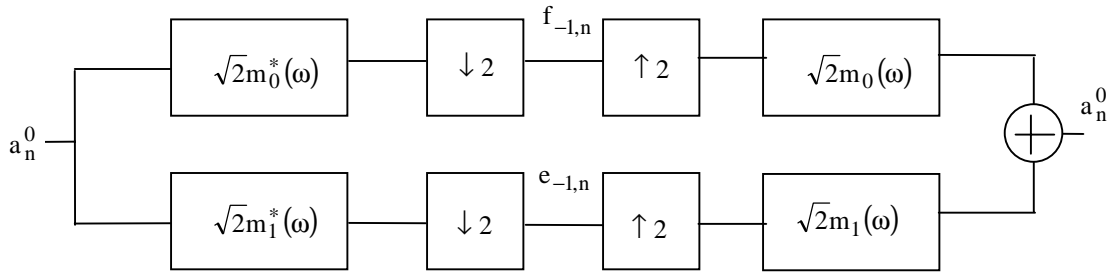


Figure 3.1.4. Un autre schéma de système d'identité.

Ce système est utilisé dans les applications des ondelettes au débruitage. On peut utiliser aussi le système d'identité présenté à la figure suivante.

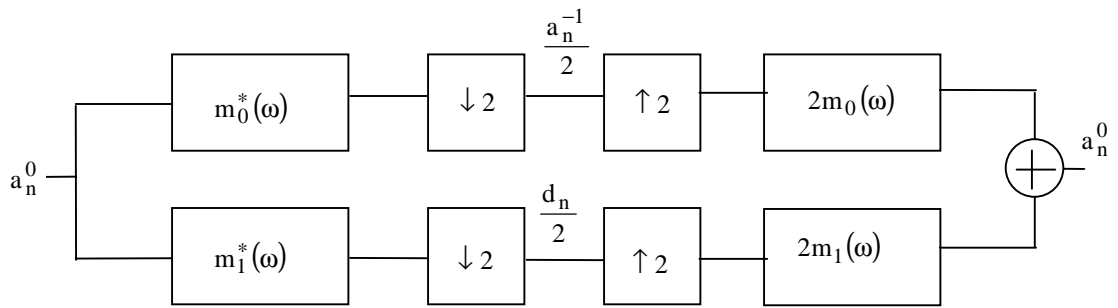


Figure 3.1.5. Un autre schéma de système d'identité.

C'est le système utilisé dans les applications d'analyse d'images. En revenant à la figure 3.1.2, on peut démontrer en utilisant la relation (3.1.1) que:

$$a_n^{J_0} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (a_1^{J_0-1} m_{0n-2l} + d_1^{J_0-1} m_{1n-2l}) \quad (3.1.2)$$

On peut donc obtenir la suite $\{a_n^{J_0}\}$ à l'aide des suites: $\{a_n^{J_0-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{d_n^{J_0-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{a_n^{J_0-2}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{d_n^{J_0-2}\}_{n \in \mathbb{Z}}$... $\{a_n^{J_0-K}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{d_n^{J_0-K}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, en utilisant le schéma présenté à la figure suivante.

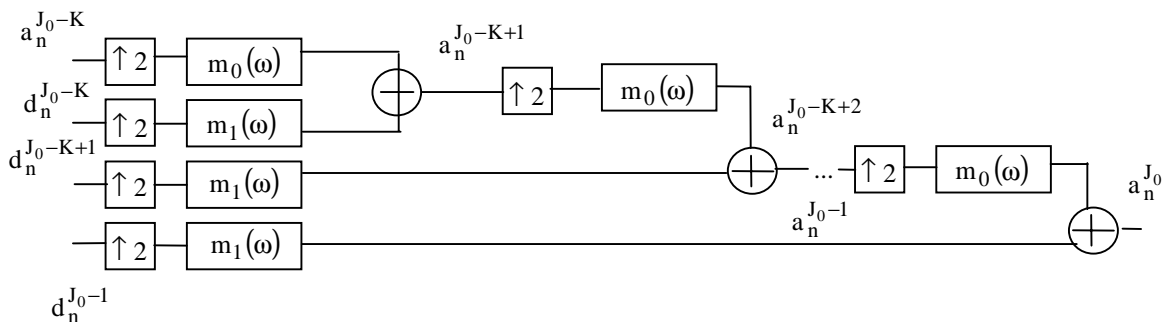


Figure 3.1.6. Le schéma de reconstruction.

L'algorithme présenté dans la figure 3.1.6. s'appelle IFWT (Inverse Fast Wavelet Transform).

Remarque

Soit $f_{J_0}(x)$ la projection du signal $f(x)$ sur l'espace V_{J_0} :

$$f_{J_0}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \varphi_{J_0,k}(x) \rangle \varphi_{J_0,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle f(x), 2^{\frac{J_0}{2}} \varphi(2^{J_0}x - k) \right\rangle 2^{\frac{J_0}{2}} \varphi(2^{J_0}x - k)$$

Si on utilise dans l'algorithme les coefficients:

$$\left\langle f(x), 2^{\frac{J_0}{2}} \varphi(2^{J_0}x - k) \right\rangle$$

alors ces coefficients dépendent d'échelle.

Démonstration

Soit:

$$f(x) = C \text{ (une constante)}$$

$$\left\langle f(x), 2^{\frac{J_0}{2}} \varphi(2^{J_0}x - k) \right\rangle = C 2^{\frac{J_0}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{J_0}x - k) dx$$

En utilisant le changement de variable:

$$2^{J_0}x = u$$

on obtient:

$$\left\langle f(x), 2^{\frac{J_0}{2}} \varphi(2^{J_0}x - k) \right\rangle = C 2^{J_0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u - k) 2^{-J_0} du = C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u - k) du = CK \quad (\text{c.q.f.d})$$

où on a utilisé la notation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u - k) du = K$$

Donc quand on désire l'indépendance des coefficients d'échelle on utilise l'algorithme présenté dans la figure 3.1.5.

3.2. La caractérisation des analyses multirésolution à l'aide des polynômes associés aux ondelettes

On a vu que pour engendrer l'espace V_{-1} en partant de V_0 on utilise le filtre avec la réponse en fréquence $m_0(\omega)$ en utilisant la relation:

$$\hat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$$

Ce filtre doit satisfaire la condition:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (\forall) \omega \in \mathbb{R}$$

On sait que:

$$m_0(\omega) = 1$$

Donc:

$$1 + |m_0(\pi)|^2 = 1 \Rightarrow m_0(\pi) = 0$$

Pour engendrer l'espace W_{-1} en partant de V_0 on utilise le filtre avec la réponse en fréquence $m_1(\omega)$.

$$\hat{\psi}(2\omega) = m_1(\omega)\hat{\phi}(\omega)$$

avec:

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega} m_0^*(\omega + \pi)$$

Donc:

$$m_1(0) = m_0^*(\pi) = 0$$

et:

$$m_1(\pi) = e^{-i\pi} m_0^*(\pi + \pi) = -1 \Rightarrow |m_1(\pi)| = 1$$

Un exemple de filtres avec les réponses en fréquence $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$ est présenté dans la figure suivante:

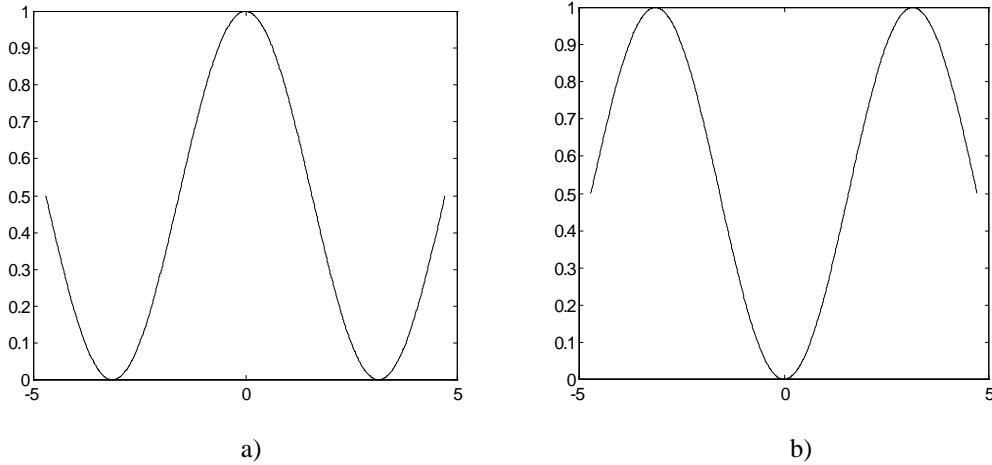


Figure 3.2.1. Exemple de filtres avec les réponses en fréquence $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$.

Dans la figure a) est présentée la caractéristique $|m_0(\omega)|^2$ et dans la figure b) la caractéristique $|m_1(\omega)|^2$ ($|m_1(\omega)|^2 = |m_0(\omega + \pi)|^2$).

Proposition 3.2.1. Si $|m_0(\omega)|^2$ est strictement positive pour $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors:

- i) $|\hat{\phi}(\omega)|^2_{\omega=\pi} > 0$ et
- ii) $|\hat{\phi}(\omega)|^2_{\omega=2k\pi} = 0$ ($\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$); $|\hat{\phi}(\omega)|^2_{\omega=0} = 1$

Démonstration

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)m_0\left(\frac{\omega}{4}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right) = \dots = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)m_0\left(\frac{\omega}{2^2}\right)\dots m_0\left(\frac{\omega}{2^N}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^N}\right)$$

Pour:

$$\omega = \pi$$

on obtient:

$$\hat{\phi}(\pi) = m_0\left(\frac{\pi}{2}\right)m_0\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\dots m_0\left(\frac{\pi}{2^N}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\pi}{2^N}\right)$$

Mais:

$$\hat{\phi}(0) \neq 0$$

et $\hat{\varphi}(\omega)$ est continue en 0. Donc pour N suffisamment grand $\hat{\varphi}\left(\frac{\pi}{2^N}\right) \neq 0$ et:

$$|\hat{\varphi}(\pi)|^2 = \left| m_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|^2 \left| m_0\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \right|^2 \dots \left| m_0\left(\frac{\pi}{2^N}\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\pi}{2^N}\right) \right|^2 > 0 \quad (\text{c.q.f.d})$$

Donc la partie i) est démontrée.

La condition de régularité pour l'ondelette est (voir le premier chapitre):

$$\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, r}$$

Mais:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \stackrel{\xi=0}{\Rightarrow} 0 = m_1(0) \hat{\varphi}(0) \Rightarrow m_1(0) = 0 \\ \hat{\psi}'(\xi) &= m_1'\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) + m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}'\left(\frac{\xi}{2}\right) \stackrel{\xi=0}{\Rightarrow} \hat{\psi}'(0) = m_1'(0) \hat{\varphi}(0) + m_1(0) \hat{\varphi}'(0) \\ &\Rightarrow 0 = m_1'(0) \hat{\varphi}(0) \Rightarrow m_1'(0) = 0 \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ \hat{\psi}^{(k)}(\xi) &= m_1^{(k)}\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \dots \stackrel{\xi=0}{\Rightarrow} \hat{\psi}^{(k)}(0) = m_1^{(k)}(0) \hat{\varphi}(0) + \dots \Rightarrow 0 = m_1^{(k)}(0) \end{aligned}$$

On a montré donc que:

$$m_1^{(k)}(0) = 0 \quad (\forall) k = \overline{0, r}$$

Mais:

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega} m_0^*(\omega + \pi) \stackrel{\omega=0}{\Rightarrow} 0 = [m_0(\pi)]^* \Rightarrow m_0(\pi) = 0$$

$$\begin{aligned} m_1'(\omega) &= -ie^{-i\omega} m_0^*(\omega + \pi) + e^{-i\omega} m_0^{*'}(\omega + \pi) \Rightarrow m_1'(0) = -im_0^*(\pi) + m_0^{*'}(\pi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_0'(\pi) = 0 \dots \end{aligned}$$

Donc:

$$m_0(\pi) = m_0'(\pi) = \dots = m_0^{(r)}(\pi) = 0 \quad (3.2.1)$$

Mais:

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \stackrel{\xi=2\pi}{\Rightarrow} \hat{\varphi}(2\pi) = m_0(\pi) \hat{\varphi}(\pi) = 0$$

parce que:

$$m_0(\pi) = 0$$

On a montré ainsi que:

$$\hat{\varphi}(2\pi) = 0$$

Pour $\xi = 4\pi$ on obtient:

$$\hat{\varphi}(4\pi) = m_0(2\pi) \hat{\varphi}(2\pi) = 0 \Rightarrow \hat{\varphi}(4\pi) = 0$$

Pour $\xi = 6\pi$ on obtient:

$$\hat{\varphi}(6\pi) = m_0(3\pi) \hat{\varphi}(3\pi) = m_0(\pi + 2\pi) \hat{\varphi}(3\pi)$$

Mais $m_0(\xi)$ est la réponse en fréquence d'un filtre numérique. Donc il s'agit d'une fonction 2π -périodique. On peut donc écrire:

$$m_0(\pi + 2\pi) = m_0(\pi) = 0$$

Donc:

$$\widehat{\varphi}(6\pi) = 0$$

En continuant ainsi on peut démontrer que:

$$\widehat{\varphi}(2k\pi) = 0 \quad (\forall) k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Pour trouver la valeur $\widehat{\varphi}(0)$ on utilise la relation:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$$

Parce que:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \Leftrightarrow \widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi) = m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \right|^2 = 1$$

Pour $\xi = 0$ on obtient:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(k\pi)|^2 |\widehat{\varphi}(k\pi)|^2 = 1$$

ou:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(2k\pi)|^2 |\widehat{\varphi}(2k\pi)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0((2k+1)\pi)|^2 |\widehat{\varphi}((2k+1)\pi)|^2 = 1$$

Mais on a démontré déjà que:

$$m_0((2p+1)\pi) = m_0(\pi) = 0$$

et:

$$\widehat{\varphi}(2p\pi) = 0 \quad (\forall) p \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Donc:

$$|m_0(0)|^2 |\widehat{\varphi}(0)|^2 = 1 \Rightarrow |\widehat{\varphi}(0)|^2 = 1$$

On a démontré ainsi ii) aussi.

Remarques

A) On peut démontrer aussi que:

$$\widehat{\varphi}^{(k)}(2p\pi) = 0 \quad k = \overline{1, r}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Démonstration

On a:

$$m_0^{(k)}(\pi) = 0, \quad k = \overline{0, r}$$

Nous avons aussi:

$$\widehat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega) \widehat{\varphi}(\omega)$$

Donc:

$$2\widehat{\varphi}'(2\omega) = m_0'(\omega) \widehat{\varphi}(\omega) + m_0(\omega) \widehat{\varphi}'(\omega)$$

Pour:

$$\omega = \pi$$

on obtient:

$$2\hat{\varphi}'(2\pi) = m_0'(\pi)\hat{\varphi}(\pi) + m_0(\pi)\hat{\varphi}'(\pi) = 0$$

On a démontré que:

$$\hat{\varphi}'(2\pi) = 0$$

Pour:

$$\omega = 2\pi$$

on obtient:

$$2\hat{\varphi}'(4\pi) = m_0'(2\pi)\hat{\varphi}(2\pi) + m_0(2\pi)\hat{\varphi}'(2\pi)$$

Donc:

$$\hat{\varphi}'(4\pi) = 0$$

Par récurrence on peut démontrer que:

$$\hat{\varphi}'(2p\pi) = 0 \quad (\forall) p \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

On peut continuer avec les dérivés d'ordre supérieur.

B) On peut démontrer que les polynômes d'ordre inférieur ou égal à r sont dans V_0 .

Démonstration

La transformée de Fourier par rapport à la variable y de la fonction $\varphi(x-y)$ est:

$$\varphi(x-y) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) e^{-i\xi y} dy$$

En faisant le changement de variable:

$$x-y = Y$$

on obtient:

$$\varphi(x-y) \leftrightarrow - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(Y) e^{-i\xi(x-Y)} dY = e^{-i\xi x} \hat{\varphi}(-\xi)$$

Après l'échantillonnage avec pas égal à 1 par rapport à la variable y de la fonction $\varphi(x-y)$ on obtient la suite des fonctions $\varphi(x-k)$ $k \in \mathbb{Z}$. En utilisant la formule sommatoire de Poisson on obtient:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(-2p\pi) e^{-i2px}$$

Mais:

$$\hat{\varphi}(-2p\pi) = 0 \quad \text{pour } p \neq 0$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) = \hat{\varphi}(0)$$

Mais:

$$\hat{\varphi}(0) = 1$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) = 1$$

La somme $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x-k)$ est une combinaison linéaire des éléments de la base de V_0 . On peut dire que les polynômes d'ordre 0 sont dans V_0 . La transformée de Fourier par rapport à la variable y de la fonction $y\varphi(x-y)$ est:

$$y\varphi(x-y) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(x-y)e^{-i\xi y} dy = i \frac{d}{d\xi} \left(e^{-ix\xi} \hat{\varphi}(-\xi) \right) = xe^{-ix\xi} \hat{\varphi}(-\xi) = -ie^{-ix\xi} \hat{\varphi}'(-\xi)$$

Après l'échantillonnage avec pas égal à 1 par rapport à la variable y de la fonction $y\varphi(x-y)$ on obtient la suite $k\varphi(x-k)$. En utilisant la formule sommatoire de Poisson on obtient:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k\varphi(x-k)e^{-ik\omega} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[x\hat{\varphi}(-\xi-2p\pi)e^{-i(\xi+2p\pi)x} - ie^{-i2p\pi x} \hat{\varphi}'(-2p\pi) \right]$$

Pour:

$$\omega = 0$$

on peut écrire:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k\varphi(x-k) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[x\hat{\varphi}(-2p\pi)e^{-2p\pi x} - ie^{-i2p\pi x} \hat{\varphi}'(-2p\pi) \right]$$

Mais:

$$\hat{\varphi}(-2p\pi) = 0 \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Donc:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k\varphi(x-k) = x\hat{\varphi}(0) - i\hat{\varphi}'(0)$$

On a démontré ainsi que les polynômes de premier degré sont en V_0 . On peut continuer par récurrence.

La relation (3.2.1) nous permet d'écrire:

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^N P(\omega) \quad (3.2.2)$$

La régularité d'ondelette est donnée par le facteur:

$$\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^N$$

Pour $N=1$ on obtient le filtre avec la réponse en fréquence:

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right) \leftrightarrow m_{0k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k=0,1 \\ 0, & k \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Donc:

$$\left(\frac{1}{2} \right) \varphi\left(\frac{x}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \varphi(x) + \left(\frac{1}{2} \right) \varphi(x-1)$$

Cette relation est vérifiée par la fonction d'échelle correspondante à la base de Haar:

$$\varphi(x) = 1_{[0,1]}(x)$$

Pour $N=2$, on obtient:

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{4}e^{-2i\omega}$$

Donc:

$$m_{0_k} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 1, 2 \\ 0, & k \in \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

et:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(x-2)$$

Cette équation est vérifiée par la fonction présentée dans la figure 3.2.2.

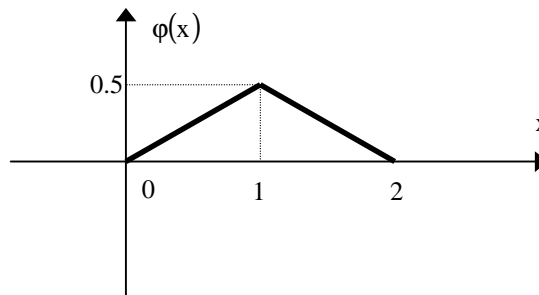


Figure 3.2.2. La fonction d'échelle de cet exemple.

On peut observer la ressemblance avec la fonction d'échelle correspondante à la base des fonctions "splines" d'ordre 1. On peut donc dire que pour:

$$P(\omega) = 1$$

on obtient la généralisation des fonctions d'échelle correspondantes aux bases orthonormées avec des fonctions "splines". On cherche maintenant les fonctions $m_0(\omega)$ qui correspondent aux filtres à réponses impulsionnelle finies. D'après la relation (3.2.2) on peut écrire:

$$[m_0(\omega)]^2 = \left| \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^N \right|^2 |P(e^{-i\omega})|^2 = \left| \frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right|^{2N} |P(e^{-i\omega})|^2$$

Mais:

$$\left| \frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right| = \left| \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}} \left(e^{i\frac{\omega}{2}} + e^{-i\frac{\omega}{2}} \right)}{2} \right| = |\cos(\omega)|$$

Donc:

$$\left| \frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right|^2 = |\cos^2 \omega| = \left| \frac{1+\cos \omega}{2} \right|$$

et:

$$|m_0(\omega)|^2 = \left(\frac{1+\cos \omega}{2}\right)^N |P(e^{-i\omega})|^2 \quad (3.2.4)$$

Les conditions pour les filtres avec la réponse en fréquence $m_0(\omega)$ sont:

$$m_0(0)=1 \text{ et } m_0(\pi)=0$$

Ces conditions sont satisfaites par les polynômes de la forme:

$$|m_0(\omega)|^2 = \frac{1+\cos \omega}{2} + \alpha_1 \left(\frac{1+\cos \omega}{2}\right) \left(\frac{1-\cos \omega}{2}\right) \cos \omega + \dots + \alpha_n \left(\frac{1+\cos \omega}{2}\right)^n \left(\frac{1-\cos \omega}{2}\right)^n \cos \omega + \dots \quad (3.2.5)$$

La suite $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$ doit être tel que:

$$0 \leq |m_0(\omega)|^2$$

En effet la condition $m_0(0)=1$ est satisfaite parce que:

$$\left.\frac{1+\cos \omega}{2}\right|_{\omega=0} = 1$$

et les autres termes s'annulent parce que:

$$\left.\frac{1-\cos \omega}{2}\right|_{\omega=0} = 0$$

et la condition $m_0(\pi)=0$ est aussi satisfaite parce que:

$$\left.\frac{1+\cos \omega}{2}\right|_{\omega=\pi} = 0$$

Alors on a:

$$\begin{aligned} |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 &= \frac{1+\cos \omega}{2} + \alpha_1 \left(\frac{1+\cos \omega}{2}\right) \left(\frac{1-\cos \omega}{2}\right) \cos \omega + \dots + \alpha_n \left(\frac{1+\cos \omega}{2}\right)^n \left(\frac{1-\cos \omega}{2}\right)^n \cos \omega + \\ &+ \frac{1-\cos \omega}{2} - \alpha_1 \left(\frac{1-\cos \omega}{2}\right) \left(\frac{1+\cos \omega}{2}\right) \cos \omega - \dots - \alpha_n \left(\frac{1-\cos \omega}{2}\right)^n \left(\frac{1+\cos \omega}{2}\right)^n \cos \omega = 1 \end{aligned}$$

Donc la condition:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 = 1$$

est aussi vérifiée.

3.2.1. Exemples

1. Pour $\alpha_k = 0 \quad k \in \mathbb{Z}^+$ on obtient:

$$|m_0(\omega)|^2 = \frac{1+\cos \omega}{2}$$

Mais:

$$|m_0(\omega)|^2 = m_0(\omega)m_0(-\omega)$$

Donc:

$$m_0(\omega)m_0(-\omega) = \frac{1 + \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{i\omega} + e^{-i\omega})$$

Soit:

$$m_0(\omega) = \alpha + \beta e^{-i\omega} \Rightarrow m_0(-\omega) = \alpha + \beta e^{i\omega} \Rightarrow |m_0(\omega)|^2 = (\alpha + \beta e^{-i\omega})(\alpha + \beta e^{i\omega}) = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta(e^{i\omega} + e^{-i\omega})$$

Par identification on obtient:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} \\ \alpha\beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont:

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}$$

Donc:

$$m_0(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2}$$

On a obtenu le filtre associe à la fonction d'échelle correspondante à la base de Haar.

2. Soit:

$$X = \frac{1 + \cos \omega}{2}$$

On obtient le polynôme:

$$P(X) = X(1 + \alpha_1(1-X)(2X-1)) + \alpha_2(1-X)^2(2X-1) + \alpha_2(1-X)^2(2X-1)X + \dots + \alpha_n X^{n-1}(1-X)^n(2X-1) + \dots$$

parce que :

$$\cos \omega = 2X - 1$$

et:

$$\frac{1 - \cos \omega}{2} = 1 - X$$

Pour $\alpha_1 = 1$ on obtient:

$$P(X) = X^2(3 - 2X + \alpha_2(1-X)^2(2X-1) + \dots + \alpha_n X^{n-2}(1-X)^n(2X-1))$$

Soit:

$$m_0(\omega) = \alpha + \beta e^{-i\omega} \Rightarrow m_0(-\omega) = \alpha + \beta e^{i\omega} \Rightarrow |m_0(\omega)|^2 = (\alpha + \beta e^{-i\omega})(\alpha + \beta e^{i\omega}) = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta(e^{i\omega} + e^{-i\omega})$$

Par identification on obtient:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} \\ \alpha\beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont:

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}$$

Donc:

$$m_0(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2}$$

On a obtenu le filtre associe à la fonction d'échelle correspondante à la base de Haar.

2. Soit:

$$X = \frac{1 + \cos \omega}{2}$$

On obtient le polynôme:

$$P(X) = X(1 + \alpha_1(1-X)(2X-1)) + \alpha_2(1-X)^2(2X-1) + \alpha_2(1-X)^2(2X-1)X + \dots + \alpha_n X^{n-1}(1-X)^n(2X-1) + \dots$$

parce que :

$$\cos \omega = 2X - 1$$

et:

$$\frac{1 - \cos \omega}{2} = 1 - X$$

Pour $\alpha_1 = 1$ on obtient:

$$P(X) = X^2 \left(3 - 2X + \alpha_2(1-X)^2(2X-1) + \dots + \alpha_n X^{n-2}(1-X)^n(2X-1) \right) \quad (3.2.1.1)$$

Pour $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ on obtient:

$$P(X) = X^2(3 - 2X)$$

Il s'agit d'une ondelette à deux moments nuls. Cette ondelette mère est nommée Daubechies 2 (DAU2).

On a:

$$|m_0(\omega)|^2 = \left(\frac{1 + \cos \omega}{2} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{1 + \cos \omega}{2} \right) = \left(\frac{1 + \cos \omega}{2} \right)^2 (2 - \cos \omega)$$

ou:

$$|m_0(\omega)|^2 = \left(\frac{1 + \cos \omega}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos \omega}{2} \right) (2 - \cos \omega)$$

Soit:

$$|{}_1 m_0(\omega)|^2 = \frac{1 + \cos \omega}{2} = |{}_2 m_0(\omega)|^2 \text{ et } |{}_3 m_0(\omega)|^2 = 2 - \cos \omega$$

Donc:

$$|m_0(\omega)|^2 = |{}_1 m_0(\omega)|^2 |{}_2 m_0(\omega)|^2 |{}_3 m_0(\omega)|^2$$

ou:

$$m_0(\omega) = {}_1m_0(\omega) {}_2m_0(\omega) {}_3m_0(\omega)$$

Nous pouvons choisir (comme on a procédé dans l'exemple antérieur) :

$${}_1m_0(\omega) = {}_2m_0(\omega) = \frac{1+e^{-i\omega}}{2}$$

Ainsi:

$$|{}_3m_0(\omega)|^2 = {}_3m_0(\omega) {}_3m_0(-\omega) = 2 - \cos \omega$$

Soit:

$${}_3m_0(\omega) = \alpha + \beta e^{-i\omega}$$

Alors:

$${}_3m_0(-\omega) = \alpha + \beta e^{i\omega}$$

et:

$${}_3m_0(\omega) {}_3m_0(-\omega) = \alpha^2 + \alpha\beta(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + \beta^2 = 2 - \cos \omega$$

Donc:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 2 \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Les solutions sont:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Donc:

$${}_3m_0(\omega) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} e^{-i\omega} \leftrightarrow {}_3m_0[n] = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{2}, & n=0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}, & n=1 \\ 0, & \text{en reste} \end{cases}$$

On a obtenu ainsi:

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right) \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} e^{-i\omega} \right)$$

Mais:

$$\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \leftrightarrow {}_1m_{0n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=0 \\ \frac{1}{2}, & n=1 \\ 0, & \text{en rest} \end{cases}$$

Donc:

$$\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^2 \leftrightarrow {}_1m_0[n] * {}_2m_0[n] = {}_1m_0[n] * {}_1m_0[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n=0 \\ \frac{1}{2}, & n=1 \\ \frac{1}{4}, & n=2 \\ 0, & \text{en reste} \end{cases}$$

On peut donc écrire:

$$m_0(\omega) \leftrightarrow m_0[n] \stackrel{*}{=} m_0[n] \stackrel{*}{=} m_0[n] \stackrel{*}{=} m_0[n] = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{8}, & n=0 \\ \frac{3+\sqrt{3}}{8}, & n=1 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{8}, & n=2 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{8}, & n=3 \\ 0, & \text{en reste} \end{cases}$$

Donc le filtre à réponse impulsionnelle $m_0[n]$ a 4 coefficients. D'ici vient la dénomination DAU4, qui est aussi utilisée (par exemple dans la boîte à outils WaveLab du logiciel Matlab).

Remarque

On peut continuer par récurrence. Pour obtenir dans la relation (3.2.1.1) comme facteur commun est nécessaire que le terme libre (le terme de degré 0) du polynôme: $3-2X+\alpha_2(1-X)^2(2X-1)$ soit nulle. Donc:

$$3-\alpha_2=0$$

Pour $\alpha_2=3$ et $\alpha_3=\alpha_4=\dots=0$ on obtient le polynôme:

$$P(X)=X^2(3-2X+3(1-X)^2(2X-1))$$

ou:

$$P(X)=X^3(10-5X+6X^2)$$

Donc:

$$|m_0(\omega)|^2 = \left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^3 \left(10-15\frac{1+\cos\omega}{2}+6\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^2\right)$$

etc.

On peut obtenir ainsi toutes les filtres de Daubechies ou les filtres miroir en quadrature presque symétriques de Coifman.

3.2.2. La régularité des bases. Le problème du produit infini pour les filtres finis

On sait que la fonction d'échelle pour la base de Haar est:

$$\varphi(x) = 1_{[0,1]}(x) \leftrightarrow \tilde{\varphi}(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}$$

et que le filtre numérique correspondant a la réponse en fréquence:

$$m_0(\omega) = \frac{1+e^{-i\omega}}{2}; |m_0(\omega)|^2 = \frac{1+\cos\omega}{2}$$

On peut écrire:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1+e^{-i\frac{\omega}{2^j}}}{2} = e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} \quad (3.2.2.1)$$

ou:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1+\cos\frac{\omega}{2^j}}{2} = \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} \quad (3.2.2.2)$$

En utilisant la relation (3.2.2.1) on peut obtenir:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1+e^{-i\frac{\omega}{2^j}}}{2} \right)^N = e^{-iN\frac{\omega}{2}} \left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^N \quad (3.2.2.3)$$

Mais si on utilise la fonction d'échelle présentée dans l'exemple 2 alors il faut utiliser le produit infini:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos\frac{\omega}{2^j}}{2} \right)^2 \left(2-\cos\frac{\omega}{2^j} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos\frac{\omega}{2^j}}{2} \right)^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left(2-\cos\frac{\omega}{2^j} \right) = \left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^4 \prod_{j=1}^{\infty} \left(2-\cos\frac{\omega}{2^j} \right)$$

Le problème qui arrive est que le produit:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(2-\cos\frac{\omega}{2^j} \right)$$

n'est pas convergente pour toutes les valeurs de l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Par exemple le produit est divergent pour $\omega = \pi$ (c'est un produit de facteurs de magnitude supérieure à 1). Donc sa contribution à la fonction d'échelle n'est pas régulière.

La convergence de ce produit doit être considérée au sens des distributions.

Jusqu'à présent nous n'avons pas considéré que le cas des bases orthonormées engendrées par la fonction $\varphi(x)$. On a aussi les bases de Riesz duales engendrées par les fonctions $g(x)$ et $\Omega(x)$. Nous savons déjà que:

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \frac{\tilde{g}(\omega)}{m(\omega)}$$

et que:

$${}_g m_0(\omega) = {}_{\varphi} m_0(\omega) \frac{m(2\omega)}{m(\omega)}$$

Donc:

$$|{}_g m_0(\omega)| = |{}_{\varphi} m_0(\omega)| \left| \frac{m(2\omega)}{m(\omega)} \right|$$

Mais:

$$\left| \frac{m(2\omega)}{m(\omega)} \right| > 0 \quad (\forall) \omega \in \mathbb{R}$$

et:

$${}_g m_0(\pi) = {}_\varphi m_0(\pi) \frac{m(2\pi)}{m(\pi)}$$

On peut donc affirmer que les conditions pour ${}_g m_0(\omega)$ sont équivalentes aux conditions pour ${}_\varphi m_0(\omega)$, qui ont été déjà présentés. Nous avons déjà parlé de la convergence du produit infini:

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

Dans le chapitre suivant on trouvera la signification dans $l^2(\mathbb{Z})$ de cette chose.

Comme conclusion on peut affirmer que la construction d'une fonction d'échelle ou d'une ondelette mère reposent sur la connaissance des filtres à réponse en fréquence $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$. Pour déterminer les spectres de la fonction d'échelle et de l'ondelette mère correspondante on peut utiliser les relations:

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

et:

$$\tilde{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \tilde{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{j=2}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

En faisant la transformée de Fourier inverse on obtient les expressions de la fonction d'échelle et de l'ondelette mère. Malheureusement le calcul de ces produits est difficile. Donc est très difficile d'obtenir les expressions analytiques des fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$.

En revanche, on peut calculer facilement la transformée en ondelettes discrète d'un signal (en utilisant le système présenté à la figure 3.1.1.) parce que les expressions des réponses en fréquence $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$ sont très bien connues (pour chaque couple fonction d'échelle ondelette mère).

4. La décomposition de l'espace $l^2(\mathbb{Z})$

Le produit scalaire sur $l^2(\mathbb{Z})$ est défini par :

$$\langle u[n], v[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]v^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]v[n]$$

pour des suites réels.

Soit $h[k]$ la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique et:

$$m_0(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-ik\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_0[k]e^{-ik\omega}$$

son réponse en fréquence.

On considère que le filtre a la propriété:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

Par isométrie de Fourier on peut écrire aussi:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} m_0^2[k] = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |m_0(\omega)|^2 d\omega \right)^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m_0(\omega)m_0^*(\omega) d\omega \right)^2$$

On note par $\tau_{2k}m_0$ l'action de l'opérateur de retard avec $2k$ sur la suite $m_0 = \{m_0[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Par exemple pour $k=1$ on obtient τ_2m_0 qui représente la suite obtenue de la suite m_0 en retardant chaque élément avec 2 unités. Un exemple pour l'action de l'opérateur τ_2 est présenté dans la figure 4.1.

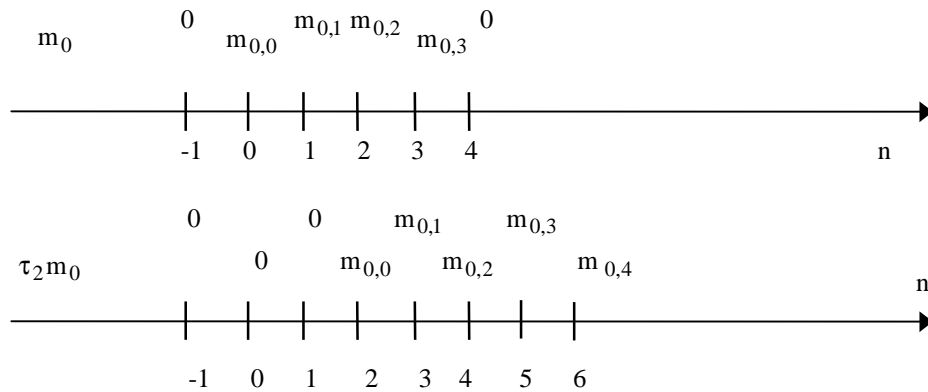


Figure 4.1. Un exemple d'action de l'opérateur τ_2 .

Dans ce cas on a:

$$\langle m_0, \tau_2 m_0 \rangle = m_{0,2}m_{0,0} + m_{0,3}m_{0,1}$$

Pour $k=-1$ on obtient $\tau_{-2}m_0$ Un exemple d'action de cet opérateur est présenté dans la figure 4.2. On obtient:

$$\langle m_0, \tau_{-2} m_0 \rangle = m_{0,2}m_{0,0} + m_{0,3}m_{0,1}$$

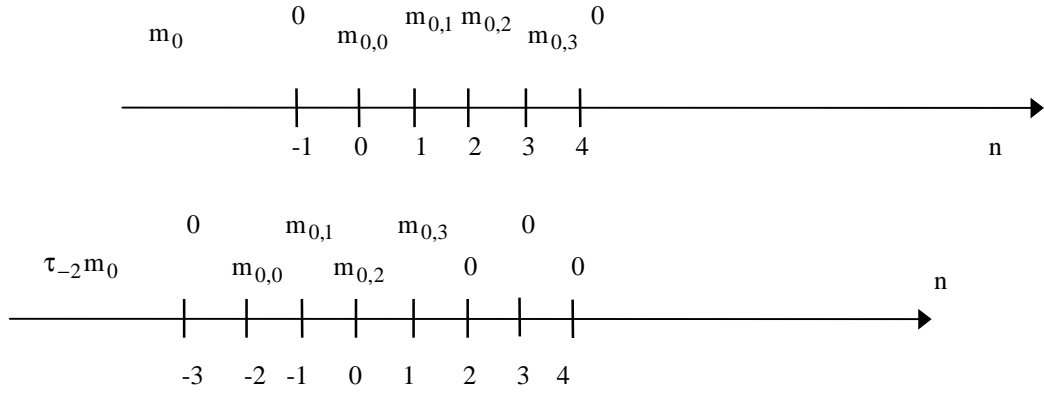


Figure 4.2. Un exemple de l'utilisation de l'opérateur τ_{-2} .

On calcule maintenant la fonction d'autocorrelation de la famille des suites $\{\tau_{2k}\sqrt{2}m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned} R_{\tau_{2k}m_0}[p] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_0[n-2k]m_0[n-2k+p]^{n-2k=2l} = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_0[2l]m_0[2l+p] = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_0[l]m_0[l+p] + \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l m_0[l]m_0[l+p] = R_{m_0[l]}[p] + R_{(-1)^l m_0[l]}[p] \end{aligned}$$

Mais:

$$R_{m_0[l]}[p] \leftrightarrow |m_0(\omega)|^2$$

et:

$$(-1)^l m_0[l] \leftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l m_0[l] e^{-i\omega l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-il\pi} m_0[l] e^{-i\omega l} = m_0(\omega + \pi)$$

Donc:

$$R_{\tau_{2k}m_0}[p] \leftrightarrow |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (4.1)$$

Soit l'espace vectoriel:

$$V_{-1} = \text{e.v.} \left\{ \sqrt{2} \tau_{2k} m_0 \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cap l^2(\mathbb{Z}) \quad (4.2)$$

Soit le filtre avec la réponse en fréquence:

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega} m_0^*(\omega + \pi) \leftrightarrow \{m_1[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} = m_1$$

Soit l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{\tau_{2k}\sqrt{2}m_1\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$W_{-1} = \text{e.v.} \left\{ \tau_{2k} \sqrt{2} m_1 \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cap l^2(\mathbb{Z}) \quad (4.3)$$

On observe que:

$$|m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 = 1$$

Donc:

$$R_{\tau_{2k}\sqrt{2}m_1}[p] \leftrightarrow 1 \quad (4.4)$$

Mais:

$$R_{\tau_{2k}\sqrt{2}m_1}[p] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_1[n-2k+p]m_1[n-2k] \leftrightarrow 1 \leftrightarrow \delta[p] \Rightarrow R_{\tau_{2k}\sqrt{2}m_1}[p] = \delta[p] \quad (4.5)$$

et:

$$\langle \tau_{2k_1} m, \tau_{2k_2} m \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m[n-2k_1] m[n-2k_2]^{k_2=k_1+r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_{n-2k_1} m_{n-2k_1-2r} = R_{\tau_{2k} \sqrt{2}m}[-2r]$$

En utilisant la relation (4.5) on peut écrire que:

$$\langle \tau_{2k_1} m, \tau_{2k_2} m \rangle = \begin{cases} 1, & k_1 = k_2 \\ 0, & k_1 \neq k_2 \end{cases} = \delta[k_1 - k_2]$$

Donc la famille $\{\tau_{2k} m\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. On a démontré ainsi que les ensembles: $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_1\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont orthonormés. Donc ce sont des bases orthonormées des espaces V_{-1} et W_{-1} . On calcule maintenant l'intercorrélation des suites $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_1\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned} R_{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0, \tau_{2k} \sqrt{2}m_1}[p] &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_0[n-2k+p] m_0[n-2k]^{n-2k=2l} = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_0[2l+p] m_1[2l] = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} m_0[l+p] m_1[l] + \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l m_0[l+p] m_1[l] \end{aligned}$$

Mais:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} m_0[l+p] m_1[l] = R_{m_0[l], m_1[l]}[p] \leftrightarrow m_0(\omega) m_1^*(\omega)$$

et:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l m_0[l+p] m_1[l] \leftrightarrow m_0(\omega + \pi) m_1^*(\omega + \pi)$$

Donc:

$$R_{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0, \tau_{2k} \sqrt{2}m_1} \leftrightarrow m_0(\omega) m_1^*(\omega) + m_0(\omega + \pi) m_1^*(\omega + \pi)$$

Mais:

$$\begin{aligned} m_0(\omega) m_1^*(\omega + \pi) + m_0(\omega + \pi) m_1^*(\omega + \pi) &= m_0(\omega) e^{i\omega} m_0(\omega + \pi) + m_0(\omega + \pi) e^{i(\omega + \pi)} m_0(\omega + \pi) = \\ &= m_0(\omega) e^{i\omega} m_0(\omega + \pi) - m_0(\omega) e^{i\omega} m_0(\omega + \pi) = 0 \quad (\forall) \omega \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc:

$$R_{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0, \tau_{2k} \sqrt{2}m_1} = 0$$

On a démontré ainsi que les ensembles $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_1\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont orthogonales.

Donc les espaces V_{-1} et W_{-1} sont orthogonaux et on peut écrire:

$$l^2(\mathbb{Z}) = V_{-1} \oplus W_{-1}$$

Soit $U_0 = \{u_0[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un élément de $l^2(\mathbb{Z})$. On calcule la projection de U_0 sur l'espace V_{-1} , $U_{-1} = \{u_{-1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$u_{-1}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle u_0[n], \tau_{2k} \sqrt{2}m_0[n] \rangle \tau_{2k} \sqrt{2}m_0[n]$$

Les coefficients de la projection sont : $\langle u_0[n], \tau_{2k} \sqrt{2}m_0 \rangle$

Soit deux éléments de l'espace $l^2(\mathbb{Z})$ u_n et v_{n-2k} . Leur produit scalaire peut s'exprimer dans la forme:

$$\langle u_n, v_{n-2k} \rangle = u[n]^* \tilde{v}[n]_{n=2k}$$

où:

$$\tilde{v}[n] = v[-n]$$

Démonstration

$$\langle u_n, v_{n-2k} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]v[n-2k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]\check{v}[2k-n] = u[2k]*\check{v}[2k] = u[n]*\check{v}[n]_{n=2k} \quad (\text{c.q.f.d})$$

Le système de projection des signaux de $l^2(\mathbb{Z})$ sur l'espace V_{-1} est présenté dans la figure 4.3. Le signal $u_0[n]$ peut être développé aussi dans la base $\{\delta[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$. Ses coefficients sont dans ce cas $\{u_0[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Donc à l'entrée du système de la figure 4.3. on a les coefficients de la décomposition du signal $u_0[n]$ dans la base $\{\delta[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et à sa sortie les coefficients de la décomposition de sa projection, le signal $u_{-1}[n]$, dans la base $\{\tau_{2k}\sqrt{2}m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ du V_{-1} .

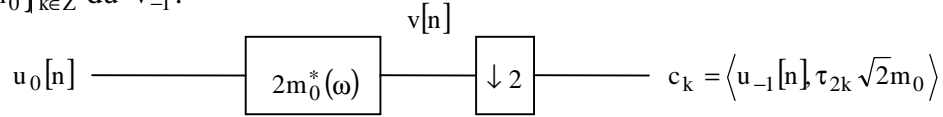


Figure 4.3. Le système de projection sur l'espace V_{-1} .

La transformée de Fourier à temps discret du signal $u_0[n]$ est :

$$U_0(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0[n]e^{-in\omega}$$

Donc:

$$v[n] \leftrightarrow 2U_0(\omega)m_0^*(\omega) = V(\omega)$$

$$c_k \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[V\left(\frac{\omega}{2}\right) + V\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right] = U_0\left(\frac{\omega}{2}\right)m_0^*\left(\frac{\omega}{2}\right) + U_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)m_0^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) = U_{-1}(\omega) \quad (4.6)$$

On peut calculer de la même manière la projection du U_0 sur l'espace W_{-1} , $D_{-1} = \{d_{-1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$D_{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle u_0[n], \tau_{2k}\sqrt{2}m_1[n] \rangle \tau_{2k}\sqrt{2}m_1 \quad (4.7)$$

Les coefficients $e_k = \langle u_0[n], \tau_{2k}\sqrt{2}m_1[n] \rangle$ peuvent être obtenus à l'aide des coefficients $\{u_0[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en utilisant le système présenté à la figure 4.4.

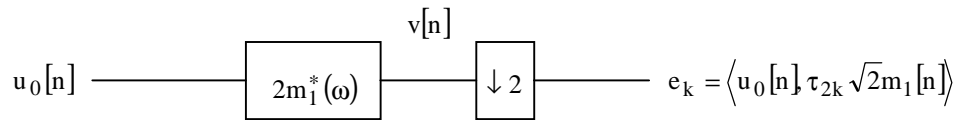


Figure 4.4. Le système de projection du signal $u_0[n]$ sur l'espace W_{-1} .

La relation fréquentielle correspondante est:

$$e_k \leftrightarrow D_{-1}(\Omega) = m_1^*\left(\frac{\Omega}{2}\right)U\left(\frac{\Omega}{2}\right) + m_1^*\left(\frac{\Omega}{2} + \pi\right)U\left(\frac{\Omega}{2} + \pi\right) \quad (4.8)$$

Donc le signal $u_0[n]$ peut être décomposé dans la somme:

$$u_0[n] = u_{-1}[n] + d_{-1}[n]$$

et les coefficients des développements des trois signaux dans les bases $\{\delta[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{\tau_{2k} \sqrt{2} m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tau_{2k} \sqrt{2} m_1\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont liés par le système présenté dans la figure 4.5.

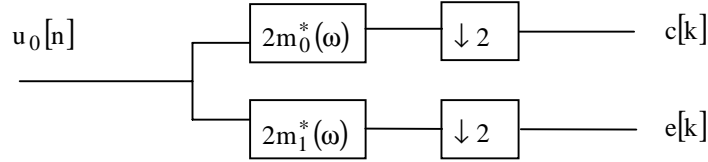


Figure 4.5. Système de décomposition du signal $u_0[n]$ dans ses composantes dans les espaces V_{-1} et W_{-1} .

Parce qu'il s'agit d'un codage en sous-bandes on peut obtenir une reconstruction parfaite en utilisant le système présenté dans la figure 4.6.

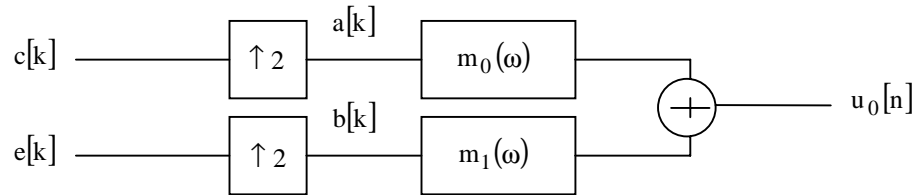


Figure 4.6. Le schéma de reconstruction du signal $u_0[n]$.

En effet en utilisant (4.6) et (4.8) on obtient:

$$a[k] \leftrightarrow m_0^*(\omega)U(\omega) + m_0^*(\omega + \pi)U(\omega + \pi)$$

$$b[k] \leftrightarrow m_1^*(\omega)U(\omega) + m_1^*(\omega + \pi)U(\omega + \pi)$$

Donc, à la sortie du système on a:

$$\begin{aligned} & m_0(\omega)[m_0^*(\omega)U(\omega) + m_0^*(\omega + \pi)U(\omega + \pi)] + m_1(\omega)[m_1^*(\omega)U(\omega) + m_1^*(\omega + \pi)U(\omega + \pi)] = \\ & = |m_0(\omega)|^2 U(\omega) + (m_0(\omega)m_0^*(\omega + \pi) + m_1(\omega)m_1^*(\omega + \pi))U(\omega + \pi) + |m_1(\omega)|^2 U(\omega) \end{aligned}$$

On a démontré déjà que:

$$m_0(\omega)m_0^*(\omega + \pi) + m_1(\omega)m_1^*(\omega + \pi) = 0$$

Donc la transformée de Fourier du signal à la sortie du système est égale à :

$$(|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2)U(\omega) = U(\omega)$$

La reconstruction parfaite est donc réalisée. On peut écrire:

$$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$$

Nous n'avons pas que d'itérer pour montrer que:

$$V_0 = l^2(\mathbb{Z}) = V_{-1} \oplus W_{-1} = V_{-2} \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} = \dots = V_{-J} \oplus W_{-J} \oplus \dots \oplus W_{-1}$$

On a obtenu ainsi la décomposition orthogonale de l'espace $l^2(\mathbb{Z})$.

5. La construction de la fonction d'échelle à l'aide du produit infini

Nous voulons construire la fonction d'échelle $\varphi(x)$ en utilisant la formule:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \quad (5.1)$$

où $m_0(\omega)$ est une fonction tel que:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad m_0(0) = 1, \quad m_0^{(k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, \overline{N}$$

Est-ce que l'ensemble $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ obtenu ainsi est une base orthonormée ?

Est-ce que la fonction $\varphi(x)$ est-elle régulière ?

Ce sont les questions dont la réponse est donnée dans ce chapitre.

Prenons l'exemple du filtre DAU2. Alors:

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^2 \left(\frac{a + b e^{-i\omega}}{a + b}\right)$$

On peut vérifier facilement que:

$$m_0(0) = 1; \quad m_0(\pi) = m_0'(\pi) = 0$$

On peut écrire aussi:

$$m_0(\omega) = m_{00} + m_{01}e^{-i\omega} + m_{02}e^{-2i\omega} + m_{03}e^{-3i\omega} \quad (5.2)$$

Les facteurs du produit de la relation (5.1) sont $m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$. Il faut trouver la signification

des fonctions $m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$. Pour $\omega \rightarrow \frac{\omega}{2}$, la relation (5.2) devienne:

$$m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sum_{k=0}^3 m_0[k] e^{-ik\frac{\omega}{2}} \quad (5.3)$$

Cette fonction est périodique de période 4π . On peut donc dire que le support de sa restriction à sa période principale est l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Pour $\omega \rightarrow \frac{\omega}{2^j}$ la relation (5.2) devienne:

$$m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = \sum_{k=0}^3 m_0[k] e^{-ik\frac{\omega}{2^j}} \quad (5.4)$$

Le support de la restriction de cette fonction à sa période principale est l'intervalle $[-2^j\pi, 2^j\pi]$.

On quitte maintenant l'exemple du filtre DAU2 pour établir quelques résultats plus générales.

Soit la fonction:

$$p(\omega) = m_0(\omega) \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}(\omega)$$

La fonction $p(\xi)$ est la transformée de Fourier d'une fonction $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. L'échantillonnage à pas unitaire de cette fonction donne la suite des échantillons $m_0[k]$.
Donc:

$$m_0[k] = f(k)$$

En utilisant le théorème W.K.S. on peut écrire:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_0[k] \frac{\sin[\pi(x-k)]}{\pi(x-k)}$$

Soit la fonction:

$$p_1(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) I_{[-2\pi, 2\pi]}(\omega)$$

La fonction $p_1(\xi)$ est la transformée de Fourier de la fonction:

$$f_1(x) = 2f(2x)$$

L'échantillonnage avec le pas $\frac{1}{2}$ de cette fonction donne les échantillons:

$$2f\left(2\frac{k}{2}\right) = 2f(k) = 2m_0[k]$$

On peut donc écrire:

$$f_1(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_0[k] \frac{\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{2}k\right)\right]}{2\pi\left(x - \frac{1}{2}k\right)}$$

Remarques

A. Si:

$$f(x) \in V_0^*$$

alors:

$$f_1(x) \in V_1^*$$

(voir la définition de l'analyse multirésolution).

B. On peut itérer la procédure présentée.

Soit:

$$p_j(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) I_{[-2^j\pi, 2^j\pi]}(\omega)$$

La fonction $p_j(\xi)$ est la transformée de Fourier de la fonction:

$$f_j(x) = 2^j f(2^j x)$$

L'échantillonnage avec le pas $\frac{1}{2^j}$ de cette fonction donne les échantillons:

$$2^j f\left(2^j \frac{k}{2^j}\right) = 2^j f(k) = 2^j m_0[k]$$

On peut donc écrire:

$$f_j(x) = 2^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_0[k] \frac{\sin \left[2^j \pi \left(x - \frac{k}{2^j} \right) \right]}{2^j \pi \left(x - \frac{k}{2^j} \right)}$$

Donc:

$$f_j(x) \in V_j^*$$

C. La remarque B donne la signification de la fonction $m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) 1_{[2^k \pi, 2^{j+1} \pi]}(\xi)$.

D. V_0^* est l'espace des fonctions à bande bornée $\{f | \widehat{f}(\xi) = 0, |\xi| > \pi\}$. On calcule maintenant le produit scalaire:

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(x-k) \rangle &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) \langle \widehat{f}(\xi), e^{-ik\xi} \widehat{f}(\xi) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{(2l-1)\pi}^{(2l+1)\pi} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \end{aligned}$$

Après le changement de variable:

$$\xi - 2l\pi \rightarrow \xi$$

on obtient:

$$\langle f(x), f(x-k) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(\xi - 2l\pi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi + 2l\pi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \right)$$

ou:

$$\langle f(x), f(x-k) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |p(\omega + 2l\pi)|^2 e^{ik\omega} d\omega = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega \quad (5.5)$$

On calcule maintenant le produit scalaire:

$$\begin{aligned} \langle f_1(x), f_1(x-k) \rangle &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) \langle \widehat{f}_1(\xi), e^{ik\xi} \widehat{f}_1(\xi) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \langle p_1(\xi), e^{ik\xi} \widehat{f}_1(\xi) \rangle = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} |p_1(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-2\pi}^{2\pi} |m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 e^{ik\xi} d\xi \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable:

$$\frac{\xi}{2} = v$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned} \langle f_1(x), f_1(x-k) \rangle &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) 2 \int_{-\pi}^{\pi} |m_0(v)|^2 e^{ik2v} dv = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) 2 \left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} |m_0(v)|^2 e^{i2kv} dv + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |m_0(v)|^2 e^{i2kv} dv + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |m_0(v)|^2 e^{i2kv} dv \right] \end{aligned}$$

Mais:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |m_0(v)|^2 e^{ik2v} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |m_0(\omega - \pi)|^2 e^{ik2(\omega - \pi)} d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |m_0(\omega + \pi)|^2 e^{ik2\omega} d\omega$$

et:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |m_0(v)|^2 e^{i2kv} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |m_0(\omega + \pi)|^2 e^{ik2\omega} d\omega$$

On obtient:

$$\langle f_1(x), f_1(x-k) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right) 2 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(|m_0(v)|^2 + |m_0(v+\pi)|^2 \right) e^{ik2v} dv \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ik2v} dv = \delta[2k]$$

Donc l'ensemble $\{f_1(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormé.

Remarque

- A. Parce que l'intégrale $\left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} |\sqrt{2}m_0(\omega)|^2 e^{ik2\omega} d\omega$ représente la transformée de Fourier à temps discrète de l'autocorrelation de la suite $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et parce que cette autocorrelation est égale à $\delta[2k]$ on peut affirmer qu'il s'agit d'un ensemble de suites orthonormé.
- B. On peut montrer aussi que l'ensemble $\{f_1(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base dans V_1^* .
- C. On peut montrer aussi que l'ensemble $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée.
- D. En itérant on peut obtenir des résultats ressemblants pour les ensembles $\{f_J(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et les espaces V_J^* . Tenant compte de la correspondance entre les bases $\{f(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\delta[n-k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ respectivement $\{f_1(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tau_{2k} \sqrt{2}m_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ on peut établir la base correspondante à la base $\{f_J(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.
- E. On peut montrer aussi que la transformée de Fourier de la fonction $f_J(x)$ pour $\xi = \omega$ est égale à:

$$\hat{f}_J(\omega) = \prod_{j=1}^J m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) 1_{[-2^j\pi, 2^j\pi]}(\omega)$$

Tenant compte de la remarque D on peut écrire:

$$\delta[k] = \langle f_J(x), f_J(x-k) \rangle$$

Mais:

$$\langle f_J(x), f_J(x-k) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \langle \hat{f}_J(\omega), \hat{f}_J^*(\omega) e^{i\omega k} \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-2^J\pi}^{2^J\pi} |\hat{f}_J(\omega)|^2 e^{i\omega k} d\omega$$

Tenant compte de la remarque E la dernière relation devienne:

$$2\pi\delta[k] = \int_{-2^J\pi}^{2^J\pi} \prod_{j=1}^J \left| m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right|^2 e^{i\omega k} d\omega$$

Par le changement de variable $v = 2^{-j}\omega$ on obtient:

$$2\pi\delta[k] = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^J |m_0(2^{J-j}v)|^2 1_{[-\pi, \pi]}(v) e^{i2^J vk} 2^J dv$$

ou:

$$2\pi\delta[k] = 2^J \int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{l=1}^{J-1} |m_0(2^l v)|^2 \right) |m_0(v)|^2 e^{i2^J vk} dv$$

Par le changement de variable:

$$\omega = 2v$$

on obtient:

$$\begin{aligned} 2\pi\delta[k] &= 2^{J-1} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\prod_{l=1}^{J-1} |m_0(2^{l-1}\omega)|^2 \right) 1_{[-\pi, \pi]}(\omega) e^{i2^{J-1}\omega k} d\omega = \\ &= 2^{J-1} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{l=0}^{J-2} |m_0(2^{l-1}\omega)|^2 e^{i2^{J-1}\omega k} d\omega \end{aligned}$$

Donc le produit considéré est borné. Mais:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{f}_n(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

On peut montrer qu'il existe un voisinage de 0 tel que $|\hat{\varphi}(\omega)|$ soit strictement positif sur ce voisinage. Donc il existe une constante C' tel que:

$$0 < C' < |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \text{ pour } -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Si $\omega \in [-2^J \pi, 2^J \pi]$ alors on utilise la formule:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{f}_n(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

Si $\omega \notin [-2^n \pi, 2^n \pi]$ alors $\hat{f}_n(\omega) = 0$. Donc:

$$|\hat{f}_n(\omega)| \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \right| \leq |\hat{\varphi}(\omega)|$$

On a démontré ainsi que pour chaque n et pour chaque ω :

$$|\hat{f}_n(\omega)| \leq \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|}{C'}$$

Donc la suite $\{\hat{f}_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ qui sont bornées en norme.

Cette suite converge conformément au théorème de convergence dominée de Lebesgue:

$$\|\hat{f}_n(\omega) - \hat{\varphi}(\omega)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x)$$

dans le sens des distributions tempérées.

On a démontré ainsi que l'ensemble $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0 .

6. Bases biorthogonales

Prenons de nouveau l'exemple du filtre DAU2. En utilisant la notation $X = \frac{1 + \cos \omega}{2}$ on obtient:

$$\text{DAU2}(X) = X^2(3 - 2X) = \left(\frac{1 + \cos \omega}{2}\right)^2 (2 - \cos \omega)$$

Mais:

$$\left(\frac{1 + \cos \omega}{2}\right)^2 = \left(\frac{2 + e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^2$$

et:

$$2 - \cos \omega = 2 - \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} = \frac{4 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2}$$

Donc:

$$|m_0(\omega)|^2 = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^2 \left(\frac{4 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2}\right)$$

Pour factoriser $|m_0(\omega)|^2$ on peut utiliser la formule:

$$|m_0(\omega)|^2 = m_0(\omega)m_0(-\omega)$$

Il faut déterminer les coefficients α et β tel que:

$$(\alpha + \beta e^{-i\omega})(\alpha + \beta e^{i\omega}) = \frac{4 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2}$$

On obtient:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 2 \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

avec les solutions:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \beta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc:

$$\frac{4 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-i\omega}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{i\omega}\right) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} e^{-i\omega}\right) \left(1 + \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} e^{i\omega}\right)$$

ou:

$$\frac{4 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} e^{-i\omega}\right) \left(1 + \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} e^{i\omega}\right)$$

En fin:

$$\frac{4 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} (1 - (2 - \sqrt{3}) e^{-i\omega}) (1 - (2 - \sqrt{3}) e^{i\omega})$$

Donc on obtient le filtre causal:

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^2 \left(1 - (2-\sqrt{3})e^{-i\omega} \right) \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \quad (6.1)$$

En général, le codage en sous-bandes est réalisé par le système présenté dans la figure 6.1.

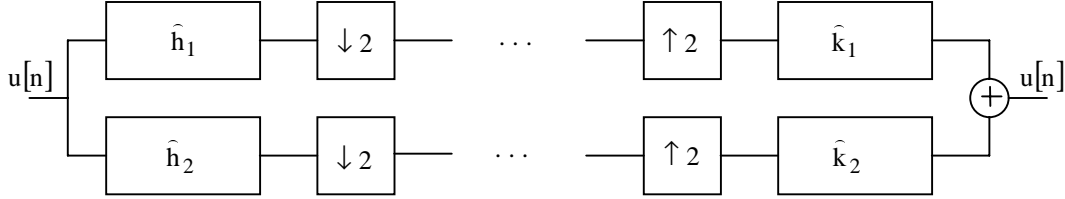


Figure 6.1. Le schéma d'un système de codage en sous-bandes, et de décodage.

Les conditions pour les filtres avec les réponses en fréquence $\hat{h}_1(\omega)$, $\hat{k}_1(\omega)$, $\hat{h}_2(\omega)$ et $\hat{k}_2(\omega)$ sont:

$$\hat{k}_1(\omega) = \hat{h}_2(\omega + \pi); \quad \hat{k}_2(\omega) = \hat{h}_1(\omega + \pi); \quad \hat{h}_1(\omega)\hat{h}_2(\omega + \pi) + \hat{h}_2(\omega)\hat{h}_1(\omega + \pi) = 2 \quad (6.2)$$

Soit:

$$\frac{1}{2} \hat{h}_1(\omega)\hat{h}_2(\omega + \pi) = P(\omega)$$

La dernière condition (6.2) devienne:

$$P(\omega) + P(\omega + \pi) = 1$$

On peut considérer que $P(\omega)$ est le polynôme qui engendre le filtre DAU2. Alors:

$$P(\omega) = \left(\frac{1+e^{i\omega}}{2} \right) \left(\frac{1-e^{-i\omega}}{2} \right) \left(\frac{1+e^{i\omega}}{2} \right) \left(\frac{1-e^{-i\omega}}{2} \right) \left(\frac{4-e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2} \right)$$

Considérons que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}_1(\omega) = \frac{1+e^{i\omega}}{2} \frac{1+e^{-i\omega}}{2}$$

et que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}_2(\omega + \pi) = \left(\frac{1+e^{i\omega}}{2} \right) \left(\frac{1-e^{-i\omega}}{2} \right) \left(\frac{4-e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2} \right)$$

ou:

$$\hat{h}_1(\omega) = \sqrt{2} \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega} + 2}{4}$$

et:

$$\hat{h}_2(\omega + \pi) = \sqrt{2} \frac{-e^{-2i\omega} + 2e^{-i\omega} + 2e^{i\omega} + 6 - e^{2i\omega}}{8}$$

d'où:

$$\hat{h}_2(\omega) = \sqrt{2} \frac{-e^{-2i\omega} - 2e^{-i\omega} - 2e^{i\omega} + 6 - e^{2i\omega}}{8}$$

Donc:

$$H_1 = \left\{ h_{-1}^1 = \frac{\sqrt{2}}{4}, h_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, h_1^1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

et:

$$H_2 = \left\{ h_{-2}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{8}, h_{-1}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}, h_0^2 = \frac{3}{4}, h_1^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}, h_2^2 = -\frac{\sqrt{2}}{8} \right\}$$

L'avantage de ce type de factorisation en comparaison avec la factorisation qui conduit à la relation (6.1) est qu'on obtient des filtres symétriques (les calculs sont plus faciles, il faut charger la mémoire seulement avec une moitié des coefficients) mais on perd la propriété d'orthogonalité. Dans ce cas le système de la figure 6.1. devienne celui-ci de la figure 6.2.

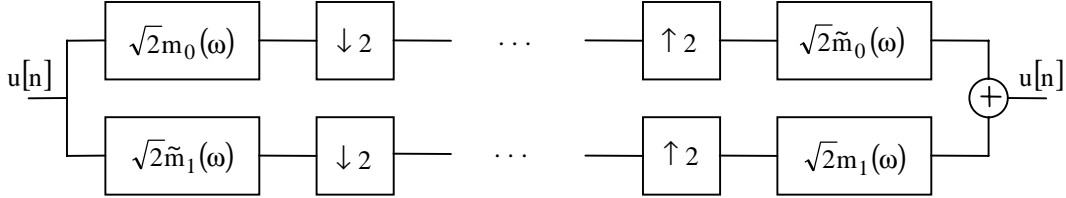


Figure 6.2. Le système de codage en sous-bandes et de décodage inspiré par les dernières relations.

La réponse en fréquence $m_1(\omega)$ est définie comme suite:

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega} (\tilde{m}_0(\omega + \pi))^* = e^{-i\omega} \tilde{m}_0^*(\omega + \pi)$$

et:

$$\tilde{m}_1(\omega) = e^{-i\omega} (m_0(\omega + \pi))^* = e^{-i\omega} m_0^*(\omega + \pi)$$

Si les fonctions $m_0(\xi)$ et $\tilde{m}_0^*(\xi)$ sont les transformées de Fourier des fonctions $a(x)$ et $\tilde{a}(x)$ alors:

$$\langle a(x), \tilde{a}(x-k) \rangle = \delta[k]$$

On peut maintenant parler de plusieurs espaces. A l'espace V_0 engendré par la base orthonormée $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ correspondent les espaces \tilde{V}_0 et W_0 engendrés par les bases orthonormées $\{\tilde{\varphi}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. De plus l'espace W_0 a aussi comme correspondent l'espace \tilde{W}_0 engendré par la base orthonormée $\{\tilde{\psi}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Les bases $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\varphi}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont biorthogonales:

$$\langle \varphi(x-k), \tilde{\varphi}(x-l) \rangle = \delta[k-l]$$

Les bases $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\psi}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont biorthogonales aussi:

$$\langle \psi(x-k), \tilde{\psi}(x-l) \rangle = \delta[k-l]$$

La projection sur V_0 parallèlement à \tilde{V}_0 d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ est:

$$f_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \tilde{\varphi}(x-k) \rangle \varphi(x-k)$$

parce que:

$$\begin{aligned} \langle f_0(x), \tilde{\varphi}(x-l) \rangle &= \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \tilde{\varphi}(x-k) \rangle \varphi(x-k), \tilde{\varphi}(x-l) \right\rangle = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \tilde{\varphi}(x-k) \rangle \langle \varphi(x-k), \tilde{\varphi}(x-l) \rangle = \langle f(x), \tilde{\varphi}(x-l) \rangle \end{aligned}$$

La projection sur \tilde{V}_0 parallèlement à V_0 d'une fonction f qui est en $L^2(\mathbb{R})$ est:

$$\tilde{f}_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \varphi(x-k) \rangle \tilde{\varphi}(x-k)$$

On peut écrire des relations pareilles pour les projections sur W_0 et \tilde{W}_0 . Pour obtenir les fonctions génératrices pour ces bases on peut utiliser les réponses en fréquence des filtres $m_0(\omega)$, $\tilde{m}_0(\omega)$, $m_1(\omega)$ et $\tilde{m}_1(\omega)$. Les relations sont:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right); \quad \tilde{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right); \quad \hat{\psi}(2\omega) = m_1(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \text{ et } \hat{\tilde{\psi}}(2\omega) = \tilde{m}_1(\omega)\hat{\tilde{\varphi}}(\omega)$$

On obtient aussi les relations:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x-1), \tilde{\psi}(x-k) \rangle &= 0 \\ \langle \varphi(x-1), \tilde{\psi}(2^j x - k) \rangle &= 0, \quad (\forall) j \geq 0 \\ \langle \tilde{\varphi}(x-1), \tilde{\psi}(2^j x - k) \rangle &= 0, \quad (\forall) j \geq 0 \end{aligned}$$

On obtient une analyse pareille à l'analyse multirésolution traditionnelle.

7. Dérivation et intégration dans les analyses multirésolution

Parce que:

$$\varphi(x) \leftrightarrow \hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

et:

$$\varphi'(x) \leftrightarrow -i\omega \hat{\varphi}(\omega)$$

on peut écrire:

$$\varphi'(x) \leftrightarrow -i\omega \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = \widehat{(\varphi')(\omega)}$$

Mais la forme générale de la réponse en fréquence $m_0(\omega)$ est:

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^N P(\omega)$$

Donc:

$$(\varphi')(\omega) = (-i\omega) \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1+e^{i\frac{\omega}{2^j}}}{2}\right)^N P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \quad (7.1)$$

On peut montrer que:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1+e^{i\frac{\omega}{2^j}}}{2}\right)^N = \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}\right)^N \quad (7.2)$$

C'est à la cause que pour $N=1$ on obtient pour la partie régulière de $m_0(\omega)$ l'expression

$\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$ (voir l'exemple de la fonction d'échelle qui conduit à la base de Haar) et que pour

$N=2$ on obtient pour la partie régulière de $m_0(\omega)$ l'expression $\left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$ (voir l'exemple

des fonctions constantes par morceaux). En utilisant la formule (7.1) la dernière relation devienne:

$$\begin{aligned} \widehat{(\varphi')(\omega)} &= (-i\omega) \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^N \prod_{j=1}^{\infty} P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = -2i \sin \frac{\omega}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{N-1} \prod_{j=1}^{\infty} P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \\ &= \left(e^{-i\frac{\omega}{2}} - e^{i\frac{\omega}{2}} \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}\right)^{N-1} \prod_{j=1}^{\infty} P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \end{aligned}$$

On peut observer que:

$$\widehat{(\varphi)}(\omega) = \left(e^{-i\frac{\omega}{2}} - e^{i\frac{\omega}{2}} \right) \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{i\frac{\omega}{2^j}}}{2} \right)^{N-1} P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \quad (7.3)$$

Donc $\widehat{(\varphi)}(\omega)$ a la forme de la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle. Soit:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{i\frac{\omega}{2^j}}}{2} \right)^{N-1} P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = \varphi_1(\omega)$$

On peut écrire:

$$\varphi_1(2\omega) = m_{01}(\omega)\varphi(\omega)$$

où:

$$m_{01}(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^{N-1} P(\omega)$$

et:

$$\widehat{(\varphi)}(\omega) = \left(e^{-i\frac{\omega}{2}} - e^{i\frac{\omega}{2}} \right) \varphi_1(\omega)$$

Donc on a obtenu, en dérivant, une nouvelle analyse multirésolution.

8. Paquets d'ondelettes

On présente dans la suite une nouvelle notion, celle de paquets de fonctions. Il y a deux catégories de telles paquets : les paquets d'ondelettes et les paquets en cosinus (ou les paquets d'ondelettes de Malvar).

8.1. Les ondelettes de Malvar

Une décomposition de type Malvar, du signal $x(t)$, sur l'intervalle $[0, T]$, associée à la partition $[0, T] = \cup_k I_k$ est:

$$x(\tau) = \sum_{m,k} c_{m,k} \Psi_{m,k}(\tau)$$

où:

$$I_k = [a_k, a_{k+1}]$$

et:

$$\Psi_{m,k}(\tau) = w_m(\tau) g_{m,k}(\tau) \quad (8.1.1)$$

Donc les ondelettes de type Malvar sont définies comme produits entre les fenêtres $w_m(\tau)$ et les atomes $g_{m,k}(\tau)$:

$$g_{m,k}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|I_m|}} \cos \frac{\pi}{|I_m|} \left(k + \frac{1}{2} \right) (\tau - a_m) \quad (8.1.2)$$

Les fenêtres sont définies comme suite:

$$w_m(\tau) = \begin{cases} b_m(\tau), & \tau \in [a_m - r, a_m + r] \\ 1, & \tau \in [a_m + r, a_{m+1} - r] \\ b_{m+1}(2a_{m+1} - \tau), & \tau \in [a_{m+1} - r, a_{m+1} + r] \end{cases} \quad (8.1.3)$$

où:

$$b_m(\tau) = \sin \left[\frac{\pi}{4} \left(1 + \sin \left(\frac{\pi (\tau - a_m)}{r} \right) \right) \right] \quad (8.1.4)$$

Quelques exemples d'ondelettes de type Malvar sont présentés dans la figure suivante. On a utilisé différents types de fenêtres, l'ondelette a été placée en différentes positions, l'atome a eu différentes fréquences fondamentales.

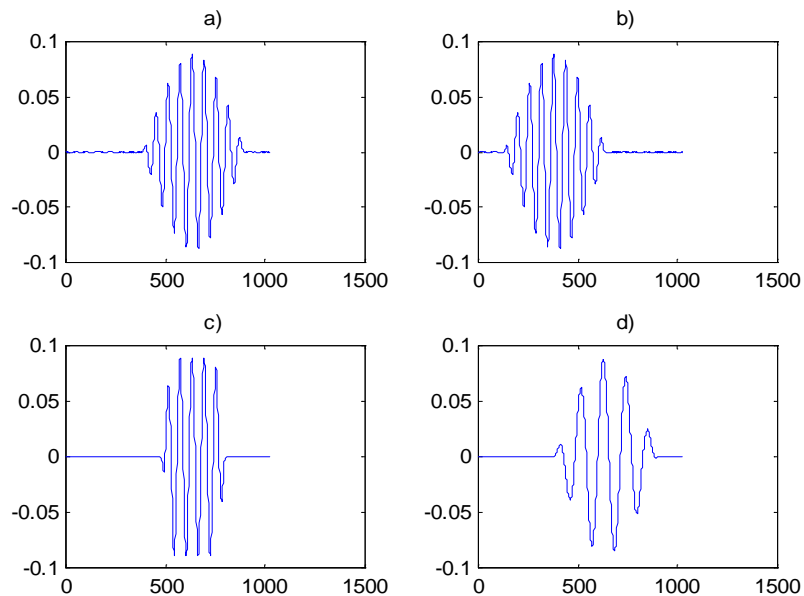


Figure 8.1. Quelques ondelettes de type Malvar a) on a utilisé une fenêtre presque d'un sinus; b) la même ondelette avancée en temps; c) une fenêtre plus rectangulaire; d) un atome de fréquence plus basse.

Les images présentées dans la figure 8.1. ont été obtenues en utilisant le programme suivant (WaveLab/Matlab):

```
x=MakeCosinePacket (2,2,8,'Sine',2,1024);    (la fabrication de l'ondelette de la
                                                figure a))
subplot(221);                                (la représentation graphique)
plot(x);
title('a')
y=MakeCosinePacket (2,1,8,'Sine',2,1024);    (la fabrication de l'ondelette de la
                                                figure b))
subplot(222);                                (sa représentation graphique)
plot(y);
title('b');
z=MakeCosinePacket (2,2,8,'Sine',4,1024);    (la fabrication de l'ondelette de la
                                                figure c))
```

```

subplot(223);
plot(z);
title('c');
u=MakeCosinePacket (2,2,4,'Sine',2,1024);
subplot(224);
plot(u);
title('d');

```

(sa représentation graphique)
(la fabrication de l'ondelette de la figure d))
(sa représentation graphique)

Soit U_m une suite d'opérateurs définis sur $L^2[a_m - r, a_m + r]$, qui transforment le signal $x(\tau)$ dans la suite de fonctions:

$$U_m \{x(\tau)\} = \begin{cases} b_m(\tau) x(\tau) + b_m(2a_m - \tau) x(2a_m - \tau), & \tau \in (a_m, a_m + r] \\ b_m(2a_m - \tau) x(\tau) - b_m(\tau) x(2a_m - \tau), & \tau \in [a_m - r, a_m] \end{cases} \quad (8.1.5)$$

On peut écrire:

$$U_m \{x(\tau)\} = \sum_k d_{m,k} \varphi_{m,k}(\tau) \quad (8.1.6)$$

où:

$$\varphi_{m,k}(\tau) = \chi_{I_m}(\tau) g_{m,k}(\tau) \quad (8.1.7)$$

On a noté par $\chi_{I_m}(\tau)$ la fonction caractéristique de l'intervalle I_m . $U_m \{x(\tau)\}$ représente le segment du signal $x(\tau)$ correspondent à l'intervalle I_m . L'intervalle $[0, T]$ est partagé comme suite:

$$\begin{aligned}
I_0^0 &= [0, T] \\
I_0^1 &= [0, T/2]; \quad I_1^1 = [T/2, T] \\
I_0^{11} &= [0, T/4]; \quad I_0^{12} = [T/4, T/2] \\
I_1^{11} &= [T/2, 3T/4]; \quad I_1^{12} = [3T/4, T] \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned} \quad (8.1.8)$$

On considère les ondelettes de type Malvar (obtenues en utilisant la relation (8.1.1) et la partition (8.1.8)). On peut réunir ces fonctions dans un paquet en cosinus.

8.2. Les paquets d'ondelettes

Une généralisation immédiate mais très utile de la notion d'ondelette ou de la notion d'analyse multirésolution est donnée par la notion de paquets d'ondelettes. Pour introduire cette notion est utile de faire la notation suivante:

$$m_e(\omega) = m_0^e(\omega) m_1^{1-e}(\omega), \quad e = 0,1$$

L'observation la plus importante qui se trouve à la base de l'édifice des paquets d'ondelettes est l'artifice de partage.

On suppose que l'ensemble de fonctions $\{f(\tau-k)\}_{k \in Z}$ est une base de Riesz de l'espace de Hilbert S . Alors les fonctions:

$$f_k^0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} f^0\left(\frac{\tau}{2} - k\right) \quad \text{et} \quad f_k^1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} f^1\left(\frac{\tau}{2} - k\right), \quad k \in Z \quad (8.2.1)$$

où:

$$\hat{f}^e(\omega) = m_e\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (8.2.2)$$

constituent une nouvelle base de Riesz de l'espace S :

$$\left\{ f_k^0(\tau), f_k^1(\tau) \right\}_{k \in Z}$$

Une analyse multirésolution classique est obtenue par le partage des espaces V_m , en utilisant l'artifice décrit plus haut. On obtient les espaces V_{m-1} et W_{m-1} . On peut continuer dans la même manière pour l'espace V_{m-1} .

Les paquets d'ondelettes sont les fonctions éléments des bases de Riesz obtenues quand on utilise l'artifice de partage pour les espaces W_m aussi. Commençant par l'espace V_m , on obtient, après l'application de L fois de l'algorithme de partage, les fonctions:

$$\psi_{e_1, \dots, e_L; m, k}^L(\tau) = 2^{-\frac{(m-L)}{2}} \psi_{e_1, \dots, e_L}^L(2^{m-L}\tau - k) \quad (8.2.3.)$$

(éléments des certaines bases de Riesz).

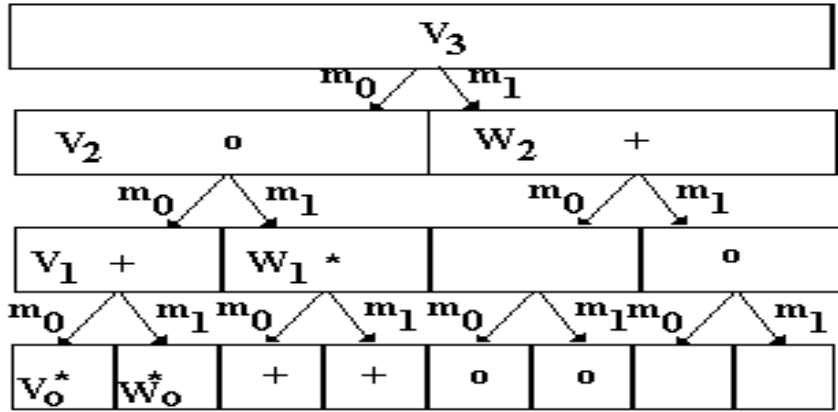


Figure 8.2.1. Schéma pour la génération des paquets d'ondelettes.

avec:

$$\hat{\psi}_{e_1, \dots, e_L}^L(\omega) = \prod_{l=1}^L m_{e_l}(2^{-l}\omega) \hat{\phi}(2^{-L}\omega) \quad (8.2.4)$$

Ainsi, après L itérations de l'algorithme de partage on obtient 2^L fonctions génératrices et leurs translatées, par des entiers multiples de 2^{L-m} , comme éléments de la base de Riesz de l'espace V_m . La liaison entre les paquets d'ondelettes et les fonctions d'échelle respectivement les fonctions ondelettes correspondantes est:

$$\varphi(\tau) = \psi_{\circ, \dots, \circ}^L(\tau) \quad \text{et} \quad \psi(\tau) = \psi_{1, \circ, \dots, \circ}^L(\tau)$$

En fait, il n'est pas nécessaire de partager chaque sous-espace pour chaque valeur du m . A la figure 8.2.1. est présentée une modalité de partage de l'espace V_3 qui correspond à un schéma de génération des paquets d'ondelettes. On a noté par * les espaces éléments d'une analyse multirésolution:

$$V_3 = V_{\circ} \oplus W_2 \oplus W_1 \oplus W_{\circ}$$

On a noté par \circ les espaces qui peuvent participer à la construction d'un paquet d'ondelettes. La base de Riesz de l'espace V_{\circ} qui correspond au paquet d'ondelettes considéré dans cet exemple est :

$$\left\{ \psi_{\circ}^1(4\tau - k), \psi_{1,1}^2(2\tau - k), \psi_{1,\circ,\circ}^3(\tau - k), \psi_{1,\circ,1}(\tau - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Un autre paquet d'ondelettes peut être construit si on utilise les fonctions marquées avec + dans la figure 8.2.1. La base de Riesz de l'espace V_3 correspondante pour ce nouveau paquet d'ondelettes est:

$$\left\{ \psi_1^1(4\tau - k), \psi_{1,\circ}^2(2\tau - k), \psi_{\circ,1,\circ}^3(\tau - k), \psi_{\circ,1,1}^3(\tau - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Pour les fonctions duales il faut appliquer une procédure similaire. Les transformées en ondelettes directe et inverse, correspondantes au paquet d'ondelettes présenté dans le premier exemple peuvent être vues dans la figure 8.2.2.

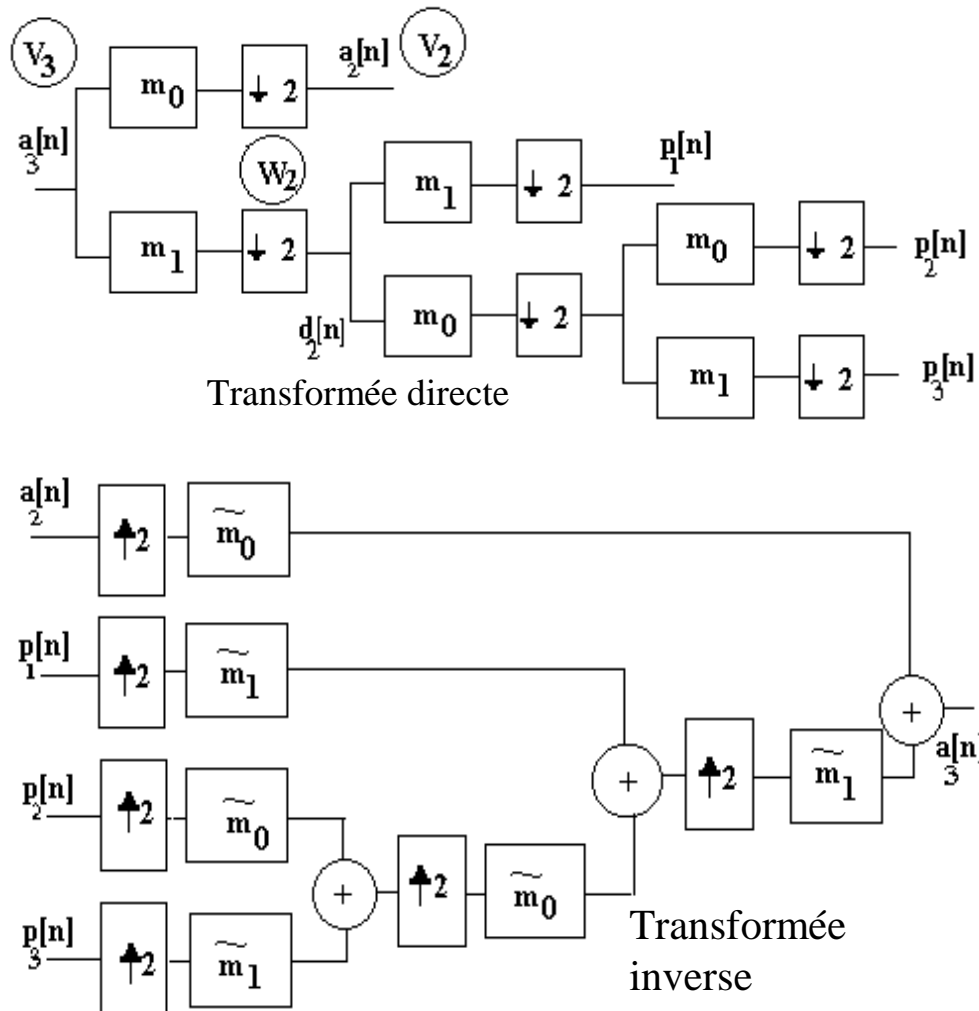


Figure 8.2.2. Les transformées en ondelettes discrètes directe et inverse correspondantes au premier exemple.

L'avantage principal des paquets d'ondelettes est que nous avons une liberté plus grande pour le choix de la base de décomposition du signal à traiter. Il y a des critères pour choisir la base en accord avec le signal à traiter. M. Wikerhauser a proposé un tel critère appelé "le choix de la meilleure base". Un exemple d'utilisation de ce critère est présenté dans la suite. Cet exemple est basé sur l'utilisation du programme suivant (WaveLab/Matlab):

```
x=makesignal('Bumps',512);
subplot(211);
plot(x);
title('signal a traiter');
D=4
```

**(la fabrication du signal à traiter)
(sa représentation graphique)**

```
qmf=makeonfilter('Daubechies',8);
wp=wpanalysis(x,D,qmf);
stree=calcstattree(wp,'Entropy');
[btree,vtree]=bestbasis(stree,D);
pkt=packbasiscoeff(btree,'wavelet',x);
subplot(212);
plotpackettable(wp);
```

**(on fixe le nombre de niveaux de
décomposition)
(l'analyse en paquets d'ondelettes)**

(le choix de la meilleure base)

**(la représentation graphique du
résultat de l'analyse)**

```
title('analyse en paquets');
```

Les résultats obtenus par l'utilisation du programme présenté plus haut sont présentés dans la figure suivante.

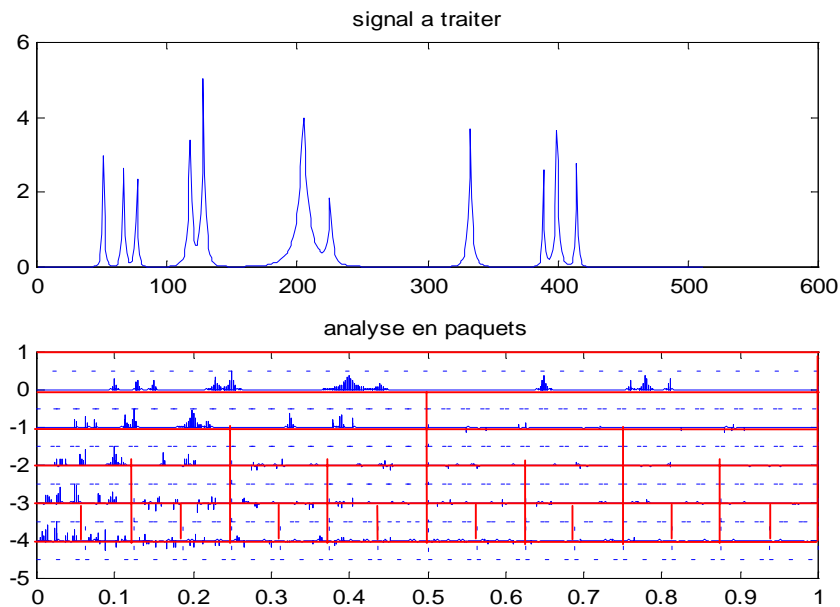


Figure 8.2.3. Exemple d'analyse en paquets d'ondelettes du signal Bumps.

8.2.1. Le choix de la meilleure base

Soit \mathcal{B} un ensemble de bases de l'espace Hilbert séparable X . On présente quelques propriétés utiles de l'ensemble \mathcal{B} :

- Le calcul rapide des produits scalaires avec les éléments des bases de \mathcal{B} ,
- Une bonne localisation en temps des éléments des bases de \mathcal{B} ,
- Une bonne localisation en fréquence des éléments des bases de \mathcal{B} ,
- Indépendance, tel qu'il n'y a pas beaucoup des éléments dans une base similaires à une certaine morceau du signal à analyser.

Pour choisir la meilleure base il est nécessaire d'apprécier en quelle mesure chaque base de \mathcal{B} a les propriétés énoncés plus haut. Avant de définir une représentation optimale il est nécessaire d'apprécier le coût d'enregistrement d'une certaine représentation. Nous appellerons ce coût, coût d'information. On peut associer à une séquence $u[k]$, une fonctionnelle de coût par:

$$M(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(|u[k]|), \quad \mu(0) = 0 \quad (8.2.1.1)$$

où μ est une fonction réelle définie sur $[0, \infty)$.

Pour chaque élément $x \in X$ on définit:

$$u[k] = \langle b_k, x \rangle$$

où b_k est le k -ième élément de la base B de \mathcal{B} .

Le coût d'information de la représentation du x dans la base B est $M(\langle b_k, x \rangle)$.

On a définit ainsi la fonctionnelle M_x sur \mathcal{B} :

$$M_x : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad B \rightarrow M(\langle b_k, x \rangle) \quad (8.2.1.2)$$

et on a obtenu le coût d'information M de x dans la base B . La meilleure base en \mathcal{B} pour le signal x , par rapport au coût d'information M , est la base B pour la quelle $M(\langle b_k, x \rangle)$ a une valeur minime. On présente dans la suite quelques fonctionnelles de coût d'information.

Exemple 1. Le nombre d'échantillons supérieurs à un certain seuil.

On fixe un seuil ε et on compte les éléments de la séquence $u[n]$ dont la valeur dépasse le seuil.

$$\mu(w) = \begin{cases} |w|, & |w| \geq \varepsilon \\ 0, & |w| < \varepsilon \end{cases}$$

Cette fonctionnelle est appelée en anglais "soft thresholding".

Exemple 2. La concentration dans l'espace l^p , $0 < p < 2$.

$$\mu(w) = |w|^P$$

$$M(u) = \|u\|_p^P$$

Exemple 3. L'entropie.

L'entropie de la séquence $u[n]$ est définie par:

$$E(u) = \sum_k p(k) \log \frac{1}{p(k)} \quad (8.2.1.3)$$

où:

$$p(k) = \frac{|u[k]|^2}{\|u[k]\|^2}; \quad p \log \frac{1}{p} = 0 \quad \text{si } p = 0 \quad (8.2.1.4)$$

La fonctionnelle:

$$I(u) = \sum_k |u[k]|^2 \log \frac{1}{|u[k]|^2} \quad (8.2.1.5)$$

est une fonctionnelle de coût d'information .

Exemple 4. Le logarithme de l'énergie.

$$M(u) = \sum_{k=1}^N \log |u[k]|^2$$

L'ensemble \mathcal{B} peut être appelé "bibliothèque" de bases. Si la bibliothèque est un arbre de "hauteur" finie L (il y a L niveaux de décomposition), alors la meilleure base pour un signal x peut être déterminée par le calcul du coût d'information dans chaque "nœud" de l'arbre et par la comparaison du nœud "enfant" avec le "nœud" parent, de bas en haut.

Ainsi chaque nœud est examiné deux fois, la première fois étant considéré comme nœud enfant et la deuxième fois comme nœud parent. Cet algorithme de recherche est exemplifié dans les figures suivantes. Dans la figure 8.2.1.1. ont été placés des nombres à l'intérieur des nœuds de l'arbre pour spécifier les coûts d'information. On marque par astérisque tous les nœuds appartenant au niveau bas. Leur coût d'information est égal à 28. On essaye la réduction de cette valeur. Chaque fois qu'un nœud parent a un coût d'information de valeur inférieure au coût total d'information de ses nœuds enfants cet nœud parent est marqué par un astérisque. Si le nœud parent a un coût d'information supérieur à celui de ses nœuds enfant alors celui-ci n'est pas marqué par un astérisque. On lui donne le coût total d'information de ses nœuds enfant. Dans la figure 8.2.1.2. ces coûts d'information transférés sont présentés entre parenthèses. Le résultat de la recherche de la meilleure base est présenté dans la figure 8.2.1.2. On constate qu'on a eu une réduction du coût d'information de la valeur 52 à la valeur 30.

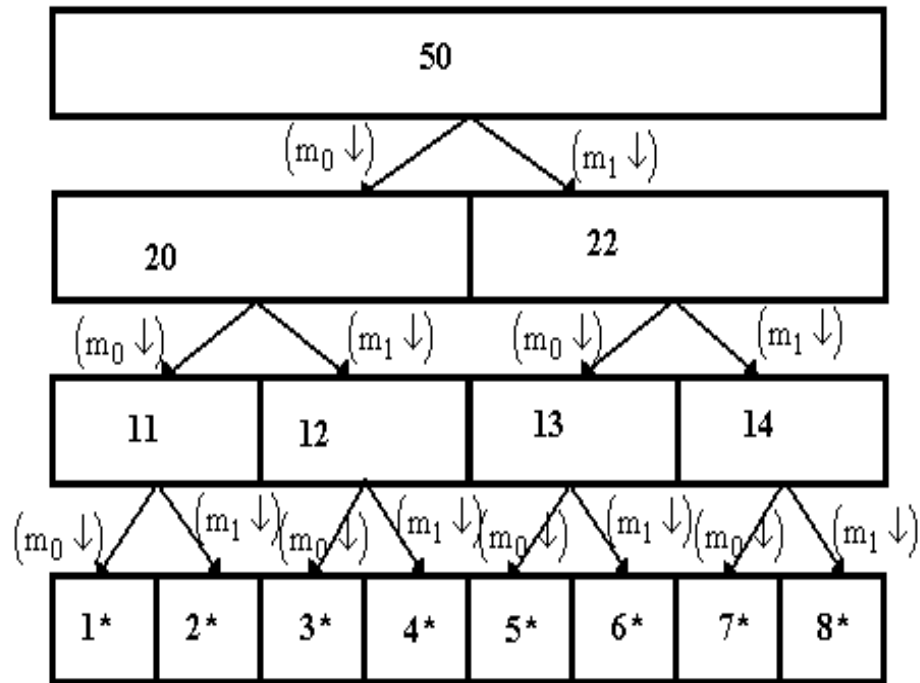


Figure 8.2.1.1 L'initialisation de l'algorithme de recherche de la meilleure base.

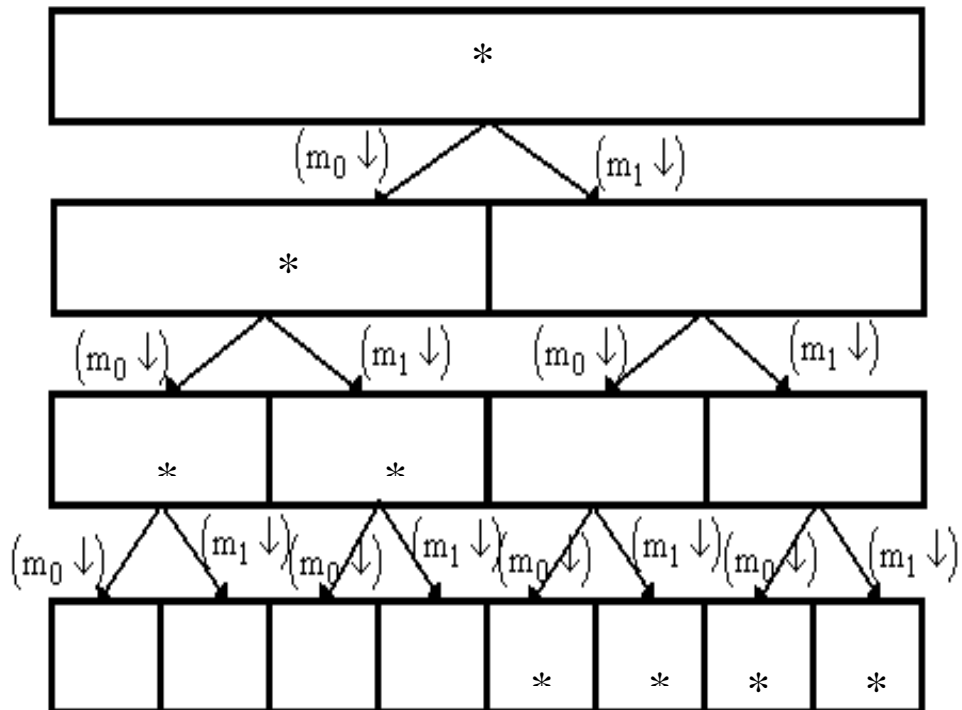


Figure 8.2.1.2. Le résultat de l'algorithme de recherche de la meilleure base.

On peut exemplifier les dernières choses présentées à l'aide du programme suivant (WaveLab/Matlab):

```
x=makesignal('Bumps',512);      (la fabrication du signal à traiter)
subplot(221);                    (sa représentation graphique)
plot(x);
title('signal a traiter');
[n,D]=dyadlength(x);            (l'analyse en paquets d'ondelettes de type
qmf=makeonfilter('Daubechies',8); DAU4)
wp=wpanalysis(x,D,qmf);
stree=calcstattree(wp,'Entropy'); (la construction de l'arbre de bases)
[btree,vtree]=bestbasis(stree,D); (le choix de la meilleure base en utilisant la
                                  fonctionnelle d'entropie)
                                  (la représentation graphique de l'arbre de
subplot(222);                    la meilleure base)
plotbasistree(btree,D,stree,'Bumps');
title('arbre meilleure base');
pkt=packbasiscoeff(btree,'wavelet',x); (la représentation graphique de l'analyse
subplot(223);                    en paquets d'ondelettes en utilisant la meilleure
plotpackettable(wp);              base)
title('analyse en paquets');
subplot(224);
imagephaseplane('WP',btree,wp,'Bumps',64,qmf); (la représentation du signal
title('le plan des phases, Bumps'); "Bumps" dans le plan temps-fréquence)
```

Les résultats obtenus en utilisant ce programme sont présentés dans la figure suivant.

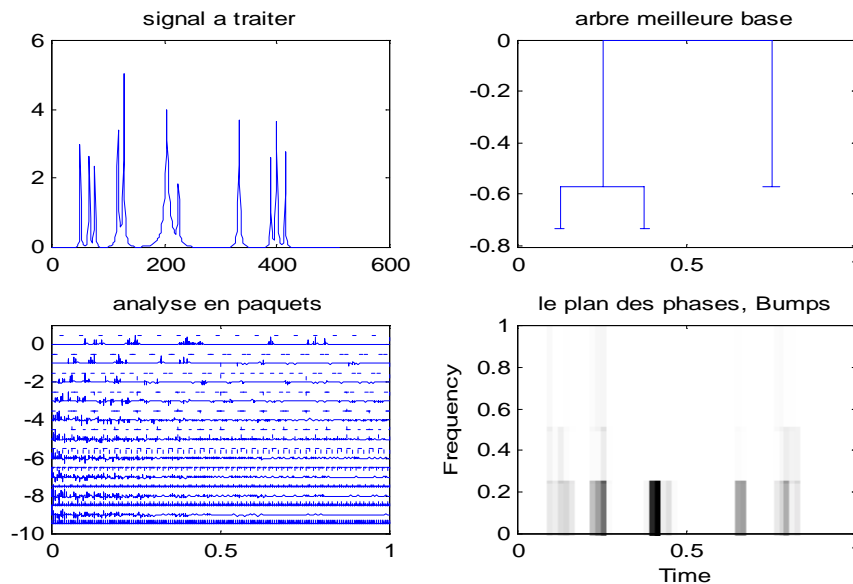


Figure 8.2.1.3. L'analyse temps-fréquence du signal "Bumps" effectuée à l'aide de la meilleure base choisie d'un paquet d'ondelettes de type DAU4, en utilisant la fonctionnelle d'entropie. On peut voir l'arbre de cette meilleure base et l'analyse multirésolution correspondante.

9. L'algorithme de Mallat pour les signaux d'image

La représentation orthogonale basée sur ondelettes peut être généraliser pour les signaux d'image. Une analyse multirésolution de l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ est générée à l'aide de la fonction d'échelle:

$$\varphi(\tau_1, \tau_2) = \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) \quad (9.1)$$

Les ondelettes mères attachées ont les expressions:

$$\begin{cases} \psi_1(\tau_1, \tau_2) = \varphi(\tau_1) \psi(\tau_2) \\ \psi_2(\tau_1, \tau_2) = \psi(\tau_1) \varphi(\tau_2) \\ \psi_3(\tau_1, \tau_2) = \psi(\tau_1) \psi(\tau_2) \end{cases} \quad (9.2)$$

où les fonctions $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ génèrent une analyse multirésolution orthogonale et la décomposition orthogonale correspondante.

L'ensemble :

$$\left\{ 2^{-m} \psi_1(\tau_1 - 2^{-m} p, \tau_2 - 2^{-m} n), 2^{-m} \psi_2(\tau_1 - 2^{-m} p, \tau_2 - 2^{-m} n), 2^{-m} \psi_3(\tau_1 - 2^{-m} p, \tau_2 - 2^{-m} n) \right\}_{(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3}$$

est une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$.

La fonction $\varphi(\tau)$ génère l'analyse multirésolution de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$.

La fonction $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ génère l'analyse multirésolution $\{ {}_2V_m \}_{m \in \mathbb{Z}}$ de l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$${}_2V_m = V_m \otimes V_m$$

On a noté avec \otimes le produit tensoriel. En notant par:

$$\varphi_m(\tau_1, \tau_2) = 2^{2m} \varphi(2^m \tau_1, 2^m \tau_2) \quad (9.3)$$

on peut affirmer que la famille de fonctions $\{ 2^{-m} \varphi_m(\tau_1 - 2^{-m} n, \tau_2 - 2^{-m} p) \}_{(m, p) \in \mathbb{Z}^2}$

est une base orthonormée de l'espace ${}_2V_m$. L'approximation du signal $x(\tau_1, \tau_2)$ de résolution m est caractérisée par les produits scalaires :

$$A_m x = \langle x(\tau_1, \tau_2), \varphi_m(\tau_1 - 2^{-m} n) \varphi_m(\tau_2 - 2^{-m} n) \rangle \quad (9.4)$$

Les différences entre les approximations $A_{m+1}x$ et $A_m x$ représentent les projections du signal $x(\tau_1, \tau_2)$ sur les espaces engendrés par les bases orthonormées:

$$\begin{aligned} & \left\{ 2^{-m} \psi_1(\tau_1 - 2^{-m} p, \tau_2 - 2^{-m} n) \right\}_{(n,p) \in Z^2} , \\ & \left\{ 2^{-m} \psi_2(\tau_1 - 2^{-m} p, \tau_2 - 2^{-m} n) \right\}_{(n,p) \in Z^2} \\ & \left\{ 2^{-m} \psi_3(\tau_1 - 2^{-m} p, \tau_2 - 2^{-m} n) \right\}_{(n,p) \in Z^2} . \end{aligned}$$

Ces différences sont données par les trois images de détail:

$$\begin{aligned} D_m^1 x &= \left\{ \left\langle x(\tau_1, \tau_2), \psi_1(\tau_1 - 2^{-m} n, \tau_2 - 2^{-m} p) \right\rangle \right\}_{(n,p) \in Z^2} \\ D_m^2 x &= \left\{ \left\langle x(\tau_1, \tau_2), \psi_2(\tau_1 - 2^{-m} n, \tau_2 - 2^{-m} p) \right\rangle \right\}_{(n,p) \in Z^2} \quad (9.5) \\ D_m^3 x &= \left\{ \left\langle x(\tau_1, \tau_2), \psi_3(\tau_1 - 2^{-m} n, \tau_2 - 2^{-m} p) \right\rangle \right\}_{(n,p) \in Z^2} \end{aligned}$$

La relation (9.2) montre que pour la génération des fonctions $\psi_k(\tau_1, \tau_2)$ $k=1,2,3$, on utilise les filtres avec les réponses en fréquence:

$$\begin{aligned} m_{01}(\omega_1, \omega_2) &= m_0(\omega_1) m_1(\omega_2) \\ m_{10}(\omega_1, \omega_2) &= m_1(\omega_1) m_0(\omega_2) \\ m_{11}(\omega_1, \omega_2) &= m_1(\omega_1) m_1(\omega_2) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Pour chaque $M > 0$, l'image $A_M x$ est complètement décrite par $3M+1$ images discrètes :

$$\left\{ A_{-M} x, D_m^1 x, D_m^2 x, D_m^3 x \right\}_{-M \leq m \leq -1}$$

La décomposition de la séquence $A_{m+1}x$ à l'aide des séquences $A_m x$, $D_m^1 x$ et $D_m^2 x$ est réalisée à l'aide du système de la figure 9.1.

La transformée inverse est présentée à la figure 9.2. Les systèmes présentés dans ces figures peuvent être utilisés à la décomposition d'une image à l'aide de l'algorithme de Mallat respectivement à la reconstruction parfaite de celle-ci.

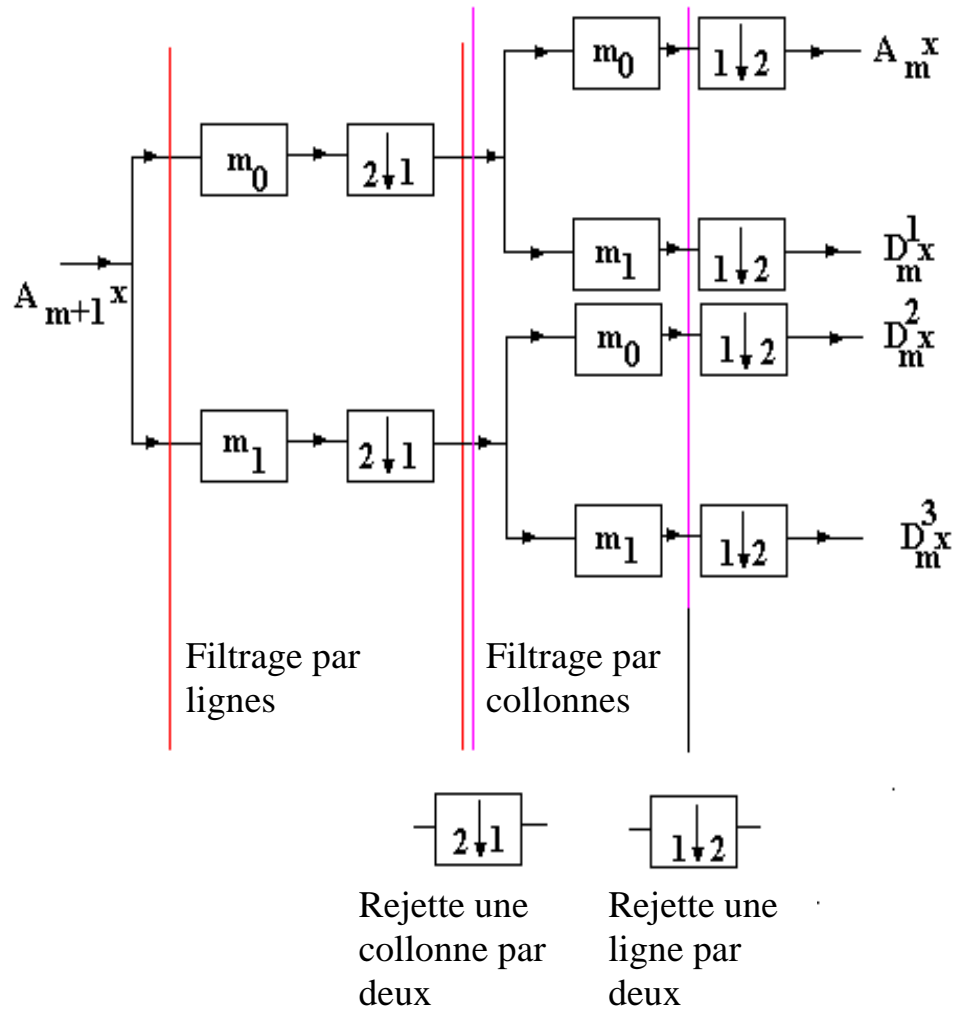


Figure 9.1. Système pour le calcul d'une itération de l'algorithme de Mallat pour les signaux d'images.

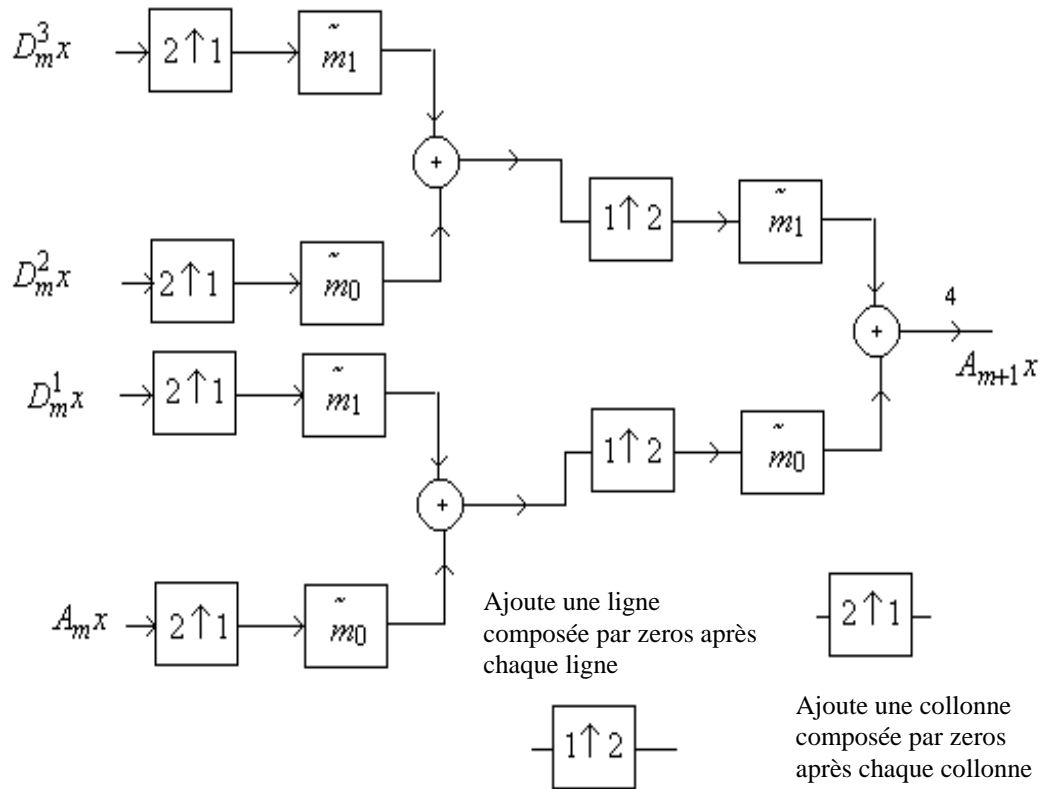


Figure 9.2. Système pour le calcul de la transformée en ondelettes inverse pour les signaux d'images. (Le cas d'une seule itération).

Un exemple d'application de l'algorithme de Mallat est présenté dans la figure suivante. Il s'agit de 3 itérations.

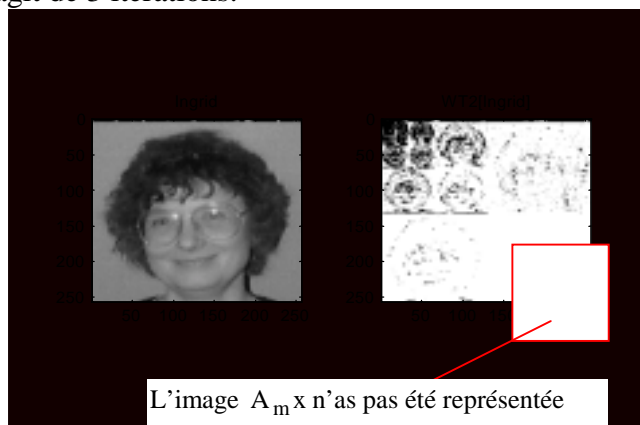


Figure 9.3. L'image originelle (gauche) et sa transformée en ondelettes (droite).

10. Quelques applications

On présente dans la suite quelques applications de la théorie des ondelettes dans le domaine du traitement du signal. Il s'agit de l'augmentation du rapport signal/bruit et de la compression.

10.1. L'augmentation du rapport signal/bruit

L'augmentation du rapport signal/bruit est une opération de base en télécommunications. La transformée en ondelettes discrète peut être utilisée pour l'augmentation du rapport signal/bruit quand il s'agit de perturbations additives. On peut utiliser à ce but la méthode proposée par David Donoho, qui a trois étapes:

1. on calcule la transformée en ondelettes directe du signal observé (la somme d'un signal utile et un bruit),
2. on filtre le résultat,
3. on calcule la transformée en ondelettes inverse.

Cette méthode fonctionne due à la propriété de decorrelation de la transformée en ondelettes discrète. Grâce à cette propriété pour un bruit d'entrée de nature quelconque le bruit dans le domaine de la transformée en ondelettes tend vers un bruit blanc. On a beaucoup de méthodes à la disposition pour filtrer le bruit blanc. Le filtrage prévu dans la deuxième étape est non-linéaire et adaptatif. On peut utiliser un filtre avec l'une des relations entrée sortie suivante:

$$y = \begin{cases} x, & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R^+ \quad (10.1.1)$$

$$y = (\text{sgn } x) (|x| - \lambda), \quad \lambda \in R^+ \quad (10.1.2)$$

$$y = \begin{cases} (\text{sgn } x) (|x| - \lambda), & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases} \quad (10.1.3)$$

$$y = \begin{cases} 0, & |x| \leq \lambda \\ x - \frac{\lambda^2}{x}, & |x| > \lambda \end{cases} \quad (10.1.4)$$

$$y = \begin{cases} 0 & , |x| \leq \lambda_1 \\ \operatorname{sgn} x \frac{\lambda_2(|x| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} & , \lambda_1 < |x| \leq \lambda_2 \\ x & , |x| > \lambda_2 \end{cases} \quad (10.1.5)$$

La plupart des filtres présentés plus haut, peut être transformée en filtres adaptatifs, si la valeur du paramètre λ dépende de l'un de paramètre du signal à traiter. Ce paramètre peut être, par exemple la puissance du signal perturbateur. Si par exemple le signal perturbateur est de type bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ et si dans l'étape 1 on utilise une transformée en ondelettes discrète orthogonale, alors la puissance du signal perturbateur dans le domaine de la transformée (qui est maintenant un bruit blanc Gaussien) sera σ^2 . Si on utilise le filtre décrit dans la relation (10.1.1) alors (conformément à la règle de 3σ) en choisissant $\lambda > 3\sigma$, le bruit est pratiquement entièrement supprimé. Evidemment, le rapport signal/bruit du signal à traiter doit être relativement important ainsi que l'enlèvement des échantillons de la transformée en ondelettes du signal utile inférieurs en valeur absolue à 3σ , ne soit pas importante du point de vue de la distorsion introduite. Cette méthode conserve les variations rapides du signal utile et élimine presque complètement le bruit. La distorsion introduite par l'utilisation de la méthode déjà décrite n'est pas importante. Ces caractéristique de la méthode de débruitage présentée prouvent que cette méthode est l'une de meilleures méthodes d'augmentation du rapport signal/bruit connues. Le plus fréquemment on utilise une transformée en ondelettes discrète orthogonale, le filtre décrit dans la relation (10.1.3), et pour le paramètre λ on choisi la valeur:

$$\lambda = \sqrt{N \log_2 N} \cdot \sigma$$

où σ représente la variance du bruit blanc qui perturbe le signal utile. N représente la durée du signal à traiter. La méthode de débruitage proposée peut être utilisée aussi quand le bruit qui perturbe le signal d'entrée n'est pas blanc.

On présente dans la suite quelques exemples de débruitage de quelques signaux perturbés par des différentes bruits.

Dans la figure 10.1.1 est présenté le signal utile. Dans les figures 10.1.2, 10.1.3, et 10.1.4 sont présentés les signaux perturbateurs de type bruit uniforme, bruit en impulsions et bruit en train d'impulsions. Dans les figures 10.1.5, 10.1.6 et 10.1.7 sont présentés, en haut, le signal de la figure 10.1.1 perturbé par les bruits présentés dans les figures 10.1.2, 10.1.3 et 10.1.4 et en bas les résultats correspondants de l'application de la méthode d'augmentation du rapport signal/bruit présentée dans ce paragraphe.

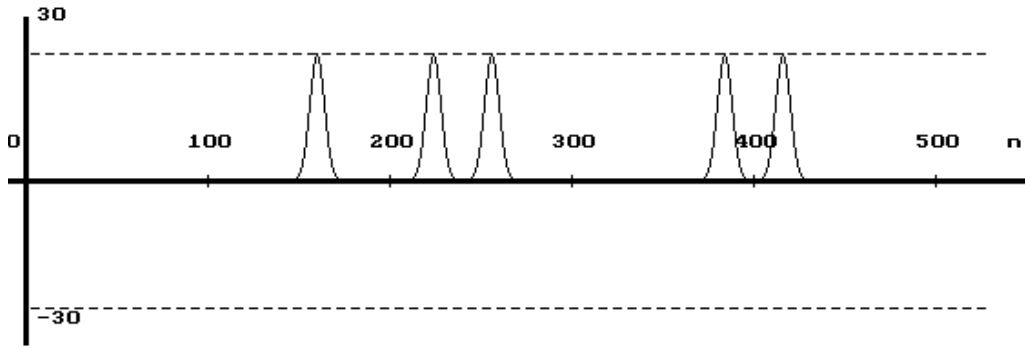


Figure 10.1.1. Le signal utile.

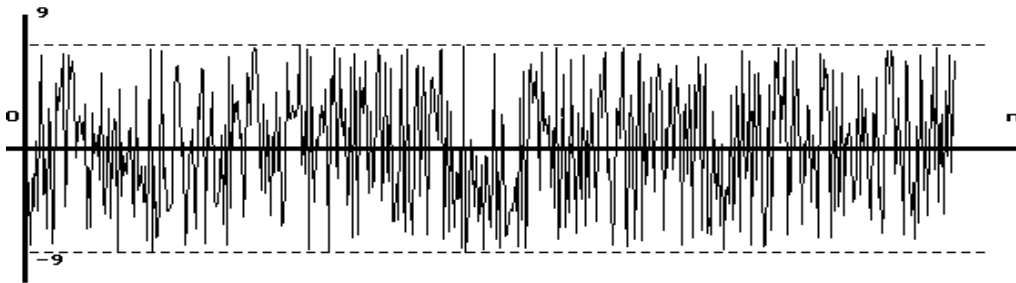


Figure 10.1.2. Signal perturbateur de type bruit uniforme.

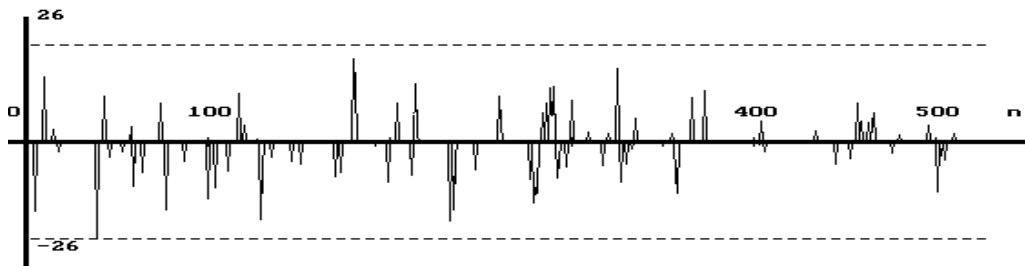


Figure 10.1.2. Signal perturbateur de type bruit d'impulsions.

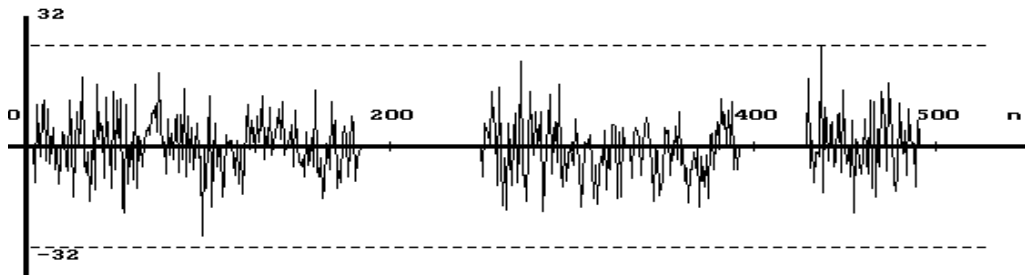


Figure 10.1.3. Signal perturbateur de type train d'impulsions.

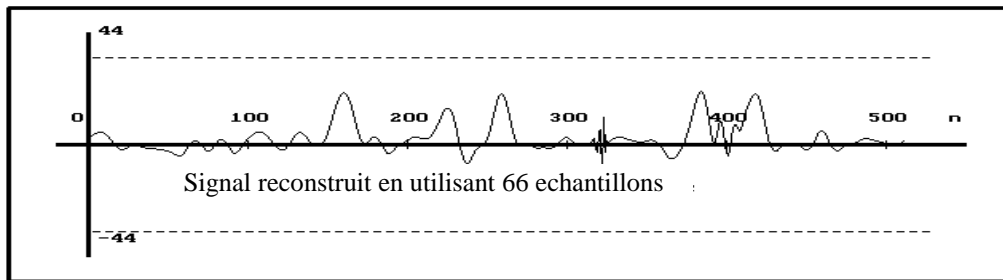
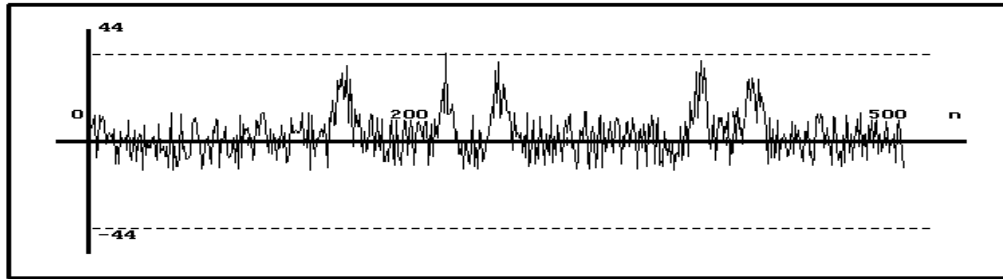


Figure 10.1.4. L'augmentation du rapport signal/bruit quand le signal perturbateur est uniforme.

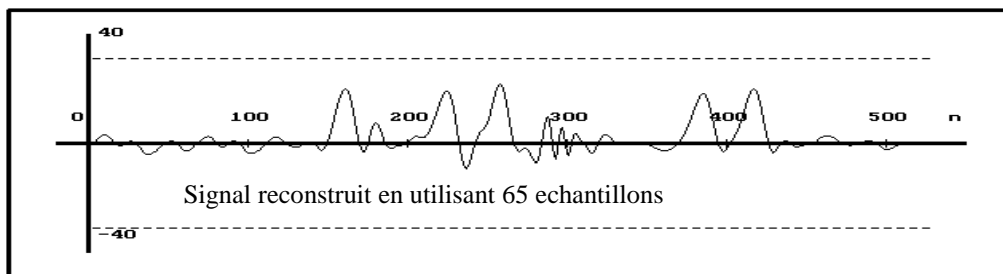
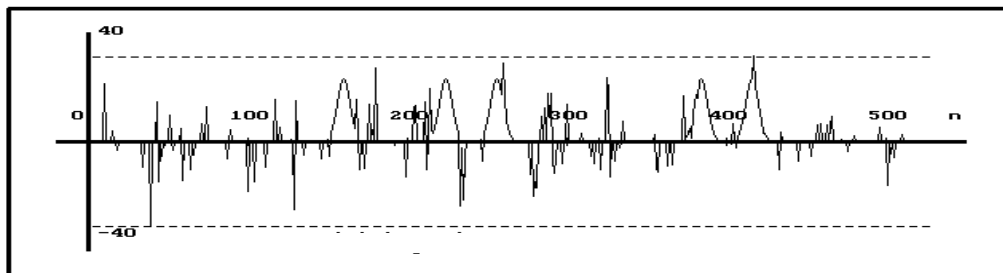


Figure 10.1.5 L'augmentation du rapport signal/bruit quand le signal perturbateur est de type bruit d'impulsions.

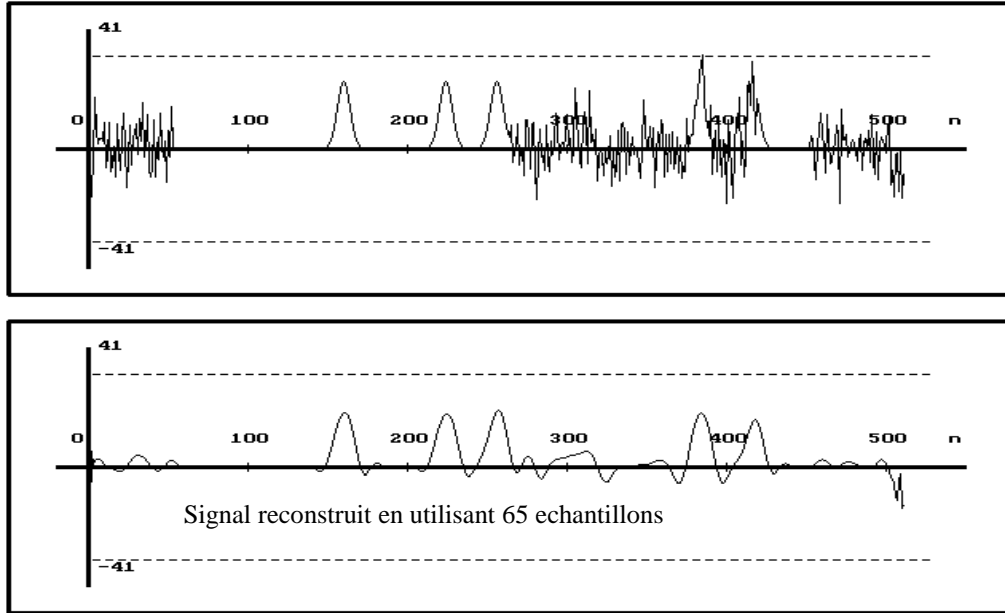


Figura 10.1.6. L'augmentation du rapport signal/bruit pour signal perturbateur de type train d'impulsion.

On peut remarquer la bonne qualité de la méthode d'augmentation du rapport signal/bruit. On observe que cette méthode fait une compression en même temps.

Dans les systèmes de télécommunications la puissance du signal émis est connue à la réception, mais la puissance du bruit induit dans la chaîne de transmission n'est pas connue. Dans le cas de ces systèmes est mieux de choisir la valeur du paramètre λ en fonction de la valeur du puissance du signal émis P , que de la valeur σ . On présente dans la suite un exemple d'utilisation d'un tel algorithme. A la figure 10.1.7. est présenté le signal utile, et à la figure 10.1.8 ce signal, perturbé par bruit blanc. Le rapport signal bruit dans le cas de la figure 10.1.8 a la valeur 1,8.

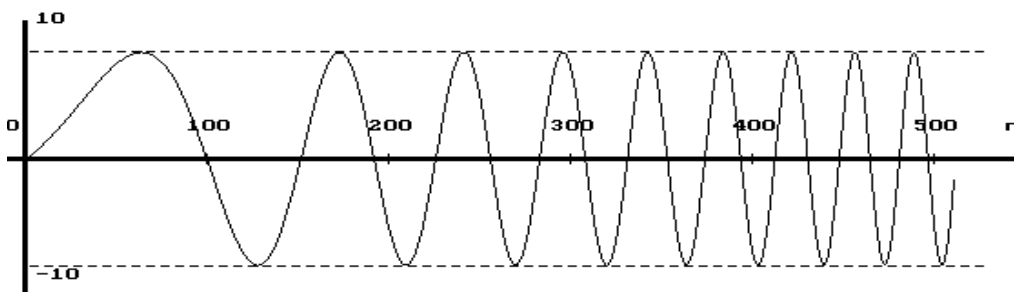


Figure 10.1.7. Le signal utile.

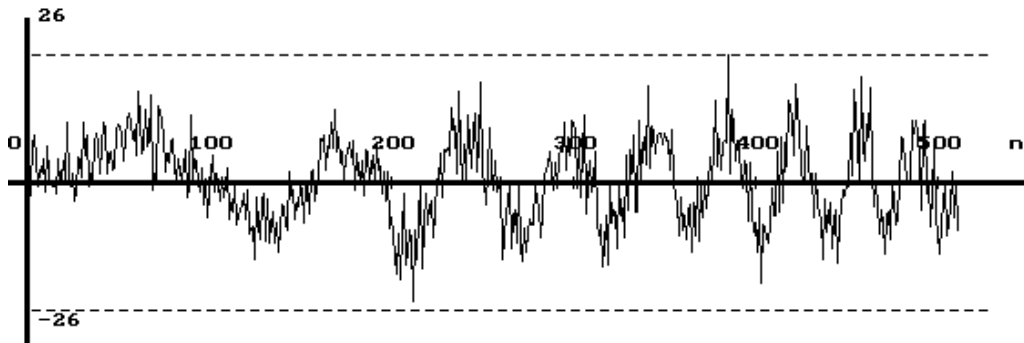


Figure 10.1.8. Le signal perturbé par bruit blanc.

A la figure 10.1.9. est présenté le résultat de l'application de la méthode de débruitage basée sur l'algorithme évoqué plus haut. On observe les qualités de la méthode de débruitage proposée. Le rapport signal/bruit à la sortie est de 10,5. Donc l'augmentation du rapport signal/bruit obtenue est de 5,83.

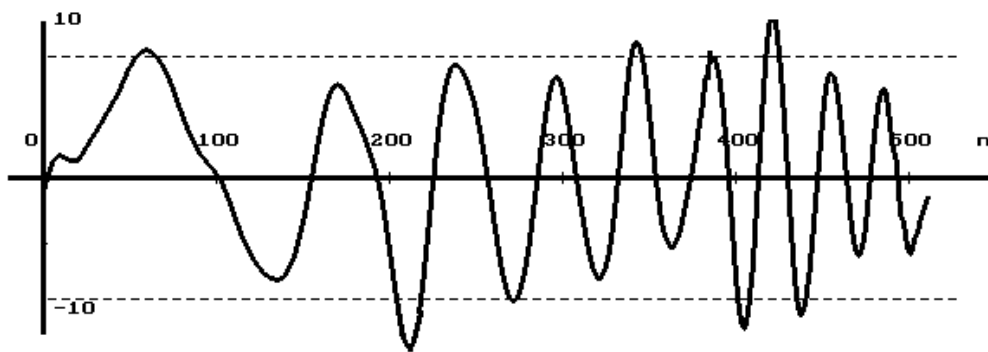


Figure 10.1.9. Le signal reconstruit après l'utilisation de l'algorithme évoqué plus haut.

10.2. La compression de données

On présente dans la suite une méthode de compression à perte d'information contrôlée. Cette méthode a les étapes suivantes:

1. On calcule la transformée en ondelettes discrète directe du signal à traiter $x[n]$, $y[n]$.
2. On réalise la compression en négligeant les échantillons du signal obtenu à la fin de la première étape qui sont inférieurs à un seuil imposé.
3. On calcule la transformée en ondelettes discrète inverse et on obtient le signal $\hat{x}[n]$.

Le seuil de la deuxième étape est imposé dans une manière adaptative. Sa valeur est choisie tel que l'erreur quadratique moyenne d'approximation du signal $x[n]$ par le signal $\hat{x}[n]$ ne dépasse pas un pour-cent de l'énergie du signal $x[n]$.

On peut utiliser les relations suivantes:

$$E_x = \sum_{k=0}^{N-1} x^2[k] = \sum_{k=0}^{N-1} y^2[k] \quad (10.2.1)$$

$$E_{\hat{x}} = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}^2[k] = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{y}^2[k] \quad (10.2.2)$$

parce que chaque transformée orthogonale conserve l'énergie.

On peut écrire aussi:

$$\hat{y}[n] = \begin{cases} y[n], & \text{si } |y[n]| > P \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

Soit ${}_o\hat{y}[n]$ la séquence obtenue par le positionnement en ordre décroissante des échantillons du signal $\hat{y}[n]$. L'erreur quadratique moyenne d'approximation du signal $x[n]$ par le signal $\hat{x}[n]$ est proportionnelle à:

$$\varepsilon = \sum_{k=M}^{N-1} {}_o\hat{y}^2[k]$$

La valeur du paramètre M est obtenue comme solution de l'équation :

$$\max_{M \in \mathbb{Z}} \varepsilon = \frac{E_x}{100}$$

On présente dans la suite quelques exemples d'application de la méthode déjà décrite. Dans les figures 10.2.1, 10.2.2 et 10.2.3 sont présentés trois exemples de signaux à compresser, $x[n]$ (en haut) et correspondantes $\hat{x}[n]$ (en bas). Pour chaque compression est

spécifié le nombre d'échantillons utilisé pour la reconstruction. On constate qu'on a obtenu des valeurs importantes pour le facteur de compression.

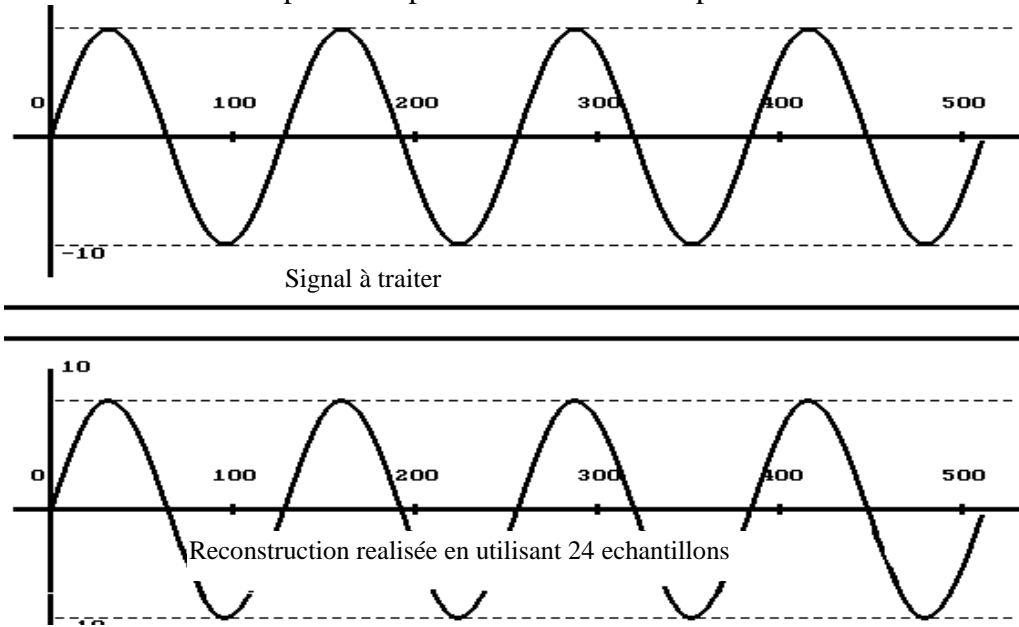


Figure 10.1.1. La compression d'un sinus. Le facteur de compression est égale à 10,66.

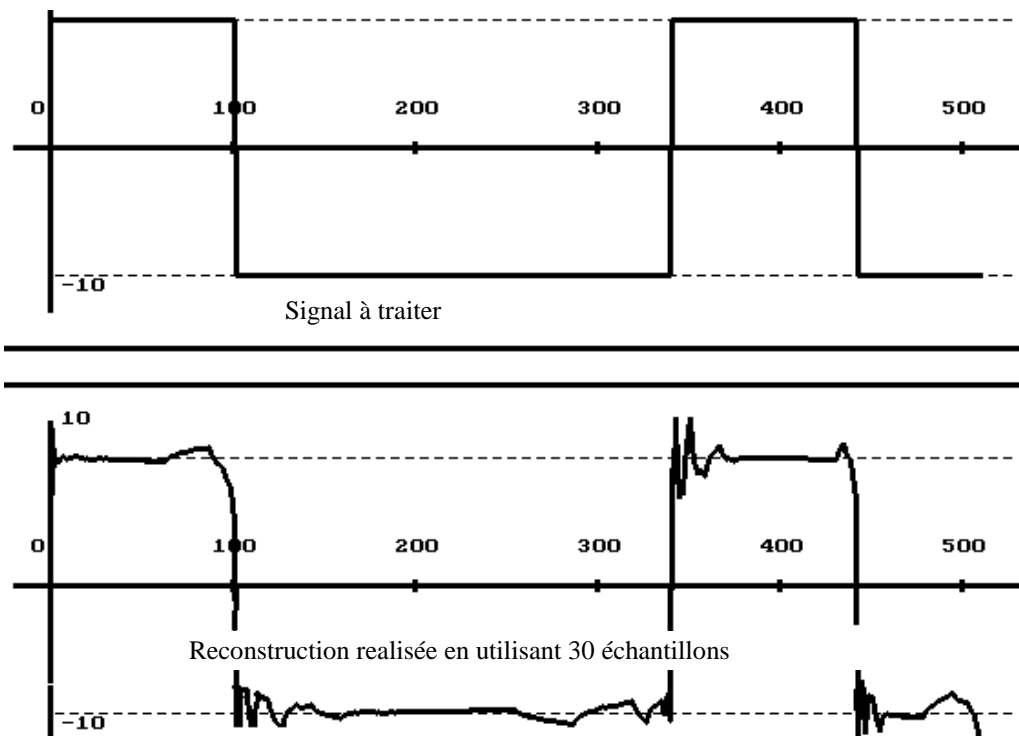


Figure 10.2.2. La compression d'un signal carré. Le facteur de compression est égal à 8,53.

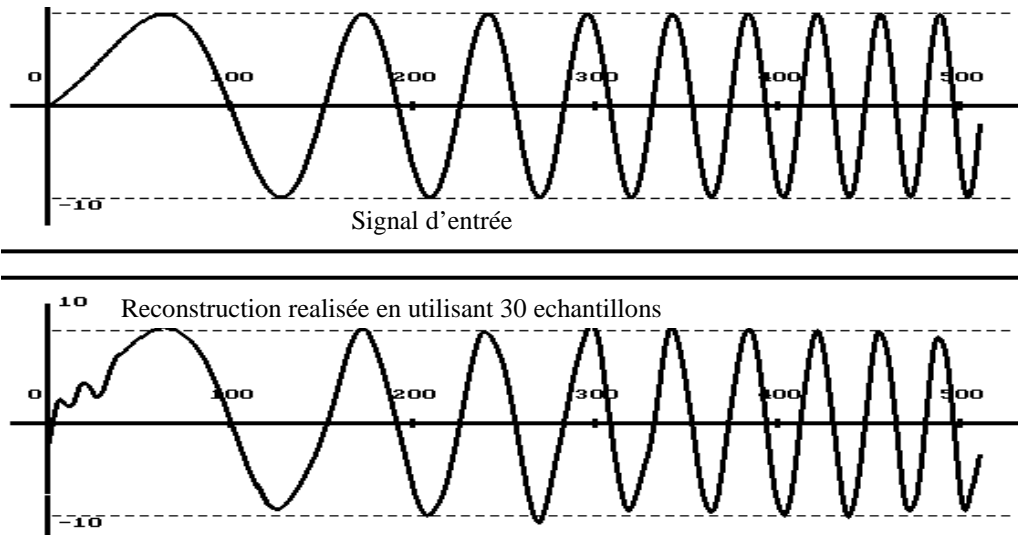


Figure 10.2.3. La compression d'un signal modulé en fréquence. Le facteur de compression est égal à 8,53.

Bibliographie

- [Asz.'93] T. Asztalos. Using Digital Transversal Filters for Analog Signal Processing. Proceedings of the International Symposium on Signals, Circuits and Systems, SCS'93, Iași, Romania, 1993.
- [Asz., Isa.'94] T. Asztalos, A. Isar. An Adaptive Data Compression Method Based on the Fast Wavelet Transform. *Proceedings of the International Symposium Etc'94*, Timisoara, vol III, pp 37-42, Sept. 1994.
- [Asz.'96] T. Asztalos. An Algorithm for the DWT on Block Computation. *Proceedings of the International Symposium Etc'96*, Timisoara, vol II, pp.128-133, Sept. 1996.
- [Asz.'97] T. Asztalos. Tomography Imaging. Radon Transform Inversion Procedures. *Raport de stagi*, Universitatea Paris-Sud, Iulie 1997.
- [Bor.,Isa.'97] M. Borda, D. Isar. Whitenig with Wavelets. *Proceedings of "ECCTD. 97" Conference*, Budapest, August 1997.
- [Cod.'94] M.A. Cody. The Wavelet Packet Transform Extending the Wavelet Transform, *Dr. Dobb's Journal*, April 1994.
- [Coh.,Dau.,Fea.'92] A. Cohen, I.Daubechies, J.C.Feauveau, Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. in Pure and Applied Math.*,vol.XLV, pp485-560, 1992.
- [Coh.'92] A. Cohen. Ondelettes et traitement numérique du signal. *Masson*, 1992.
- [Coh.,Dau.,Fea.'92] A. Cohen, I. Daubechies, J. C. Feauveau. Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. XLV, pp.485-560, 1992.
- [Coh.,Dau.'93] A. Cohen, I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets III. Better Frequency Resolution. *SIAM Journal Math. Anal.*, vol. 24, No.2, pp. 520-527, March 1993.
- [Coh.,d'Al.'95] A. Cohen, J. P. d'Ales. Nonlinear Approximation of Stochastic Processes. În *Wavelets and Statistics*. A. Antoniadis si G. Oppenheim (editori), *Springer Verlag*, pp.129-132, 1995.
- [Coh.,Kov.'96] A. Cohen, J. Kovacevic. Wavelets: The Mathematical Background, Proceedings of the IEEE, vol.84, no. 4, April 1996, pp.514-521.
- [Com.,Pes.'96] P. L. Combettes. J. C. Pesquet. Convex Multiresolution Analysis. *Proceedings of IEEE Conference "TFTS'96"*, Paris, July 1996.
- [Cou.'84] F. de Coulon. Théorie et traitement des signaux. *Presses polytechniques romandes*. Lausanne 1984.
- [Cou.'95] G. Courbebaisse. Caractérisation d'un système d'injection par analyse temps-fréquence. *Traitement du signal*, vol.12, No.5, pp.509-518, 1995.
- [Dau.'88] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, No. 41, pp.909-996, 1988.
- [Dau.'91] I. Daubechies. The Wavelet Transform: A Method for Time-Frequency Localization, În *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*. S. Haykin (editor), *Prentice-Hall*, New-Jersey 1991.
- [Dau.'92] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. *SIAM*, Philadelphia 1992.
- [Dau.'93] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on a Theme. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 24, No. 2, pp. 499-519, March 1993.
- [Dau.,Swe.'96] I. Daubechies, W. Sweldens. Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps, Preprint *Stanford University*, 1996.
- [Den.,Jaw.,Pet.,Swe.'93] B. Deng, B. Jawerth, G. Peters, W. Swelden. Wavelet Probing for Compression Based Segmentation. *Proceedings of SPIE*, San Diego, July 1993.
- [DeS.,Isa.'93] A. De Sabata, A. Isar. Semnale Circuite și Sisteme. *Indrumator de laborator, Litografia UPT*, 1993.

- [DeS.,Iun.,Aub.'94] A. De Sabata, C. Iung, J. F. Aubry. A Variable Scale DWT. *Proceedings of the International Symposium ETC'94*, vol. III, pp.43-48, Timișoara Sept. 1994.
- [Don.,Joh.'91] D. Donoho, I. M. Johnstone. Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage *Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics*, Atlanta, Georgia, August 1991.
- [Don.,Joh.'92] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 400, Stanford University*, July 1992.
- [Don.,Joh.'92(1)] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 402, Stanford University*, July 1992.
- [Don.'91] D. Donoho. Nonlinear Solution of Linear Inverse Problems by Wavelet-Vaguellette Decomposition, Preprint *Stanford University*, 1991.
- [Don.'92] D. L. Donoho. De-Noising via Soft Thresholding. *Technical Report 409, Stanford University*, November 1992.
- [Don.'92(1)] D. Donoho. Interpolating Wavelet Transforms, Preprint *Stanford University*, 1992.
- [Don.,Joh.'92] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Unconditional Bases are Optimal Bases for Data Compression and for Statistical Estimation. *Technical Report 410, Stanford University*, November 1992.
- [Don.'93] D. L. Donoho. Wavelet Shrinkage and W.V.D.-A Ten Minute Tour. *Technical Report 416, Stanford University*, January 1993.
- [Don.'93(1)] D. L. Donoho. Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities and Spectra from Indirect and Noisy Data, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. 47, ed. I. Daubechies, pp.173-205, 1991.
- [Don.'93(2)] D. Donoho. Smooth Wavelet Decomposition with Blocky Coefficient Kernels, in *Recent Advances in Wavelet Analysis*, L. Schumaker and G. Webb (editors), pp. 1-43, 1993.
- [Don.,Joh.'93] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Adapting the Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 425, Stanford University*, June 1993.
- [Don.'93(3)] D. L. Donoho. Nonlinear Wavelet Methods for Recovering Signals, Images and Densities from Indirect and Noisy Data. *Technical Report 426, Stanford University*, July 1993.
- [Don.'94] D. L. Donoho. On Minimum Entropy Segmentation. *Technical Report 450, Stanford University*, April, 1994.
- [Don.,Joh.'94(1)] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Ideal De-Noising in an Orthonormal Basis Chosen from a Library of Bases. *Technical Report 461, Stanford University*, September 1994.
- [Don.'95] D. Donoho. CART and Best-Ortho-Basis: A Connection, Preprint *Stanford University*, 1995.
- [Dum.'96] G. Dumitraș. Aplicații ale transformatei "wavelet". Realizarea compresiei imaginilor utilizând transformarea "wavelet". *lucrare de dizertație, Departamentul de Comunicații, Facultatea de Electronică și Telecomunicații, Timișoara*, Iulie 1996.
- [Duv.'91] P. Duvaut. Traitement du signal-concepts et applications. *Hermes*, Paris 1991.
- [End.,Ver.'92] A. W. M. van den Enden, N. A. M. Verhoekx. Traitement numérique du signal. *Masson*, Paris 1992.
- [Fea.'92] J. C. Feauveau. Nonorthogonal Multiresolution Analysis using Wavelets. În *Wavelets-A Tutorial in Theory and Applications*. C. K. Chui (editor), *Academic Press*, pp.153-178, 1992.
- [Flan.'93] P. Flandrin. Representation temps-fréquence. *Hermes*, 1993.
- [Fro.'90] J. Froment. Traitement d'images et applications de la transformée en ondelettes. *Teza de doctorat, Universitatea Paris IX*, 1990.
- [Fro.,Par.'94] J. Froment, S. Parrino. MegaWave 2 User's Modules Library. vol. I, vol. III, *Preprint CEREMADE, Univ. Paris Dauphine*, November 1994.

- [Fro.'95] J. Froment. Introduction a la théorie des ondelettes. *curs de vara*, Timi•oara, Iunie 1995.
- [Gim.,Mat.'97] C. Giménès, A Mateescu (coordonatori). Electronique, phisque et signal pour les télécommunications, Editura Tehnic•, Bucure•ti, 1997.
- [Isa.,Isa.'93] A. Isar, D. Isar. A Generalization of the W.K.S. Theorem Using Orthogonal Decomposition of $L^2(\mathbb{R})$. Applications in Signal Processing Theory. *Revista ATM*, anul III, pp.91-97, Bucure•ti, 1993.
- [Isa.'93] A. Isar. Nouvelles modalités de décomposition multirésolution. *Quatorzieme Colloque GRETSI, Juan-Les Pins*, pp.363-366, 13-16 Septembre 1993.
- [Isa.'93(1)] A. Isar. Tehnici de m•surare adaptiv• cu aplica•ii în aparatura de m•surare numeric•. *Teza de doctorat, Universitatea "Politehnica" Timi•oara* 1993.
- [Isa.'94] A. Isar. L'estimation de la transformée en ondelettes avec bancs de filtres a temps continu. *Colloque TOM'94*, pp. 34.1-34.4, Lyon, 9-11 Mars 1994.
- [Isa.,Asz.'94] A.Isar, T.Asztalos. Using the fast wavelet transform for data compression, *Proceedings of the symposium on electronics and telecom.*, vol.III, Timi•oara, sept. 29-30, 1994.
- [Isa.,Asz.,Isa.'95] D.Isar, T.Asztalos, A.Isar : De-noising with wavelets, *International Symposium SCS'95, Ia•i*, România, 1995.
- [Isa.'96] D. Isar. Imbun•t•irea raportului semnal pe zgomot prin filtrare neliniar• în domeniul transformatei, *Scientific Communications Meeting of "Aurel Vlaicu" University, Arad*, România, 1996.
- [Isa.'97] D. Isar. De-noising adaptatif. *Seizieme Colloque GRETSI*, pp.1249-1252, Grenoble, 15-19 Septembre 1997.
- [Isa.,Isa.'97] D. Isar, A. Isar. A New Class of Identity Systems. *International Workshop on Sampling Theory and Applications, Universidad de Aveiro*, June 16-19 1997.
- [Jaw.,Swe.'95] B. Jawerth, W. Swelden. An Overwiev of Wavelet Based Multiresolution Analysis. *Preprint, Katolike Universiteit Leuven*, Belgium 1995.
- [Kun.,Boi.'87] M. Kunt, R. Boite. Traitement de la parole. *Presses Polytechniques Romandes*, 1987.
- [Kun.'84] M. Kunt. Traitement numérique des signaux. *Traité d'Electricité de l'EPFL, vol. XX, 3-eme édition, Presses Polytechniques Romandes*, 1984.
- [Lem.'90] P. G. Lemarié-Rieusset. Analyses multi-echelles et ondelettes a support compact. În *Les ondelettes en 1989*. P. G. Lemarié (editor), *Springer Verlag*, 1990.
- [Lem.,Mal.'93] P. G. Lemarié-Rieusset, G. Malgouyres. Support des fonctions de base dans une analyse multirésolution. *C. R. Acad. Sci. Paris, tome 313, serie 5*, pp.377-380, 1993.
- [Mac.'89] O. Macchi. Adaptatif et non stationnaire. *Traitement du signal*, vol. 6, No.5 pp.325-387, 1989.
- [Mal.'91] G. Malgouyres. Analyse multirésolution sur l'intervalle. Algorithme rapide. *Preprint, Université Paris-Sud*, 1991.
- [Mal.'92] G. Malgouyres. Ondelettes a support compact et analyse multirésolution sur l'intervalle. *Preprint, Université Paris-Sud*, 1992.
- [Mal.'94] G. Malgouyres. Introduction a la théorie des ondelettes. *Curs de var•*, Timi•oara 1994.
- [Mal.'89] S. Mallat. Multifrequency Channel Decomposition. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 37, No.12, pp. 2091-2110, Octobre 1989.
- [Mal.'89(1)] S. Mallat. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Inteligence*, vol. II, No.7, pp.674-693, July 1989.
- [Mal.,Zha.'93] S. Mallat, Z. Zhang. Matching Pursuits with Time-Frequency Dictionary. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, No.12, pp.3397-3415, December 1993.
- [Mal.'97] S. Mallat, F. Falzon. Understanding Image Transform Codes. *Proceedings of the SPIE Aerospace Conference*, Orlando, April 1997.

- [Mal.'90] H. S. Malvar. Lapped Transforms for Efficient Transform/Subband Coding. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 38, pp.969-978, June 1990.
- [Mat.,Rad.,Sta.'96] A. Mateescu, M. R•duc•anu, L. Stanciu. Best Basis with Wavelet Packets for a Signal. *Proceedings of International Symposium Etc'96*, Timi•oara, vol. II, pp.106-111, September 1996.
- [Mey.'90] Y. Meyer. Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement num•rique de l'image. În *Les ondelettes en 1989*. P. G. Lemari• (editor), *Springer-Verlag*, 1990.
- [Mey.'93] Y. Meyer. Ondelettes et algorithmes concurrents. *Herman*, Paris 1993.
- [Mey.93(1)] Y. Meyer. Wavelets and Operators. În *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. I. Daubechies (editor), vol. 47, *AMS*,1993.
- [Mou.'94] P.Moulin. Wavelet Thresholding Techniques for Power Spectrum Estimation. *IEEE Trans. on S.P.*, vol. 42, No.11, pp. 3126-3136, November 1994.
- [Naf.,C•m.,Isa.'95] I. Naforni••, A. C•mpeanu, A. Isar. Semnale circuite •i sisteme. vol. I, *Editura UPT*, 1995.
- [Pas.,Gay.'95] D. Pastor, R. Gay. D•composition d'un processus stationnaire du seconde ordre. Propri•t•s statistiques d'ordre 2 des coefficients d'ondelettes et localisation fr•quentielle des paquets d'ondelettes. *Traitement du signal*, vol. 12, no. 5, pp. 393-420, 1995.
- [Pop.,Naf.,Tip.,Tom.,Mih.'86,'89] E. Pop, I. Naforni••, V. Tiponu•, L.Toma, A. Mih•escu. Metode în prelucrarea numeric• a semnalelor. vol I •i vol II, *Ed. Facla*, Timi•oara 1986 •i 1989.
- [Pre.'87] F. Preteux. Description et int•rpr•tation des images par la morphologie math•matique. Application a l'image m•dicale. *These de doctorat d'Etat, Universit• Paris VI*, 1987.
- [Rio.,Duh.'92] O. Rioul, P. Duhamel. Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 28, No. 2, pp.569-586, March 1992.
- [Rio.,Vet.'91] O.Rioul, M.Vetterli. Wavelets and signal processing, *IEEE SP Magazine*, 8 (4) pp.14-38, october 1991.
- [Rio.'93] O. Rioul. A Discrete Time Multiresolution Theory. *IEEE Trans. on SP*, vol. 41, no. 8, pp. 2591-2606, August 1993.
- [Rio.'93(1)] O. Rioul. Ondelettes r•guli•res: Applications a la compression d'images fixes. *these de doctorat, ENST Paris*, Mars 1993.
- [Sp•.'87] A. Sp•taru. Fondements de la th•orie de la transmission de l'information. *Presses Polytechniques Romandes*, Lausanne, 1987.
- [Wes.,Wic.'93] E. Wesfreid, M. V. Wickerhauser. Etudes des signaux vocaux par ondelettes de Malvar. *Quatorzieme Colloque GRETSI, Juan-Les-Pins*, Septembre 1993.
- [Wic.'94] M. Wickerhauser. Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software. *A. K. Peters Wesley*, 1994.