Studiul transformatei Fourier discrete

1. Scopul lucrării

Se studiază aplicațiile ale TFD în analiza armonică a semnalelor şi în efectuarea unor operații liniare asupra acestora: convoluția şi corelația. Se utilizează în acest scop mediul de programare Matlab.

2. Definiții şi proprietăți ale TFD

Se consideră o secvență $x: Z \to C$ astfel încât $x[n]=0$ pentru $n<N_1$ si $n>N_2$. Se defineşte TFD a sa ca fiind secvența $X: Z \to C$ definită prin

$$X[k]=\begin{cases}\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, & N_1 \le k \le N_2 \\ 0, \text{ in rest}\end{cases} \tag{1}$$

cu

$$N = N_2 - N_1 + 1 \tag{2}$$

Uneori se prelungeşte prin periodicitate, de perioadă *N* dată de relația (2), semnalul $x[n]$ si se obține semnalul $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN] \tag{3}$$

Notând:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}} = w_N \tag{4}$$

se consideră semnalul:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n] w_N^{kn} \tag{5}$$

unde în suma anterioară, notația $n=\langle N\rangle$ semnifică faptul că însumarea se face pentru *N* valori consecutive ale semnalului $x[n]$ (o perioadă). Se vede că semnalul $\tilde{X}[k]$ este periodic, de perioadă *N*, şi se poate arăta că:

$$\tilde{X}[k] = X[k], \quad N_1 \le k \le N_2 \tag{6}$$

Formulele de reconstrucție ale semnalului inițial din TFD a sa sunt :

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=N_1}^{N_2} X[k] w_N^{-kn} \tag{7}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{X}[k] w_N^{-kn} \tag{8}$$

În cazul utilizării ultimei relații rezultă:

$$x[n] = \tilde{x}[n]\{\sigma[n-N_1] - \sigma[n-N_2]\} \tag{9}$$

(cu $\sigma[n]$ s-a notat treapta unitate discretă).

Se consideră, în continuare, secvențele $x_i[n]$ cu transformatele corespunzătoare $X_i[k]$, i=1,2. Se prezintă principalele proprietăți ale TFD, exprimate însă asupra semnalelor periodice asociate $\tilde{x}_i[n]$, respectiv $\tilde{X}_i[k]$.

a) Liniaritatea

$$a\tilde{x}_1[n]+b\tilde{x}_2[n]\leftrightarrow a\tilde{X}_1[k]+b\tilde{X}_2[k],\quad a,b\in \mathrm{C} \tag{10}$$

b) Teorema întârzierii

$$\tilde{x}[n-n_0]\leftrightarrow w^{kn_0}\tilde{X}[k],\quad n_0\in \mathrm{Z} \tag{11}$$

c) Teorema deplasării

$$w^{-k_0 n}\tilde{x}[n]\leftrightarrow \tilde{X}[k-k_0],\quad k_0\in \mathrm{Z} \tag{12}$$

d) Teorema convoluției circulare

Notand cu $\circledast$ operația de convoluție circulară a secvențelor periodice, de aceeaşi perioadă *N*, al carei rezultat este secvență periodică, de aceeaşi perioadă, definită prin:

$$\tilde{x}[n]=\sum_{m=\langle N\rangle}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \tag{13}$$

are loc:

$$\tilde{x}_1[n]\circledast\tilde{x}_2[n]\leftrightarrow \tilde{X}_1[k]\cdot\tilde{X}_2[k] \tag{14}$$

e) Teorema produsului

$$\tilde{x}_1[n]\cdot\tilde{x}_2[n]\leftrightarrow \frac{1}{N}\tilde{X}_1[k]\circledast\tilde{X}_2[k] \tag{15}$$

f) Teorema lui Parseval

$$\sum_{n=\langle N\rangle}\left|\tilde{x}[n]\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}\left|\tilde{X}[k]\right|^2 \tag{16}$$

3. Algoritmul TFR pentru calculul TFD

Dezvoltarea prelucrării numerice a semnalelor a început odată cu elaborarea algoritmului de transformare Fourier rapidă (TFR, FFT conform inițialelor din limba engleză). Acesta exploatează anumite proprietăți ale exponențialelor complexe. Implementarea algoritmului TFR este eficientă când lungimea suportului secvenței de transformat, respectiv a perioadei semnalului periodizat este o putere a lui 2. Când această cerință nu este îndeplinită, se prelungeşte intervalul din Z pe care se face transformarea până ce lungimea sa devine o putere a lui 2, completând semnalul cu eşantioane nule.

4. Aplicațiile TFD

4.1. Analiza armonică a semnalelor în timp continuu

Această aplicație se bazează pe teorema eşantionării semnalelor de durată finită. Se consideră un semnal în timp continuu, $x(t)$, astfel încât

$$\mathrm{supp}\{x(t)\}\subset[0,T] \tag{17}$$

şi semnalul rezultat prin repetarea prin periodicitate a acestuia (vezi fig.1).

$$x_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT) \tag{18}$$

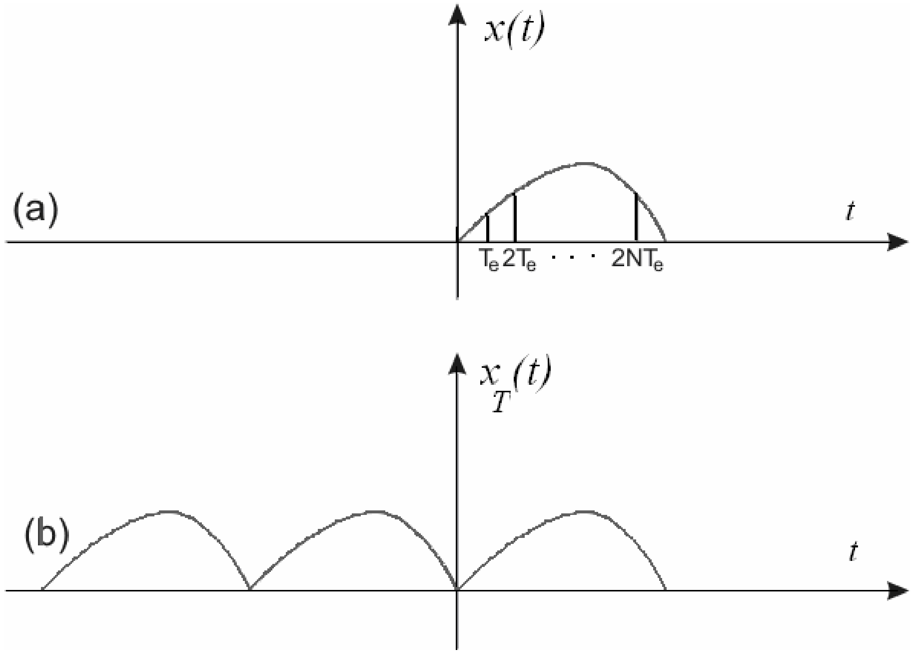

Fig.1 Semnalul de analizat (a) şi repetarea sa prin periodicitate (b).

Se notează cu $X(\omega)$ transformata Fourier a semnalului $x(t)$ şi se presupune că $x_T(t)$ admite dezvoltare în serie Fourier cu un număr finit de termeni:

$$x_T(t)=\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \tag{19}$$

Se eşantionează semnalul $x(t)$ cu pasul:

$$T_E=\frac{T}{2N+1} \tag{20}$$

şi se consideră semnalul în timp discret:

$$x[n]=x(nT_E) \tag{21}$$

având TFD $X[k]$.

În aceste condiții se poate demonstra că,

$$a_k=X[k]=\frac{1}{T}X\left(k\frac{2\pi}{T}\right) \tag{22}$$

adică elementele TFD sunt proporționale cu eşantioanele transformării Fourier a semnalului $x(t)$. În plus $x(t)$ poate fi reconstituit cu exactitate din eşantioanele (21), dacă pasul de eşantionare satisface (20).

În realitate este puțin probabil ca această eşantionare să se facă astfel încât relațiile de mai sus să fie îndeplinite, sau acest lucru este imposibil. În acest caz, dezvoltarea lui $x_T(t)$ conține o infinitate de termeni:

$$x_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \tag{23}$$

şi în urma eşantionării se produce un fenomen de aliere a coeficienților:

$$X[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{k+(2N+1)p} = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(\left(k + (2N+1)p \right) \frac{2\pi}{T} \right) \tag{24}$$

Dacă valorile transformatei Frourier $X(\omega)$ sunt neglijabile pentru $|\omega| > N2\pi/T$, atunci valorile $TX[k]$ estimează, în puncte $k2\pi/T$, $k=-N,...N$, cu suficientă precizie eşantioanele acestei transformate. În unele analizoare de spectru cu FFT se utilizează de obicei interpolarea (de obicei liniară) a eşantioanelor $X[k]$.

Dacă semnalul $x(t)$ are o durată lungă, se aplică tehnica „transformatei Fourier pe termen scurt" (fig.2). Prin această tehnică se analizează armonic, prin intermediul procedeului descris mai sus, porţuni din semnal, obţinute prin înmulţirea semnalului cu diverse ferestre. Fereastra dreptunghiulară este cea mai simplă, dar, pentru evitarea apariţiei fenomenului lui Gibbs, se utilizează ferestre mai evoluate (Hamming, Gauss, etc), vezi fig.2.

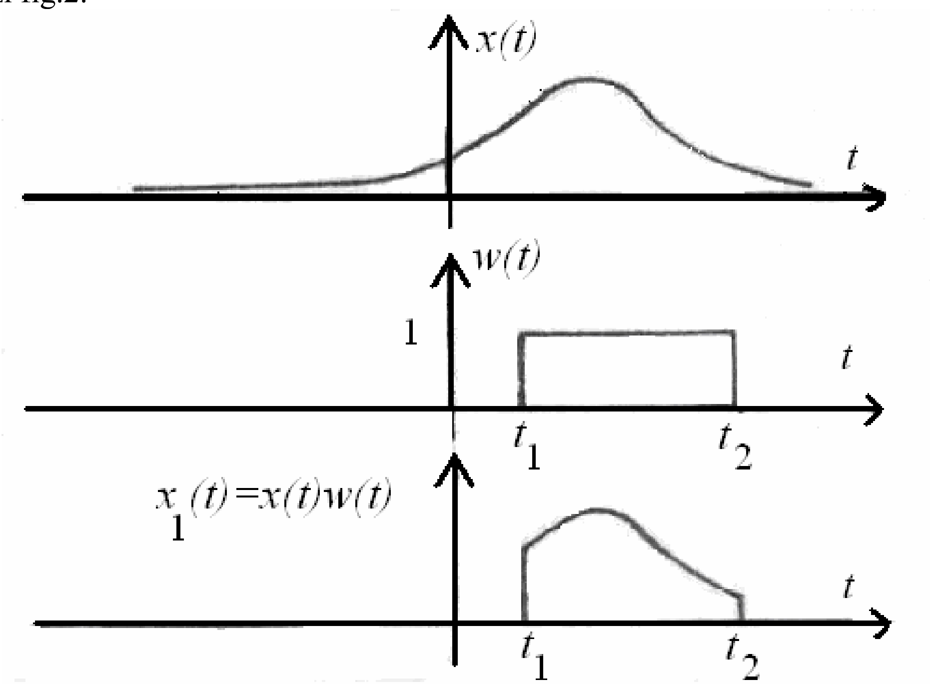

Fig. 2 (a) Semnalul de analizat; (b) funcţia fereastra dreptunghiulară; (c) Semnalul analizat efectiv.

4.2. Calculul convoluţiei

Se consideră două secvenţe $x_1[n]$ şi $x_2[n]$, astfel încât:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 0 \ \text{ pentru } n < N_1 \text{ şi } n > N_2 \\ x_2[n] &= 0 \ \text{ pentru } n < N_3 \text{ şi } n > N_4 \end{aligned} \tag{25}$$

Pentru calculul convoluţiei celor două secvenţe se procedează în felul următor:

- se formează semnalele $\tilde{x}_1[n]$ şi $\tilde{x}_2[n]$ prin periodizarea semnalelor date cu o perioadă

$$N \geq N_2 - N_1 + N_4 - N_3 + 1 \tag{26}$$

care să fie o putere a lui 2; în acest fel din convoluţia circulară a celor două secvenţe se poate recupera convoluţia obişnuită a semnalelor date

- se calculează $\tilde{X}[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
- se calculează TFD inversă, $\tilde{x}[n]$ a acestei secvențe, reprezentând convoluția circulară a secvențelor $\tilde{x}_1[n]$ şi $\tilde{x}_2[n]$
- se calculează $x[n]$ conform relației:

$$x[n] = \tilde{x}[n] \cdot \{\sigma[n - N_1 - N_3] - \sigma[n - N_2 - N_4 - 1]\} \tag{27}$$

4.3. Calculul corelației

Se consideră aceleaşi semnale ca şi la punctul anterior (ecuația (25)), dar considerate cu valori reale. Funcția lor de intercorelație se defineşte prin:

$$R_{X_1X_2}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[m+n] = x_1[-n] * x_2[n] \tag{28}$$

Pentru evaluarea acestei funcții se procedează ca şi la punctul anterior, efectuându-se convoluția între primul semnal refelectat în timp şi al doilea semnal.

5. Desfăşurarea lucrării

5.1. Se consideră urmatoarele semnale:
(a) $x_1(t)$, din fig.3.a (impuls dreptunghiular)
(b) $x_2(t)$, din fig.3.b (impuls triunghiular)
(c) $x_3(t) = A\sin(\omega_0 t)[\sigma(t) - \sigma(t-T)]$ (impuls sinusoidal)

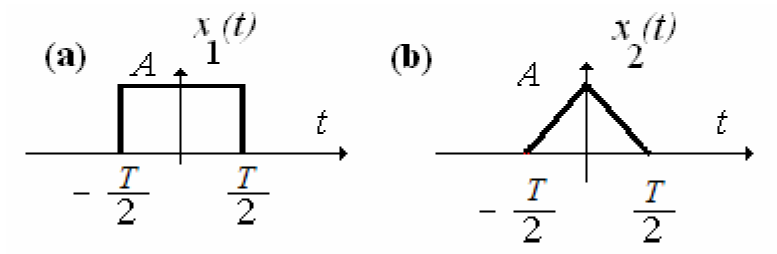

Fig. 3. Semnalele $x_1(t)$ si $x_2(t)$

Parametrii A, T şi ω_0 rămân la alegerea utilizatorului programului „*lfft*”. Se calculează transformatele Fourier în timp continuu $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ si $X_3(\omega)$ şi se reprezintă grafic.

Se calculează TFD ale semnalelor în timp discret ce rezultă prin eşantionarea semnalelor date începând de la t=-T/2 în 8, 16 si 32 de puncte pe durata T; se va utiliza în acest scop programul „*lfft*”. Se compară ultimii doi membri care apar în relația (28) (vezi şi (24)) pentru fiecare eşantion în parte.

Se calculează TFD ca mai sus utilizând 256 de puncte de eşantionare. Se compară figurile ce se obțin prin execuția programului cu graficele transformatelor corespunzătoare şi se determină valoarea maximă a erorii.

5.2. Se calculeaza convoluțiile:

$$x_1(t) * x_1(t),\ x_1(t) * x_2(t),\ x_2(t) * x_2(t)$$

ale semnalelor de la punctul 5.1. Se reprezintă grafic rezultatele. Se eşantionează apoi în 512 puncte aceste semnale şi se calculează convoluția lor, folosind programul “*lfft*”. Se compară graficele calculate cu cele obținute folosind mediul Matlab.

6. Exerciții în MATLAB

În programul MATLAB pentru determinarea transformatei Fourier discrete se foloseşte funcția `fft`. Denumirea sa reprezintă prescurtarea de la Fast Fourier Transform (Transformata Fourier rapidă) şi indică faptul că este folosit pentru calcul un algoritm rapid. Pentru obținerea unor rezultate optime în cazul utilizării acestei funcții este recomandat ca lungimea transformatei N să fie aleasă ca putere a lui 2.

6.1. Transformata Fourier în timp discret

Să se calculeze transformata Fourier discretă a secvenței:

$$x_1[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

Să se reprezinte grafic partea reală, partea imaginară, modulul şi faza transformatelor Fourier discrete calculate.

```
n=0:20;
x2=sin(n*pi/5);
X2=fft(x2,512);

figure(1)
subplot(2,1,1), plot(w,fftshift(abs(X2))),grid
subplot(2,1,2), plot(w,fftshift(angle(X2))),grid

figure(2)
subplot(2,1,1), plot(w,fftshift(real(X2))),grid
subplot(2,1,2), plot(w,fftshift(imag(X2))),grid
```

Exerciții

Utilizând exemplul de mai sus, determinați şi reprezentați grafic partea reală, partea imaginară, modulul şi faza tranformatelor Fourier discrete pentru următoarele semnale:

1. $x_1[n] = n$ pentru $0 \le n \le 10$
2. $x_2[n] = e^{-j\frac{n\pi}{5}} + e^{-j\frac{n\pi}{7}}$ pentru $0 \le n \le 30$
3. $x_3[n] = \begin{cases} n, & 0 \le n \le 10 \\ 20 - n, & 11 \le n \le 20 \end{cases}$
4. $x_4[n] = \dfrac{2}{n^2 + 2n + 1} e^{-j\frac{n\pi}{5}}$ pentru $0 \le n \le 30$

6.2. Relația de echivalență a energiilor

Pentru o secvență $x[n]$ se demonstrează că: $\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X[k]\right|^2$

```
x=[(1:128) (128:-1:1)];
X=fft(x);
a=sum(x.*x)
b=round(sum(abs(X).^2)/256)
```

Verificați cu ajutorul unui program MATLAB relația lui Parseval în cazul secvențelor:

1. $x_1[n]=\begin{cases} n, & \text{pentru } n=\overline{0,7} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

2. $x_2[n]=\begin{cases} 4, & \text{pentru n=0} \\ 2, & \text{pentru n=1} \\ 1, & \text{pentru n=2} \\ -1, & \text{pentru n=3} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$