3. CONVOLUŢIA

Introducem operatia de convoluţie in timp discret (suma de convolutie) si in timp continuu (produsul de convolutie).

Calculul răspunsului sistemelor liniare şi invariante in timp, la un semnal de intrare oarecare.

http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap3.pdf

Suma de convoluţie

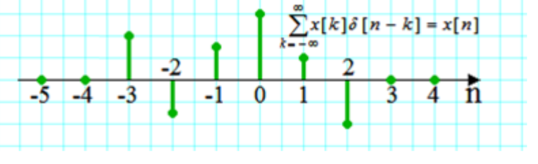
Sinteza semnalului de intrare

Produsul intre un impuls Dirac intarziat cu k si semnalul $x[n]$ extrage valoarea esantionului $x[k]$:

$$x[n]\cdot\delta[n]=x[0]\cdot\delta[n]$$
$$x[n]\cdot\delta[n-k]=x[k]\cdot\delta[n-k]$$

Semnalul $x[n]$ este o suma de esantioane plasate la toate valorile k posibile:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot\delta[n-k]$$



- Consideram un sistem liniar S_d, intrare x[n], iesire y[n]

$$x[n] \longrightarrow \boxed{S_d} \longrightarrow y[n]$$

Sistem liniar

- Raspunsul sistemului la impulsul unitar, δ[n], sau *raspunsul la impulsul unitar (functie pondere)*, h[n]:

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{S_d} \longrightarrow h[n]$$

Sistem liniar

- In plus daca sistemul este si invariant in timp, raspunsul la impulsul unitar intarziat:

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{S_d} \longrightarrow h[n-k]$$

SLIT

3

Răspunsul sistemelor discrete liniare şi invariante în timp (SLITD) la un semnal de intrare oarecare

$$y[n] = S_d\{x[n]\} = S_d\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]\right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot S_d\{\delta[n-k]\}$$

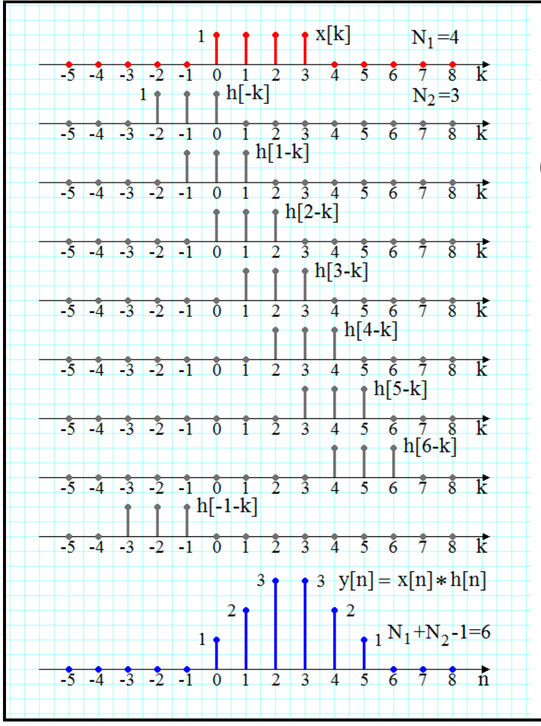
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Sistem SLIT
(LTI system)

Suma de convolutie sau convolutia in timp discret:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] = x[n]*h[n] = h[n]*x[n]}$$



Exemplul 1) Convolutia are durata finita

$$(x*y)[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]y[n-k]$$

Doua semnale cu durata finita N_1 si N_2

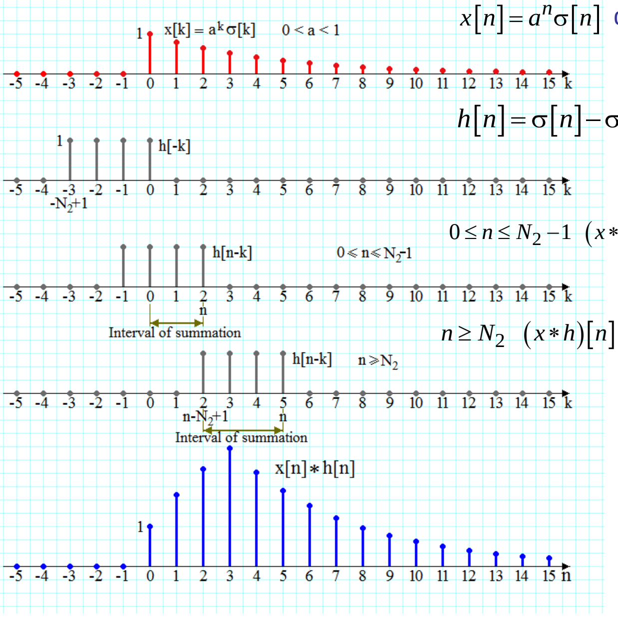
Convolutia are durata

N_1+N_2-1.

Suportul (durata) semnalului: un semnal are N valori semnificative (posibil si unele nule), dar dupa care valorile sunt identic nule

5

Exemplul 2) Convolutia are durata infinita



$$x[n]=a^n\sigma[n]$$

$$h[n]=\sigma[n]-\sigma[n-N_2]$$

$$0\le n\le N_2-1 \quad (x*h)[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$n\ge N_2 \quad (x*h)[n]=\sum_{k=n-N_2+1}^{n}a^k=a^{n-N_2+1}\frac{1-a^{N_2}}{1-a}$$

6

Semnale digitale cauzale

Daca semnalul de intrare, respectiv sistemul, sunt cauzale, semnalul de iesire este si el cauzal:

$$x[n] \equiv 0 \ \text{ and } \ h[n] \equiv 0 \ , n < 0 \ \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

Daca sistemul este cauzal:

$$h[n] \equiv 0 \ , n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad h[n] = h[n] \cdot \sigma[n] \ , \ \forall n \in Z$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

7

BIBO Stabilitatea

- Sistem stabil: Dacă semnalul de intrare este mărginit atunci şi răspunsul trebuie să fie mărginit, “bounded input bounded output” (BIBO)
- Conditia de BIBO stabilitate

Un sistem digital SLITD este stabil <u>daca si numai daca</u> raspunsul sau la impuls este absolut sumabil:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty, h[n] \in l^1$$

8

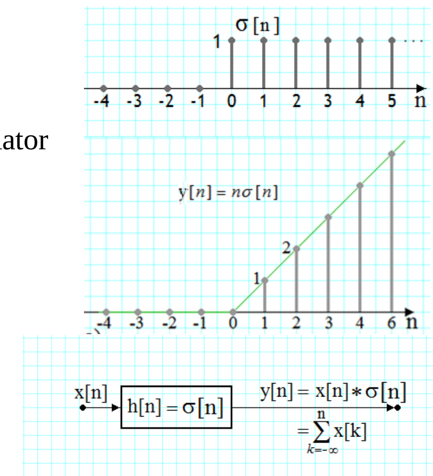
Stabilitatea acumulatorului

$$h[n]=\sigma[n] \;\Rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$x[n] \text{ - cauzal, } y[n]=\sum_{k=0}^{n} x[k], \text{ acumulator}$$

$$x[n]=\sigma[n] \;\Rightarrow\; y[n]=\sum_{k=0}^{n} 1 = n\sigma[n]$$

Acumulatorul este instabil.



- Semnalul de iesire nu este marginit
- Folosit in practica: Se limiteaza intervalul de insumare *n* , sau, din cand in cand se pune semnalul de iesire pe zero.

Proprietati. Elementul neutru

- Impulsul Dirac δ[n] este element neutru pentru convolutie.

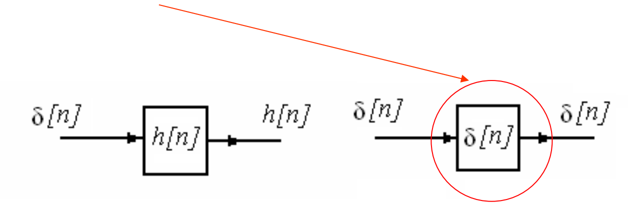
  x[n]* δ[n] = x[n], pentru orice semnal x[n]

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow h[n]$$

h[*n*] – raspunsul la impuls al sistemului.

Sistemul identitate

- Are raspunsul la impuls δ[n] (elementul neutru pt. convolutie)
- Pentru intrare δ[n] → iesirea este tot δ[n].



11

Sistem de intarziere

Raspunsul la impuls $h[n]=\delta[n-n_0]$.

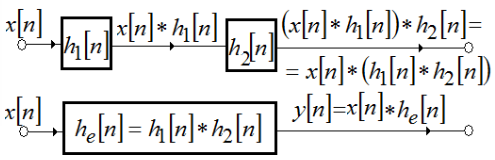
Raspunsul sistemului este o varianta intarziata a semnalului de intrare

$$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$$

12

Asociativitatea convoluţiei. Conectarea în cascadă (serie) a SLIT

Convolutia este asociativa $(x*h_1)[n]*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$



$$y=(x*h_1)*h_2=x*(h_1*h_2)$$
$$h_e=h_1*h_2$$

Raspunsul la impuls al sistemului echivalent este

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]$$

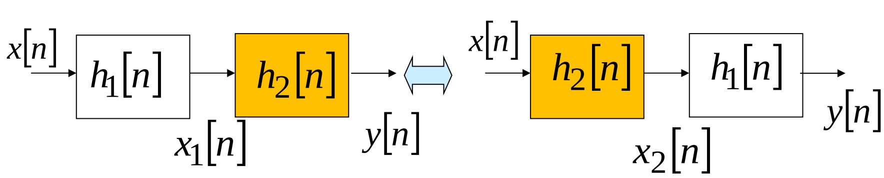
$$y[n]=x[n]*(h_1*h_2)[n]$$

Prin conectarea în cascadă a 2 SLIT stabile se obţine tot un SLIT stabil.

$$h_1[n]\in l^1,\ h_2[n]\in l^1\ \Rightarrow (h_1*h_2)[n]\in l^1$$

Suma de convoluţie este comutativă.

$$h_e[n]=h_1[n]*h_2[n]=h_2[n]*h_1[n]$$

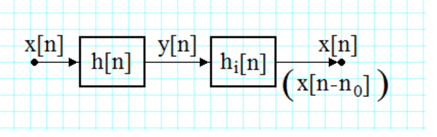


La conectarea în cascadă nu contează ordinea.

Sistemul invers

Sistemul cu raspunsul la impuls $h_i[n]$ este inversul sistemului cu raspunsul la impuls $h[n]$ daca prin conectarea lor in cascada se obtine un sistem identitate.

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$



Un exemplu de sistem invers. Pentru sistemul de intarziere :

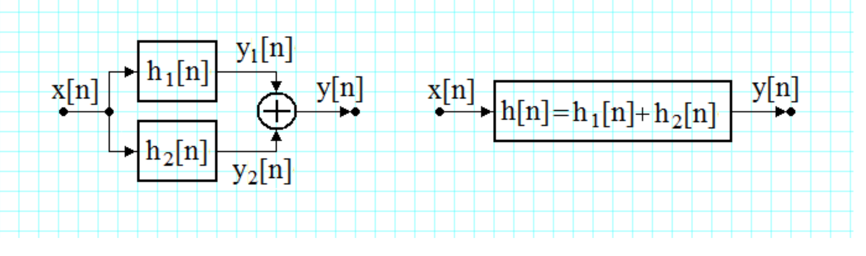
$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

Sistemul invers

$$h_i[n] = \delta[n + n_0]$$

Deplasarea in timp in sensul invers pe axa timpului. Nu este un sistem cauzal

Distributivitatea convoluţiei faţă de adunare. Conectarea în paralel a SLITD



- Convolutia este distributiva fata de adunare

$$(x * h_1)[n] + (x * h_2)[n] = (x * (h_1 + h_2))[n]$$

Demonstratie

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = (x * h_1)[n] + (x * h_2)[n] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_2[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot (h_1[n-k] + h_2[n-k]) =$$

$$= (x * (h_1 + h_2))[n]$$

17

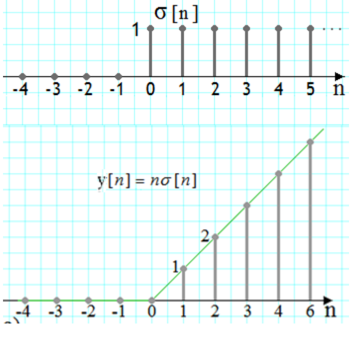
Functia indiciala a unui SLITD, s[n]: Răspunsul la treapta unitara

$$x[n] = \sigma[n], \quad y[n] = s[n] = h[n] * \sigma[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

Daca sistemul este cauzal,

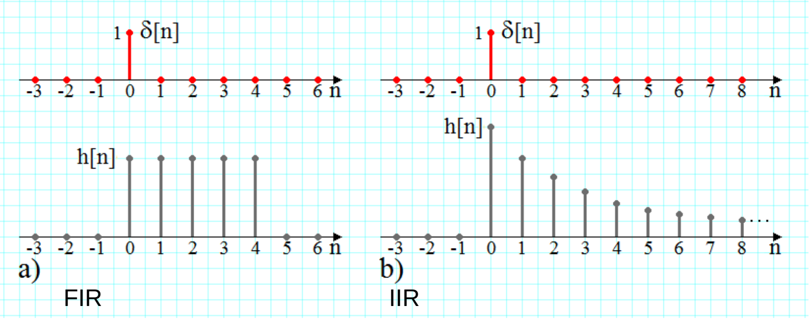
$$h[n] \equiv 0, \text{ pentru } n < 0 \Rightarrow s[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]$$



Functia indiciala a unui acumulator este un semnal rampa

$$x[n] = \sigma[n] \Rightarrow s[n] = n\sigma[n]$$

SLITD cu răspuns finit la impuls (FIR) şi cu răspuns infinit la impuls (IIR)



$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

•Raspuns la impuls cu durata finita (FIR) sau cu durata infinita (IIR).

FIR

- Ecuatia cu diferente finite

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Un sistem FIR are proprietatea :

$$a_0 \neq 0 \text{ and } a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 0$$

20

Semnalul de iesire

- Folosind ecuatia cu diferente finite:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

- Folosind definitia convolutiei:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

FIR

- Prin identificare se obtine:

$$h[k] = \begin{cases} \frac{b_k}{a_0}, & k = 0,1,....,M \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

- Se observa ca raspunsul la impuls are durata finita, M+1, de aici si numele **“sistem cu raspuns finit la impuls”**

Sisteme IIR (Infinite Impulse Response)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \ ; \ a_0 \neq 0 \text{ si } a_1 \neq 0$$

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] \qquad x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

$y[-1] = 0;$ condiţie iniţială nulă

$$y[0] - 0.5y[-1] = x[0] = 1 \Rightarrow y[0] = 1 \Rightarrow y[0] = h[0]$$

$$y[1] - 0.5y[0] = x[1] = 0 \Rightarrow y[1] = 0.5 \Rightarrow y[1] = h[1]$$

$$y[2] - 0.5y[1] = x[2] = 0 \Rightarrow y[2] = 0.5^2 \Rightarrow y[2] = h[2]$$

$$y[3] - 0.5y[2] = x[3] = 0 \Rightarrow y[3] = 0.5^3 \Rightarrow y[3] = h[3]$$

$$h[n] = 0.5^n \sigma[n]$$

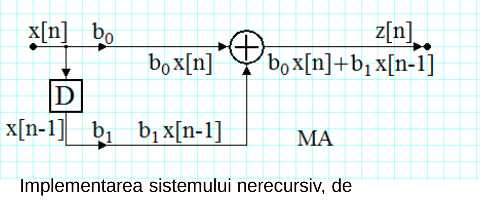
Implementarea SLITD caracterizate prin ecuaţii cu diferenţe finite, liniare şi cu coeficienţi constanţi

- SLITD sunt descrise matematic prin ecuatii cu diferente finite cu <u>coeficienti constanti</u>.
- Sunt implementate folosind subsistemele: celule de memorare (intarziere), multiplicatoare cu o constanta, sumatoare.

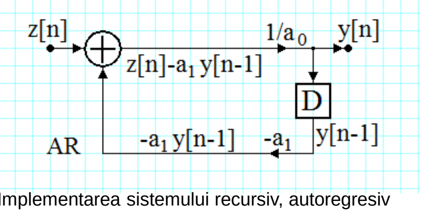
Sisteme de ordinul unu, Implementarea directă I

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = \underbrace{b_0 x[n] + b_1 x[n-1]}_{z[n]}$$

- O celula de memorare: intrare x[n], iesire x[n-1]
- Doua multiplicatoare cu o constanta, b_0 si b_1 : b_0x[n] si b_1x[n-1]
- Un sumator



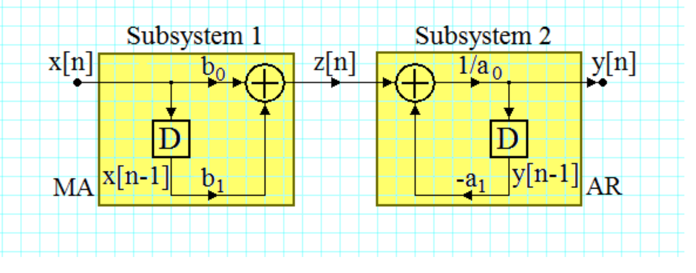
Implementarea sistemului nerecursiv, de mediere alunecatoare (Moving average) MA. Iesire: z[n]



Implementarea sistemului recursiv, autoregresiv (Autoregressive) AR. Iesire: y[n]

25

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$



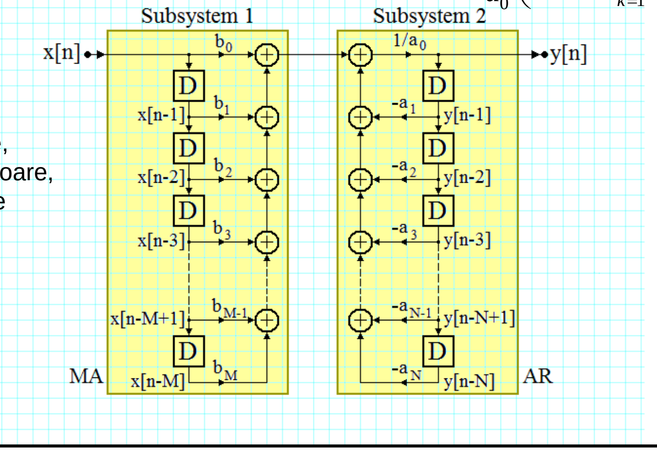
26

Sistem de ordinul *N* $$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \;;$$

$$z[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(z[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right)$$

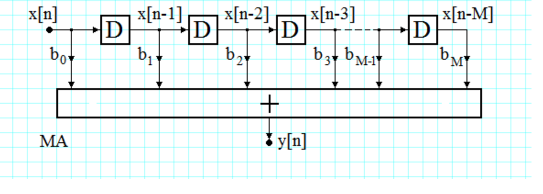
Celule de memorare, multiplicatoare, sumatoare



27

Forma transversala pentru FIR

- Consideram un sistem FIR :
$$y[n] = \frac{1}{a_0}(z[n])$$
- Sub-sistemul 2 = multiplicator cu $1/a_0$
- Substituim cele M sumatoare din subsistemul 1 cu un singur sumator cu *M* intrari

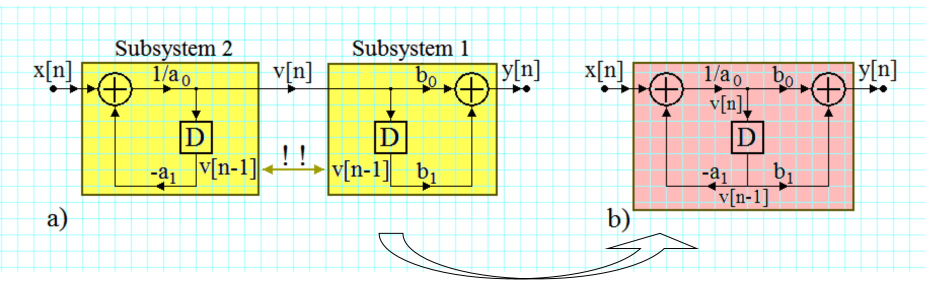


- Am presupus ca a_0=1

28

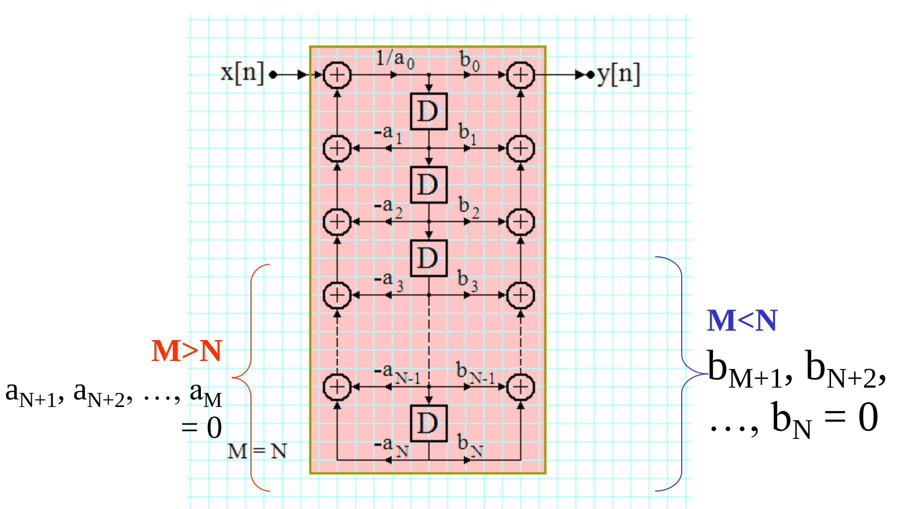
Implementarea directă II

•Ordinea sistemelor nu este importanta (conexiune in serie)
•Daca se schimba ordinea: se obtine o forma echivalenta implementarii directe I, si anume implementarea directa II.



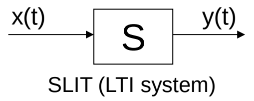
Se inlatura sistemele de intarziere redundante

Sistem de ordin N, Implementarea directă II



Produsul de convoluţie. Răspunsul SLITC la un semnal de intrare oarecare

- SLIT descris matematic de operatorul S. Trebuie sa gasim iesirea y(t) atunci cand se cunoaste intrarea x(t).



- **Reamintire:** Proprietatea de filtrare a impulsului Dirac δ(t)

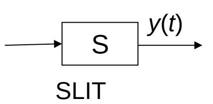
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\delta(\tau)\,d\tau = \varphi(0)$$

- Daca vom considera functia test x(τ), iar ca impuls, varianta deplasata in timp cu t (aici variabila timp este τ), atunci avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$

31

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$



•Semnalul de iesire

$$y(t) = S\{x(t)\} = S\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{const.}}\, \delta(t - \underbrace{\tau}_{\text{const.}})\,d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, S\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau$$

Produsul de convolutie a semnalelor *x* si *h.*
Se poate calcula raspunsul unui sistem cunoscut, cu raspunsul la impuls (*h*) la un semnal de intrare oarecare (*x*)

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau}$$

32

Proprietati

- **Elementul neutru:** distributia Dirac, δ(t).

$$x(t)*\delta(t)=x(t),\ \ \forall\, x(t)$$

- Convolutia este **comutativa** aproape peste tot (a.p.t.). Cu notatia t – u = τ, avem:

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,f(t-u)\,du=(g*f)(t)$$

- Convolutia este **distributiva in raport cu adunarea**

$$(x*h_1)(t)+(x*h_2)(t)=\big(x*(h_1+h_2)\big)(t)$$

- Convolutia este **asociativa**

$$\big(f(t)*g(t)\big)*h(t)=f(t)*\big(g(t)*h(t)\big)$$

33

Cateva remarci

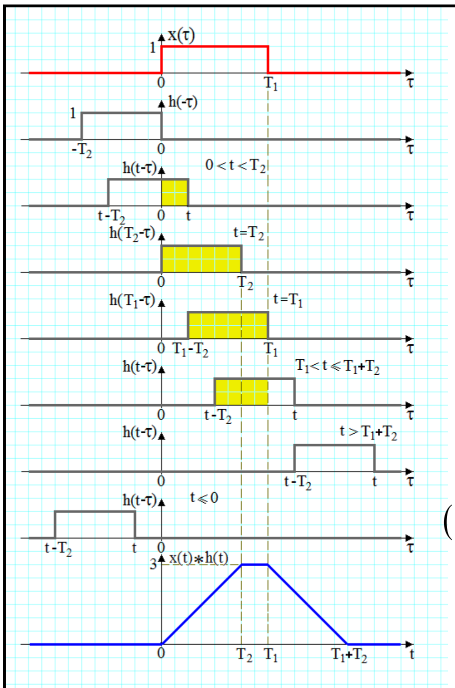
- Daca x(t), h(t) $\in L^1$, clasa functiilor absolut integrabile (sistemul este stabil), atunci

$$y(t)=x(t)*h(t)\in L^1$$

- Daca x(t), h(t) $\in L^2$, clasa functiilor cu patratul modulului integrabil (energie finita), atunci convolutia x(t)*h(t) exista, este marginita si continua
- Daca unul din factori este din L^1, iar celalalt din L^2, de ex. semnalul de intrare este de energie finita, x(t) $\in L^2$ si sistemul este stabil h(t) $\in L^1$, atunci iesirea este de energie finita

$$y(t)=x(t)*h(t)\in L^2$$

34



Exemplul 1) semnale de durata finita

$$f(t)=\sigma(t)-\sigma(t-T_1)$$
$$g(t)=\sigma(t)-\sigma(t-T_2)$$

Durata convolutiei = T_1+T_2 (suma duratelor celor doua semnale)

$$(f*g)(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & 0\le t<T_2\\ T_2, & T_2\le t\le T_1\\ T_1+T_2-t, & T_1\le t\le T_1+T_2\\ 0, & t>T_1+T_2\end{cases}$$

35

- Se noteaza g(-τ) = z(τ)
- Se deplaseaza in timp z(τ) cu *t* catre dreapta:

$$t<0,\ \ f(\tau)g(t-\tau)=0;$$

$$0<t\le T_2,\ \ (f*g)(t)=\int_0^t d\tau=t;$$

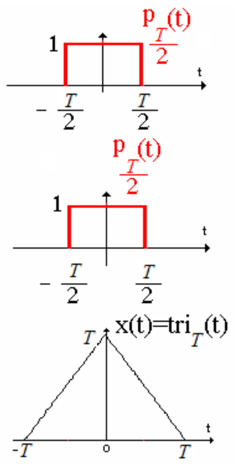
$$T_2\le t\le T_1,\ \ (f*g)(t)=\int_{t-T_2}^{t} d\tau=T_2;$$

$$T_1\le t\le T_1+T_2,\ \ (f*g)(t)=\int_{t-T_1}^{T_2} d\tau=T_1+T_2-t;$$

$$t>T_1+T_2,\ f(\tau)f(t-\tau)=0,\ \ (f*g)(t)=0.$$

36

Exemplul 2)



$$f(t)=\sigma\left(t+\frac{T}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right);$$

$$g(t)=f(t);$$

$$(f*g)(t)=T\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\left(\sigma(t+T)-\sigma(t-T)\right);$$

37

Exemplul 3)

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{|t|}}\cdot\frac{1}{|t|+1},\quad f(t)*f(t)=?$$

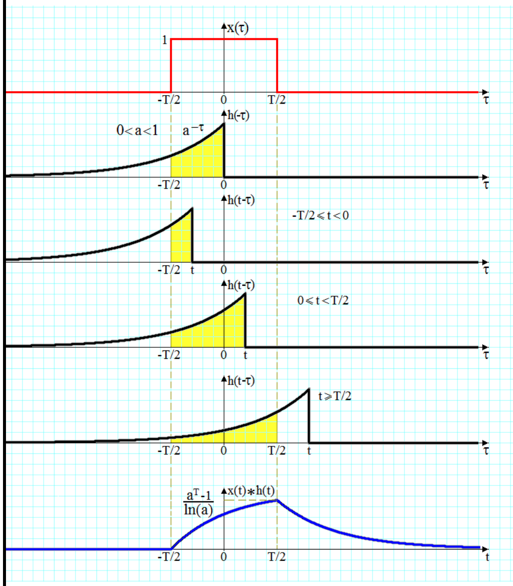
- *f(0)*$\to\infty$; *f*(*t*) *si* | *f*(*t*)| sunt pare.
- functia *f* apartine lui L^1

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=2\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1}=2\operatorname{arctg}u\Big|_0^{\infty}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi<\infty$$

- *f * f* este convergenta a.p.t; dar nu si in *t=0*

$$(f*f)(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot f(-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{\left(|\tau|+1\right)^2}d\tau$$

38



Exemplul 4)

$$f(t)=\sigma\left(t+\frac{T}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right);$$

$$g(t)=a^t\sigma(t)\ ,\ 0<a<1;$$

$(f*g)\in L^2$ durata infinita

$$(f*g)(t)=\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}\left[\left(1-a^{t+\frac{T}{2}}\right)\sigma\left(t+\frac{T}{2}\right)-\left(1-a^{t-\frac{T}{2}}\right)\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right)\right].$$

- $t < -T/2$, $f*g(t) = 0$.
- $-T/2 < t < T/2$ suprapunere partiala:

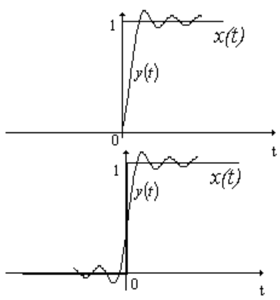
$$(f*g)(t)=\int_{-\frac{T}{2}}^{t}a^{t-\tau}d\tau=\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}\left(-a^{t+\frac{T}{2}}+1\right)$$

- $t \geq T/2$ suprapunere completa:

$$(f*g)(t)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}a^{t-\tau}d\tau=\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}\left(a^{t-\frac{T}{2}}-a^{t+\frac{T}{2}}\right).$$

Condiţia ca un SLITC să fie cauzal

Exemplu de sistem cauzal



Exemplu de sistem necauzal

$$h(t)\equiv 0,\quad t<0 \Leftrightarrow h(t)=h(t)\cdot\sigma(t),$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Daca si semnalul de intrare este cauzal, $x(t)=x(t)\cdot\sigma(t)$ se obtine:

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t} x(t-\tau)h(\tau)d\tau;$$

$$y(t)=y(t)\sigma(t)$$

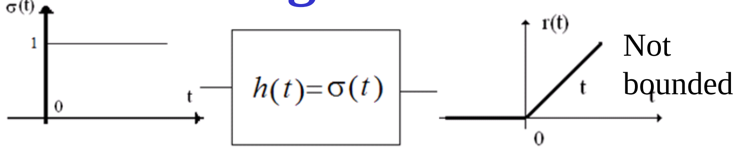
Conditia de BIBO stabilitate a SLITC

- Stabilitate “bounded input bounded output”

Un sistem continuu SLIT, este stabil daca si numai daca raspunsul sau la impuls este absolut integrabil

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau<\infty, h(t)\in L^1$$

Integratorul



Răspunsul la impuls, h(t), al unui integrator este $\sigma(t)$.

$$x(t)=\delta(t)\Rightarrow y(t)=h(t)=\sigma(t)$$

Răspunsul la un semnal marginit, de exemplu, σ(t), este semnalul rampa, care este nemarginit.

$$(\sigma*\sigma)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau=\begin{Bmatrix}t, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{Bmatrix}=t\cdot\sigma(t).$$

Integratorul este un sistem instabil. Se foloseste in practica fiindca semnalele de intrare sunt de durata finita (caz in care semnalul de iesire va fi marginit).

Răspunsul indicial al unui SLITC

- Raspunsul indicial=raspunsul la treapta unitara.

$$\boxed{s(t)=h(t)*\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau}$$

- Derivata sa de ordinul unu este raspunsul la impuls. $\boxed{s'(t)=h(t)}$
- Sistem cauzal:

$$s(t)=h(t)*\sigma(t)=\int_{0}^{t}h(\tau)d\tau$$

44

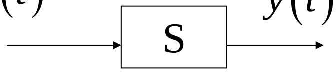
- Raspunsul sistemului *h* la semnalul rampa

$$x(t)=t\sigma(t) \ \Rightarrow \ y(t)=S\{t\sigma(t)\}=h*(t\sigma(t));$$

- Derivata de ordinul doi a lui y(t) este h(t).

$$y''(t)=h*(t\sigma(t))''=h*\delta=h.$$

$x(t)=t\sigma(t)$ $\qquad$ $y(t)=h(t)*t\sigma(t)$

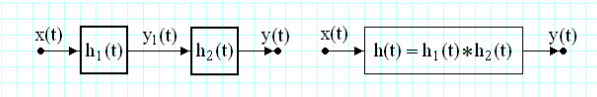


$y''(t)=h(t)$

LTI system

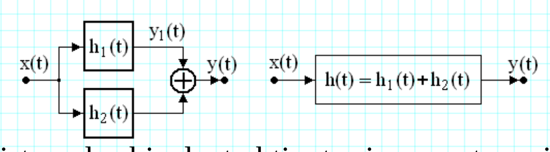
- Raspunsul la impuls h(t) este:
  - **derivata de ordinul intai a raspunsului indicial s(t)**
  - **derivata de ordinul doi a raspunsului la semnalul rampa**

Semnificatia practica a proprietatilor produsului de convolutie



•Sistemul echivalent obtinut prin conectarea in serie a doua sisteme are raspunsul la impuls

$$h(t) = h_2(t) * h_1(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

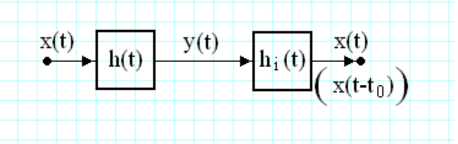


•Sistemul echivalent obtinut prin conectarea in paralel a doua sisteme are raspunsul la impuls

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

47

Sistemul invers. Sistemul identitate



- Doua sisteme conectate in serie, al doilea sistem invers, atunci iesirea este semnalul de intrare original

$$y(t)=x(t)$$

- Sistemul echivalent, $h(t) * h_i(t)$, este un sistem identitate

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

48

Implementarea SLITC caracterizate de ecuaţii diferenţiale liniare, cu coeficienţi constanţi

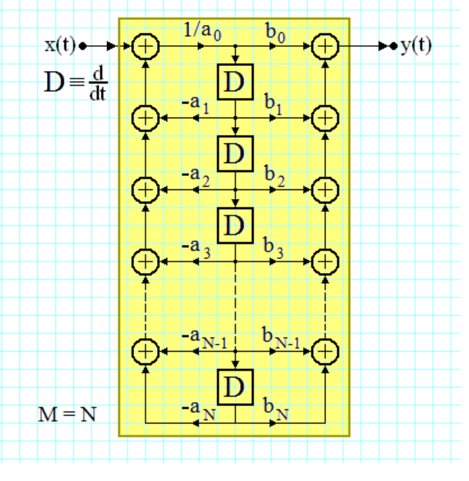
Exemple de SLITC caracterizate de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi: derivator, integrator

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Forma generală a ecuaţiei diferenţiale :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad a_N \neq 0$$

Implementarea in forma directa II cu circuite de derivare



$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad a_N \neq 0$$

- Sistem de ordinul N
- Forma directa II: sistemele de intarziere (timp discret) → circuite de derivare (timp continuu).
- Dificil de construit

Implementarea in forma directa II cu circuite de integrare

- Sunt preferabile circuitele de integrare.
- Integram de N ori ecuatia diferentiala $\Rightarrow$ o ecuatie integrala. Cu notatiile

$$y_{(0)}, y_{(1)}, \ldots, y_{(N)}, x_{(0)}, x_{(1)}, \ldots, x_{(N)}$$

- obtinem ecuatia integrala:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t).$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad a_N \neq 0$$

$$y_{(0)}(t) = y(t),$$

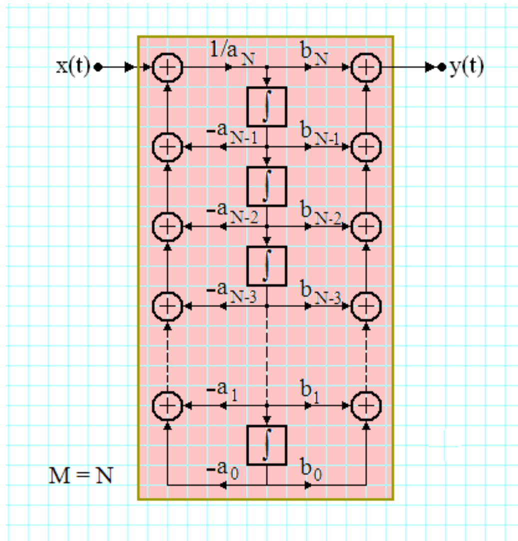
$$y_{(1)}(t) = y(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau_1) d\tau_1$$

$$y_{(2)}(t) = y(t) * \sigma(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

....

$$y_{(k)}(t) = y_{(k-1)}(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\tau_k} \int_{-\infty}^{\tau_{k-1}} \ldots \int_{-\infty}^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_{k-1} d\tau_k$$

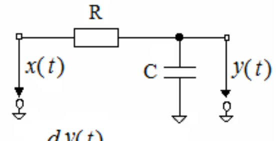
$$x_{(0)}(t) = x(t) \; ; \; x_{(1)}(t) = x(t) * \sigma(t), \ldots$$



53

Exemple

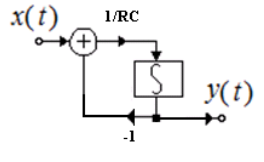
i) Sistemul de ordinul intai



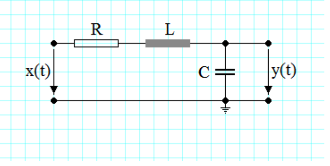
$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

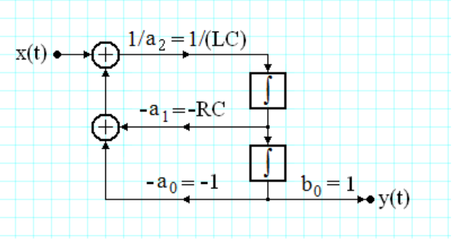
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$a_0=1, a_1=RC, b_0=1$



Exemplu, sistem de ordinul doi





$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}+RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y_{(n-k)}(t)=\sum_{k=0}^{N}b_k x_{(n-k)}(t),$$

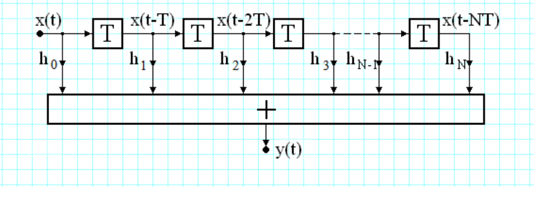
$$LCy_{(0)}(t)+RCy_{(1)}(t)+y_{(2)}(t)=x_{(2)}(t)$$

- Prin identificare se obtin coeficientii, si obtinem forma II de implementare

$$a_0=1\ ;\ a_1=RC\ ;\ a_2=LC \qquad b_0=1$$

Structura transversala pentru sisteme FIR

- Raspunsul la impuls: $h(t)=\sum_{k=0}^{N}h_k\delta(t-kT).$



$$y(t)=x(t)h_0+x(t-T)h_1+\ldots+x(t-NT)h_N,$$

$$y(t)=x(t)*\sum_{k=0}^{N}h_k\delta(t-kT)=x(t)*h(t),$$

$$h(t)=\sum_{k=0}^{N}h_k\delta(t-kT).$$