Modulația de amplitudine şi frecvență

Scopul lucrării

Se studiază formele de undă şi spectrele semnalelor transmise prin modulaţie cu undă continuă, insistându-se asupra cazurilor modulației de amplitudine (MA) și a celei de frecvență (MF).

1. Modulația cu undă continuă: noțiuni de bază

Modulația este un procedeu care permite transmisia unui semnal ce conține informație (denumit semnal modulator, sau mesaj), prin modificarea caracteristicilor esențiale ale unui semnal purtător, care are doar rolul de a transporta informația propriu zisă. De cele mai multe ori acest semnal purtător este unul sinusoidal, caz în care avem de a face cu o modulare în undă continuă. Așa cum se știe, un asemenea semnal este descris complet de trei parametri: amplitudine, frecvență și fază inițială. După cum semnalul modulator modifică unul dintre acești parametri, transmisia se face cu modulare de amplitudine, modulare de frecvență sau modulare de fază. Ultimele două tipuri sunt regrupate sub denumirea de modulație în unghi.

Semnalul inițial, care trebuie transmis, se mai numeşte și semnal în banda de bază. Unul dintre efectele inerente ale modulației este translatarea spectrului semnalului din banda de bază (spectru centrat pe frecvența 0) la o frecvență centrală mai înaltă, adecvată transmisiei prin canal. În principiu, această din urmă frecvență corespunde celei a semnalului purtător.

Exemplu: Semnalul transmis în radiodifuziune este unul audio, cu un spectru de frecvențe având componente până la 20 KHz. Totuși, atunci când dorim să ascultăm un post de radio, de exemplu din gama FM, ne vom poziționa cu receptorul nostru pe o frecvență mult mai mare (de ex. 100 MHz). Aceasta este de fapt frecvența purtătoare folosită în transmisie, și calarea receptorului pe această frecvență permite efectuarea corectă a demodulării.

2. Modulația de amplitudine

Se consideră un semnal purtător de forma:

$$x_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) \tag{2.1}$$

Fie semnalul modulator $x_m(t)$. Expresia generală a unui semnal modulat în amplitudine, în care modulatorul este $x_m(t)$, iar purtătorul este semnalul cosinusoidal indicat în (2.1) este:

$$x_{MA}(t) = A_p(1 + k_a x_m(t))\cos(2\pi f_p t) \qquad (2.2)$$

Constanta k_a, având dimensiunea [V^{-1}] se numeşte sensibilitatea de amplitudine a modulatorului. Se observă în relația (2.2) că, în urma modulării, amplitudinea semnalului modulat în amplitudine (MA) nu mai este constantă, precum cea a semnalului purtător. Ea este modelată de către caracteristicile semnalului modulator, prin intermediul termenului $k_a x_m(t)$. Pentru că amplitudinea unui semnal cosinusoidal este, prin definiție, o mărime pozitivă, se impune condiția:

$$\left|k_a x_m(t)\right| \le 1 \qquad (2.3)$$

În cazul în care acestă condiție nu este respectată, apare fenomenul de supra-modulație, al cărui efect este distorsionarea anvelopei semnalului MA, afectându-se astfel demodularea corectă a semnalului. Valoarea maximă a membrului stâng al ecuației 2.3 se numeşte grad de modulație, şi se exprimă de obicei sub formă procentuală:

$$m = \left|k_a x_m(t)\right|_{\max} \cdot 100 \ [\%] \qquad (2.4)$$

În fig. 2.1 se arată purtătoarea cosinusoidală, un semnal modulator (prin coincidență tot cosinusoidal), şi două cazuri de modulare. În fig. 2.1 c) se observă un caz de modulare corectă, în timp ce în următorul caz (fig. 2.1 d), apar distorsiuni ale anvelopei de modulație, din pricina fenomenului de supra-modulație (m>1).

O condiție importantă pentru ca demodularea să se desfăşoare corect este ca frecvența semnalului purtător să fie mult mai mare decât frecvența maximă din spectrul semnalului de transmis (f_m):

$$f_p \gg f_m \qquad (2.5)$$

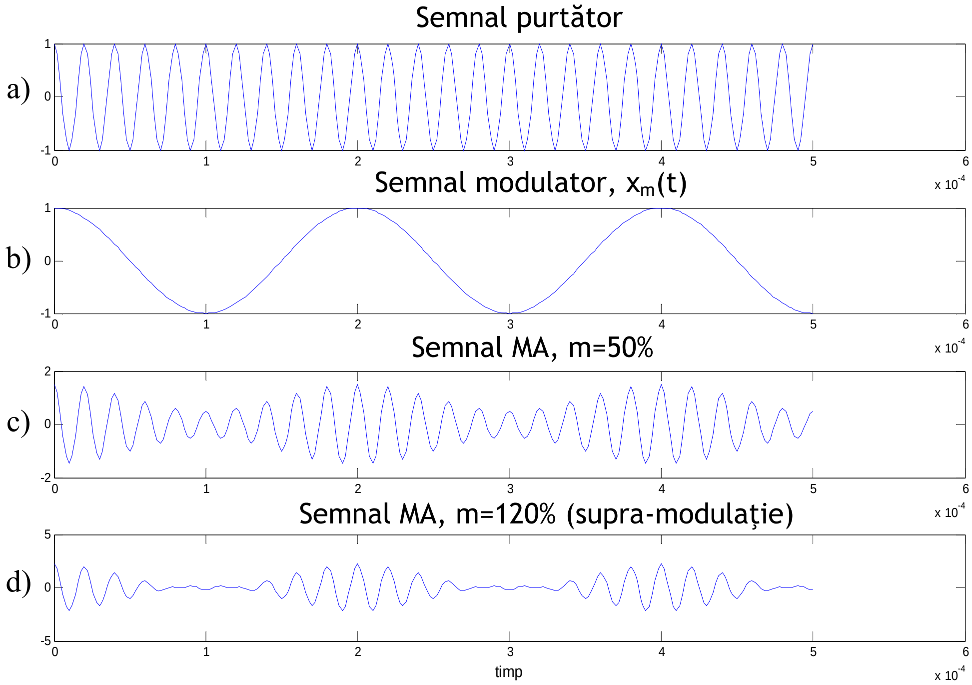

Fig. 2.1: Modulația de amplitudine cu modulator $x_m(t)$ cosinusoidal şi ilustrarea supra-modulației.

Dacă această condiție este îndeplinită, gradul de modulare poate fi determinat destul de simplu în practică, folosind osciloscopul. Pentru explicitare, se redă semnalul modulat din figura 2.1c, anvelopa sa ilustrându-se prin linia punctată (fig 2.2).

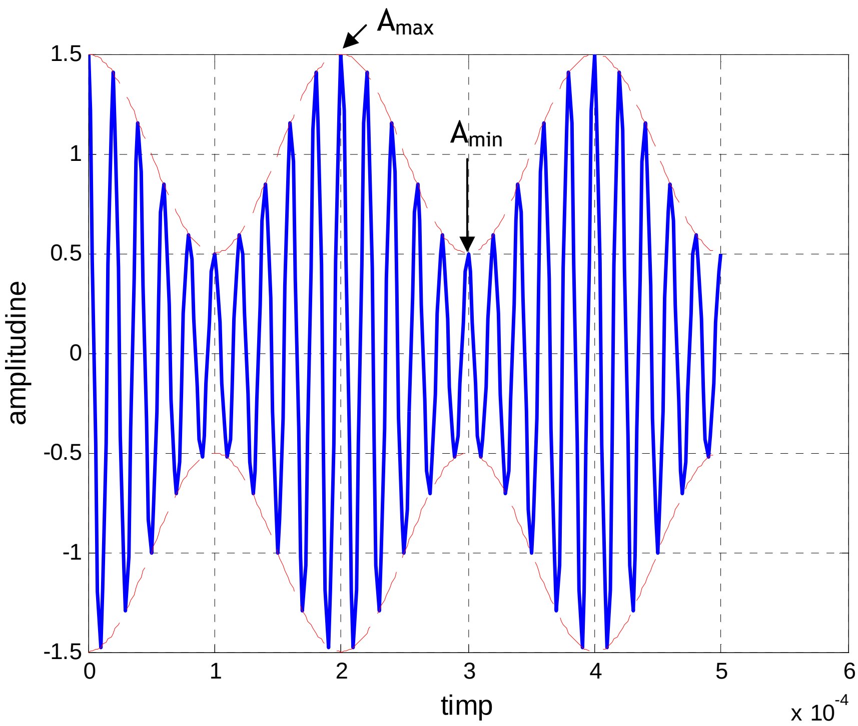

Fig. 2.2: Măsurarea gradului de modulație cu ajutorul osciloscopului.

Formulare de aproximare este:

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} \cdot 100\,[\%] \tag{2.6}$$

În exemplul de mai sus se observă uşor că $A_{\max} = 1.5\,V$ şi $A_{\min} = 0.5\,V$, de unde se obține *m=50%.*

Spectrul semnalului modulat în amplitudine rezultă rapid prin aplicarea transformării Fourier asupra ecuației (2.2):

$$X_{MA}(\omega) = \pi A_c\left[\delta(\omega-\omega_p)+\delta(\omega+\omega_p)\right] + \frac{k_a A_c}{2}\left[X_M(\omega-\omega_p)+X_M(\omega+\omega_p)\right] \tag{2.7}$$

Un exemplu grafic este dat în figura 2.2:

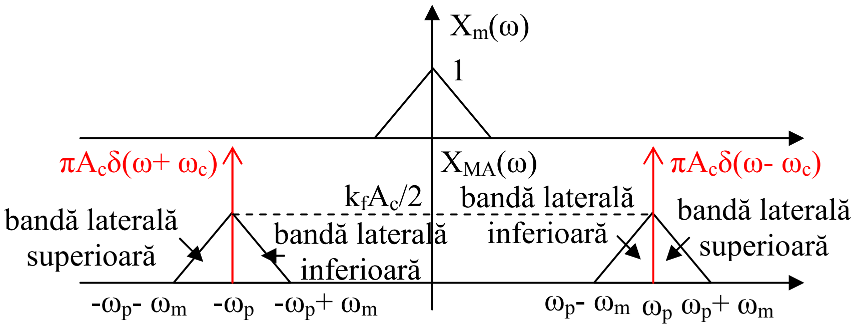

Fig. 2.2: Spectrul semnalului modulat în amplitudine.

Se observă în spectru cele două impulsuri Dirac corespunzătoare purtătoarei, precum şi faptul că un efect direct al modulației este „translatarea” spectrului semnalului din banda de bază (vezi $X_m(\omega)$) pe frecvența purtătoare. Banda ocupată de către semnalul modulat, situată la dreapta frecvenței purtătoare se numeşte bandă laterală superioară, iar cea din stânga acesteia se numeşte bandă laterală inferioară. Tot din figură se poate deduce că banda semnalului MA este dublul benzii semnalului modulator:

$$B_{MA} = 2 \cdot B_M = 2 \cdot \omega_m \tag{2.8}$$

Trebuie remarcat că transmisia purtătoarei diminuează randamentul energetic al modulației, deoarece purtătoarea în sine nu conține informație utilă. De asemenea, întrucât o singură bandă laterală este suficientă pentru efectuarea demodulației, transmiterea a două benzi risipeşte lățimea de bandă. Acestea sunt motivele pentru care, în practică se preferă adeseori alte versiuni ale MA:

- modularea de amplitudine cu purtătoare suprimată (MAPS) şi două benzi laterale (modularea de produs) (engl. "suppressed-carrier Amplitude Modulation")
- modularea în amplitudine cu bandă laterală unică (MABLU) (engl. "single side-band Amplitude Modulation", SSB-AM)
- modularea în amblitudine cu rest de bandă laterală (MARBL) (engl. „vestigial side-band Amplitude Modulation",VSB-AM)

Revenind la formula de calcul a spectrului semnalului MA, să particularizăm analiza printr-un exemplu, acela în care semnalul modulator este el însuşi cosinusoidal. Forma din domeniul timp a semnalului este în acest caz arătată în fig 2.1. În cazul modulatorului cosinusoidal, gradul de modulare este $m = k_a A_m / A_c$. Expresia corepunzătoare reprezentării semnalului poate fi obținută din ecuația (2.2), folosind particularizarea $x_m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$:

$$x_{MA}(t) = A_p \left(1 + m\cos\left(\omega_m t\right)\right)\cos(\omega_p t) \tag{2.9}$$

Acest semnal se poate rescrie ca şi:

$$x_{MA}(t) = A_p \cos(\omega_p t) + \frac{mA_p}{2}\cos(\omega_p + \omega_m)t + \frac{mA_p}{2}\cos(\omega_p - \omega_m)t \tag{2.10}$$

Spectrul unui asemenea semnal corespunde unei sume de trei cosinusoide, aşa cum ne arată ecuația (2.10), pulsațiile fiind ω_p, $\omega_p - \omega_m$ şi $\omega_p + \omega_m$. Reprezentarea grafică a acestui spectru este dată în figură.

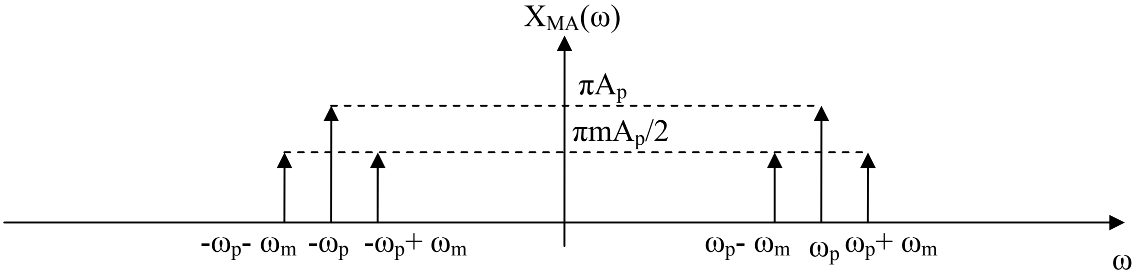

Fig. 2.3: Spectrul semnalului MA cu modulator cosinusoidal.

3. Semnale modulate în frecvență

Descrierea matematică a semnalelor modulate în frecvență, cu purtător armonic este:

$$x_{MF}(t) = A(t)\cos(\varphi(t)) \tag{3.1}$$

Funcția $\varphi(t)$ se numeşte faza semnalului $x_{MF}(t)$. Pentru o mai bună înțelegere a modulației de frecvență se poate face o paralelă cu modulația de amplitudine. Astfel, în cazul semnalelor modulate în amplitudine (sau chiar dacă se consideră doar semnalul purtător nemodulat), expresia fazei este:

$$\varphi(t) = \omega_p t + \phi_p \tag{3.2}$$

Reamintim că la modulația de amplitudine, amplitudinea semnalului modulat nu mai este constantă, ci ea devine o funcție de timp, A(t), ce depinde de semnalul modulator. În schimb, pentru semnalele cu modulație unghiulară, funcția A(t) este constantă, transferul de informație de la semnalul modulator la semnalul modulat fiind descris exclusiv de funcția $\Phi(t)$. Mai precis, în cazul modulației de frecvență, informația este transmisă prin intermediul derivatei fazei semnalului modulat în raport cu variabila timp. Această derivată este denumită *pulsație instantanee* a semnalului și este notată cu $\omega_i(t)$:

$$\omega_i(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \tag{3.3}$$

Înlocuind (3.2) în (3.3), vom constata că, în cazul modulației în amplitudine, pulsația instantanee este constantă, ea coinicizând chiar cu pulsația semnalului purtător. În cazul modulației de frecvență însă, tocmai $\omega_i(t)$ este cel care transportă informația dată de semnalul modulator.

Aplicând operatorul de integrare asupra ecuației (3.3), se obține:

$$\phi(t) = \int \omega_i(t)dt \tag{3.4}$$

Considerând că expresia semnalului purtător este:

$$x_p(t) = A_p \cos(\omega_p t) \tag{3.5}$$

expresia pulsației instantanee a semnalului modulat în frecvență devine:

$$\omega_i(t) = \omega_p + 2\pi k_F x(t) \tag{3.6}$$

unde cu *x(t)* s-a notat semnalul modulator (de transmis), iar cu k_F coeficientul de conversie a amplitudinii în frecvență al dispozitivului care realizează modularea (sensibilitate de frecvență), măsurat în Hz/V. Expresia semnalului modulat în frecvență devine (în ipoteza că semnalul este cauzal):

$$x_{MF}(t) = A_p \cos\Phi_{MF}(t) = A_p \cos(\int_0^t \omega_i(\tau)d\tau) = A_p \cos\left(\omega_p t + 2\pi k_F \int_0^t x(\tau)d\tau\right) \tag{3.7}$$

Forma finală a ecuației 3.7 este de reținut ca modalitate generică de exprimare a expresiei unui semnal modulat în frecvență.

Notând $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$, relația (3.7) se mai scrie:

$$x_{MF}(t) = A_p \left(\cos(\omega_p t)\cos(2\pi k_F y(t)) - \sin(\omega_p t)\sin(2\pi k_F y(t))\right) \tag{3.8}$$

În funcție de rezultatul comparației dintre $\max_t\{k_F y(t)\}$ şi $\pi/2$, se poate face următoarea clasificare a semnalelor modulate în frecvență:

- dacă $\max_t\{k_f y(t)\}$ << $\pi/2$, atunci efectul modulării de frecvență asupra semnalului purtător e slab şi spectrul semnalului modulat nu e cu mult mai larg decât spectrul semnalului purtător. De aceea, în acest caz se vorbeşte despre modulație de bandă îngustă.

- dacă $\max_t\{k_f y(t)\}$ >> $\pi/2$, atunci spectrul semnalului modulat ete mult mai larg decât spectrul semnalului purtător şi de aceea, se vorbeşte despre modulație de frecvență de bandă largă.

3. 1 Spectrul semnalelor modulate în frecvență cu modulator sinusoidal

Se consideră acum cazul în care semnalul modulator este tot un semnal cosinusoidal, ca și cel purtător. Acest caz particular ne va înlesni abordarea problematicii spectrului semnalelor modulate în frecvență. Să considerăm deci:

$$x_m(t) = A_m \cos(\omega_m t) \tag{3.9}$$

Expresia pulsației instantanee devine în acest caz:

$$\omega_i(t) = \omega_p + 2\pi k_F A_m \cos(\omega_m t) \tag{3.10}$$

Notând $\Delta f = k_F A_m$, şi numind această mărime deviația de frecvență, expresia fazei instantanee devine:

$$\begin{aligned}\Phi_{MF}(t) &= \omega_p t + 2\pi k_F \int_0^t A_m \cos(\omega_m \tau) d\tau = \omega_p t + (2\pi k_F A_m / \omega_m)\sin(\omega_m t) = \\ &= \omega_p t + (\Delta\omega / \omega_m)\sin(\omega_m t)\end{aligned} \tag{3.11}$$

Notând $\beta = \Delta\omega / \omega_m$ şi numind această mărime indicele modulației de frecvență, expresia semnalului MF devine:

$$x_{MF}(t) = A_p \cos(\omega_p t + \beta \sin(\omega_m t)) \tag{3.12}$$

sau:

$$x_{MF}(t) = A_p \cos(\omega_p t)\cos(\beta \sin(\omega_m t)) - A_p \sin(\omega_p t)\sin(\beta \sin(\omega_m t)) \tag{3.13}$$

Funcțiile $\cos(\beta \sin(\omega_m t))$ și $\sin(\beta \cos(\omega_m t))$ sunt funcții periodice, de perioadă $2\pi / \omega_M$, având următoarele descompuneri în serie Fourier:

$$\cos(\beta\sin(\omega_m t)) = J_0(\beta) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta)\cos(2k\omega_m t) \tag{3.14}$$

şi:

$$\sin(\beta\sin(\omega_m t)) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta)\cos((2k+1)\omega_m t) \tag{3.15}$$

unde $J_P(\beta)$ sunt funcţii Bessel de speţa I şi ordin p.

Folosind relaţiile de mai sus, şi proprietăţile funcţiilor Bessel, se obţine:

$$x_{MF}(t) = A_p \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_p + n\omega_m)t \tag{3.16}$$

Se observă că, deşi $x_m(t)$ este, în cazul studiat, un semnal de bandă limitată, $x_{MF}(t)$ este de bandă nelimitată, el fiind compus dintr-o infinitate de cosinusoide, separate intre ele pe axa pulsatiilor prin intervalul ω_m.

În funcţie de valoarea indicelui modulaţiei de frecvenţă , β, putem distinge între cazul modulaţiei de bandă îngustă, şi acela al modulaţiei de bandă largă. Asrfel, pentru $\beta << 1$, se obţine cazul modulaţiei de frecvenţă de bandă îngustă. Analizând conţinutul tabelelor care dau valorile funcţiilor Bessel de speţa I, se observă că în acest caz doar $J_0(\beta)$ şi $J_1(\beta)$ au valori semnificative. Aproximând celelalte funcţii Bessel cu 0, expresia semnalului modulat în frecvenţă devine:

$$x_{MF}(t) = A_p J_0(\beta)\cos(\omega_p t) + A_p J_1(\beta)\cos(\omega_p + \omega_m)t - A_p J_1(\beta)\cos(\omega_p - \omega_m)t \tag{3.17}$$

Se observă asemănarea spectrului de module al acestui semnal cu spectrul de modul al semnalului MA obţinut în acelaşi caz particular, şi anume când atât modulatorul cât şi purtătorul sunt semnale cosinusoidale.

Pentru valori mari ale lui β, valorile funcţiilor Bessel de speţa I, de ordin superior nu mai pot fi neglijate, banda de frecvenţă a semnalului modulat lărgindu-se.

3.1.2 Caracteristici globale ale modulației de frecvență cu modulator sinusoidal

Valoarea medie a puterii semnalului $x_{MF}(t)$ este:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T x_{MF}{}^2(t)dt \tag{3.18}$$

Presupunând că $\omega_p = m\omega_m = m\frac{2\pi}{\mathrm{T}}$, se obține $P_m = \frac{A_p{}^2}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta)$.

Folosind proprietatea remarcabilă a funcțiilor Bessel de spața I:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_K{}^2(\beta) = 1 \tag{3.19}$$

Rezultă că $P_m = \frac{A_p^2}{2}$, ceea ce demonstrează că puterea semnalului modulat în frecvență este egală cu puterea purtătorului.

Definind banda principală a semnalului modulat în frecvență ca fiind acea bandă de frecvență în care este localizată 99% din puterea acestui semnal, se poate demonstra că valoarea acesteia este bine aproximată de relația:

$$B = 2(1+\beta)\omega_m \tag{3.20}$$

Din această relație se constată că, pentru valori mari ale indicelui de modulație ($\beta \gg 1$):

$$B = 2\beta\omega_m = 2\Delta\omega \tag{3.21}$$

Din analiza ultimelor două relații se constată că, în acest caz extrem, banda principală a semnalului MF este constantă şi independentă de frecvența semnalului modulator.

4. Desfăşurarea lucrării

În cadrul părții practice a lucrării studenții vor efectua măsurători şi reprezentări grafice ale semnalelor MA şi MF şi a spectrului acestora.

4.1 Descrierea montajului experimental

Montajul folosit în acest scop este alcătuit din două generatoare de semnal (GEN1 şi GEN2), un osciloscop şi un analizor de spectru conectate în mod corespunzător. Unul dintre generatoarele de semnal este sursa unui semnal modulator, a cărui formă poate să fie sinusoidală, dreptunghiulară sau triunghiulară. Frecvenţa fundamentală a acestuia va fi fixată în jurul valorii f_m=20KHz. Acest semnal va modula, un semnal purtător sinusoidal cu o frecvenţă de f_p=500KHz. Semnalul purtător este generat de către cel de al doilea generator de semnal (GEN2), iar modularea sa se face prin aducerea semnalului modulator la o intrare specială situată pe panoul din spate al generatorului GEN2. Atât semnalul modulator, cât şi cel modulat vor fi disponibile pe osciloscop (sunt folosite ambele canale ale acestuia). Analiza spectrală se va face cu ajutorul analizorului de spectru.

4.2 Sarcini de îndeplinit de către studenţi

Pentru studiul MA, studenţii vor efectua următoarele sarcini:

- reprezentarea grafică a semnalului modulator şi a semnalului modulat, aşa cum sunt ele afişate pe osciloscop. Această operaţie se va efectua pentru trei tipuri de semnal modulator: sinusoidal, triunghiular, dreptunghiular. În cazul semnalului modulator sinusoidal, se va măsura şi gradul de modulaţie, prin metoda experimentală descrisă în partea teoretică a acestei lucrări. De fiecare dată, pe grafic se notează amplitudinea semnalului, frecvenţa semnalului modulator şi a celui purtător.
- reprezentarea grafică a spectrului semnalului MA, aşa cum rezultă el de pe analizorul de spectru. Se va acorda atenţie amplitudinii componentelor spectrale şi poziţionării acestora pe axa frecvenţelor. Această reprezentare se va face doar pentru semnalul modulator sinusoidal. După aceea, se comută semnalul modulator pe forma de undă dreptunghiulară. Ce fel de schimbări apar în spectrul semnalului MA faţă de cazul precedent. Cum vă explicaţi aceste schimbări?

În cazul studiului MF, vor fi efectuate următoarele operaţii:

- reprezentarea grafică a semnalului modulator şi a semnalului MF atunci când semnalul modulator este sinusoidal. Cum vă explicaţi forma de undă care apare pe ecranul osciloscopului?
- Se vizualizează şi se reprezintă grafic spectrul semnalului MF pentru cazul modulării de bandă îngustă. Creşteţi apoi amplitudinea semnalului modulator (astfel modificaţi indicele de

modulație β). Reprezentați din nou spectrul rezultat. Comparați cu cazul precedent şi cu spectrul de la MA.