Semnale aleatoare

Valoarea lor instantanee nu poate fi prezisa, pentru ca nu au expresii analitice. Astfel de semnale pot fi analizate pe baza proprietatilor lor statistice.

Cateva definitii utile pentru teoria probabilitatilor

Experiment aleator

Efectuand acelasi experiment aleator in conditii diferite se obtin rezultate diferite.

Zarul

Ω- multimea tuturor rezultatelor posibile pentru un experiment aleator – SPATIUL EVENIMENTELOR.

ω-un rezultat posibil-EVENIMENT ELEMENTAR.

O submultime a lui Ω compusa din cateva evenimente elementare -EVENIMENT.

Fie evenimentul: $A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Spunem ca acest eveniment a aparut daca in urma efectuarii experimentului aleator s-a obtinut unul dintre rezultatele ω_1, ω_2, sau ω_3.

Ω-EVENIMENTUL SIGUR

Ø-EVENIMENTUL IMPOSIBIL

Daca intersectia a doua evenimente este Ø atunci acestea sunt EVENIMENTE INCOMPATIBILE.

Evenimentele A_i a caror reuniune este egala cu Ω formeaza un GRUP COMPLET DE EVENIMENTE.

Ele realizeaza PARTIA τ a SPATIULUI EVENIMENTELOR.

Spatiul evenimentelor Ω asociat cu partitia τ reprezinta SPATIUL PROBABILIZABIL (Ω,τ).

Exemplu. Zarul.

Evenimentul sigur: {1,2,3,4,5,6}.

Evenimentul imposibil: {7}.

Aceste doua evenimente sunt incompatibile.

{A_1={1}, A_2={2}, A_3={3}, A_4={4}, A_5={5}, A_6={6} }-

grup complet de evenimente incompatibile.

Definitia probabilitatii

O functie definita pe (Ω,τ) cu valori in [0, 1], notata cu *P*, avand urmatoarele proprietati:

- *P*(Ø)=0,
- *P*(Ω)=1,
- Daca evenimentele A_i sunt incompatibile 2 cate 2 atunci:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Spatiul (Ω,τ) asociat cu probabilitatea P reprezinta un spatiu PROBABILIZAT (Ω,τ,P).

Cateva reguli pentru calculul probabilitatilor.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

unde ultimul termen din membrul drept reprezinta probabilitatea comuna a celor doua evenimente.

Daca evenimentele A si B sunt incompatibile atunci:

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B)=0;$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Daca aparitia evenimentului A este conditionata de aparitia evenimentului B atunci se spune ca EVENIMENTUL A este conditionat de evenimentul B si se foloseste notatia A/B.

Regula lui Bayes

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Daca: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

atunci evenimentele A si B se numesc INDEPENDENTE si regula lui Bayes devine: $P(A/B)=P(A)$.

Variabile aleatoare

O VARIABILA ALEATOARE REALA este o functie definita pe un spatiu probabilizat cu valori intr-o multime de numere reale.

Daca multimea valorilor este finita sau numarabila atunci variabila aleatoare reala se numeste DISCRETA.

Varaibila aleatoare X pune in corespondenta

evenimentul A_i (care apare cu probabilitatea $P(A_i)$) cu valoarea x_i.

Deci, valoarea x_i apare cu probabilitatea $P(A_i)=P_i$.

Asocierea valorii x_i evenimentului A_i

Este descrisa de:

- FUNCTIA DE REPARTITIE;
- DENSITATEA DE PROBABILITATE;
- FUNCTIA CARACTERISTICA;

a variabilei aleatoare considerate.

Functia de repartitie a unei variabile aleatoare discrete

Reprezinta probabilitatea ca variabila aleatoare considerata sa ia o valoare mai mica decat valoarea x specificata.

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

E usor de observat ca: $F_X(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0$

si ca: $F_X(\infty) = P(X \leq \infty) = 1$

Fie $X_v = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ multimea valorilor variabilei aleatoare, X considerate si fie $x_{m-1} < x < x_m$.

Evenimentul $X \leq x$ apare daca:

$X \leq x_1$ sau $x_1 < X \leq x_2$ sau,..., sau $x_{m-2} < X \leq x_{m-1}$.

Acestea sunt evenimente incompatibile. Deci:

$$P(X \leq x) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) + ... + P(x_{m-2} < X \leq x_{m-1});$$
$$F_X(x) = \sum_{\substack{k \\ x_k \leq x}} P(x_{k-1} < X \leq x_k), \text{ unde } x_0 = -\infty.$$

X poate lua valori doar din X_v. Deci evenimentul $x_{k-1} < X \leq x_k$ este identic cu evenimentul $X = x_k$.

In consecinta: $F_X(x) = \sum_{\substack{k \\ x_k \leq x}} P(X = x_k)\sigma(x - x_k).$

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \Rightarrow$$
$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) \Rightarrow$$
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a);$$
$$a < b \Rightarrow F_x(a) < F_x(b).$$

Functia de repartitie a unei variabile aleatoare este crescatoare.

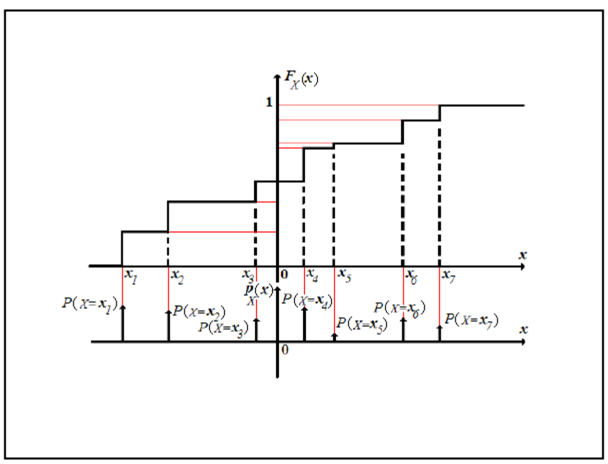
Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare

Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare reprezinta derivata I a functiei sale de repartitie.

$$p_X(x) = \frac{d}{dx}\left(F_X(x)\right)$$

Daca variabila aleatoare este discreta atunci:

$$p_X(x) = \sum_{\substack{k \\ x_k \le x}} P\left(X = x_k\right) \cdot \delta\left(x - x_k\right).$$



Cazul variabilelor aleatoare continue

- Multimea valorilor unei variabile aleatoare continue nu este numarabila, ea poate fi de exemplu un interval de numere reale. Evenimentului A_i i se asociaza intervalul I_i.

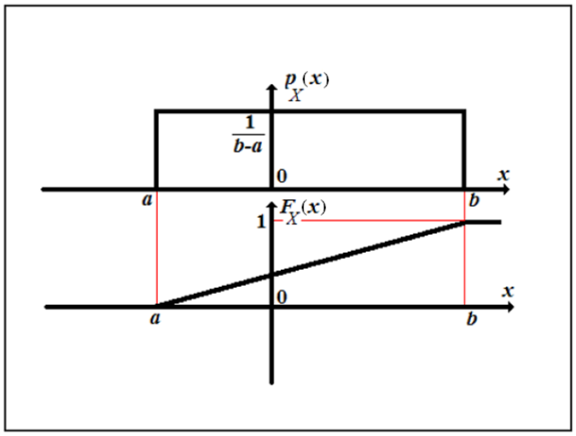
$$P(X = x_i \in I_i) = 0. \ P(X \in I_i) = P(A_i).$$

- Functia de repartitie a unei variabile aleatoare continue este continua.

Un exemplu. Repartitia uniforma

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x < a \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Cazul variabilelor aleatoare mixte

Multimea valorilor unei variabile aleatoare mixte este reuniunea unui interval cu o multime numarabila.

$$p_X(x) = f(x) + \sum_{\substack{k \\ x_k < x}} P(X = x_k) \cdot \delta(x - x_k)$$

Cazul variabilelor aleatoare bi-dimensionale

O variabila aleatoare bi-dimensionala este un cuplu de variabile aleatoare unidimensionale, (X,Y).

FUNCTIA DE REPARTITIE COMUNA

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

DENSITATEA DE PROBABILITATE COMUNA

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

DENSITATILE DE PROBABILITATE MARGINALE

X si Y sunt variabile aleatoare continue

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dy$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dx$$

X si Y sunt variabile aleatoare discrete

$$p_X(x_i) = \sum_k P(X = x_i\ , Y = y_k);$$

$$p_Y(y_i) = \sum_k P(X = x_k\ , Y = y_i).$$

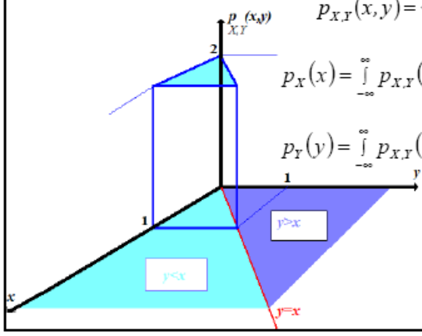
Variabilele aleatoare X si Y sunt independente daca densitatea lor de probabilitate comuna este egala cu produsul densitatilor lor de probabilitate marginale.

Un Exemplu

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dy=\int_0^x 2dy=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dx=\int_y^1 2dx=\begin{cases}2(1-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$



Variabilele aleatoare X si Y nu sunt independente.

Caracterizarea numerica a variabilelor aleatoare

MOMENTUL DE ORDINUL k al variabilei aleatoare discrete X este definit de:

$$M\left[X^k\right]=\sum_i x_i^k \cdot P(X=x_i)$$

Momentul de ordinul I al variabilei aleatoare reprezinta media sa statistica.

$$m_X=M[X]=\sum_i x_i \cdot P(X=x_i)$$

MOMENTUL CENTRAT DE ORDINUL k al variabilei aleatoare discrete X este definit de:

$$M\left[\ddot{X}^k\right]=\sum_i (x_i-m_X)^k \cdot P(X=x_i)$$

Momentul centrat de ordinul doi se numeste DISPERSIE.

$$\sigma_X^2 = M\left[\ddot{X}^2\right] = \sum_i \left(x_i - m_X\right)^2 \cdot P\left(X = x_i\right)$$

σ_X – abatere standard.

In cazul variabilelor aleatoare continue:

$$M\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_X(x)dx \,; M\left[\ddot{X}^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_X\right)^k p_X(x)dx$$

$$m_X = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx \,; \sigma_X^2 = M\left[\ddot{X}^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_X\right)^2 p_X(x)dx$$

Cazul variabilelor aleatoare bi-dimensionale

- Momentul de ordinul I: $M[XY]$- CORELATIA variabilelor aleatoare X si Y.
- Momentul centrat de ordinul I: $M\left[\ddot{X}\ddot{Y}\right]$ - COVARIANTA variabilelor aleatoare X si Y.

X si Y – variabile aleatoare continue

$$R_{XY} = M[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy p_{X,Y}(x,y)dxdy;$$

$$C_{XY} = M\left[\ddot{X}\ddot{Y}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) p_{X,Y}(x,y)dxdy$$

X si Y - variabile aleatoare discrete

$$R_{XY} = \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot P\left(X = x_i, Y = y_j\right);$$

$$C_{XY} = \sum_i \sum_j \left(x_i - m_x\right)\left(y_j - m_y\right) \cdot P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$$

$$R_{XY} = C_{XY} + m_X m_Y$$

COEFICIENTUL DE CORELATIE

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} + m_X m_Y \; ; \left|\rho_{XY}\right| \leq 1$$

Daca ρ_{XY}=0 atunci variabilele aleatoare X si Y sunt necorelate.

Functii aleatoare

- Variabile aleatoare →Functii aleatoare→

Semnale aleatoare

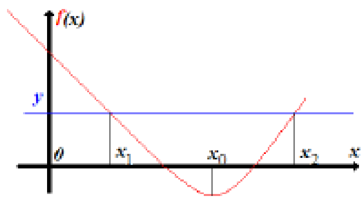
Transformarea functionala a unei variabile aleatoare

$$Y = f(X); \; p_X(x) \rightarrow p_Y(y)?$$

Daca variabila aleatoare X este discreta densitatea sa de probabilitate nu este afectata de nici o transformare functionala.

$$p_Y(x) = p_X(x)$$

Transformarea functionala a unei variabile aleatoare continue



$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(x_1<X\le x_2)=F_X(x_2)-F_X(x_1).$$

$$p_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{d}{dy}\left(F_X(x_2)-F_X(x_1)\right)=$$

$$=\frac{dF_X(x_2)}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dy}-\frac{dF_X(x_1)}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dy}=\frac{p_X(x_2)}{\left(\frac{dy}{dx_2}\right)}+\frac{p_X(x_1)}{-\left(\frac{dy}{dx_1}\right)}.$$

Dar:

$$\frac{dy}{dx_2}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_2}>0 \text{ si } \frac{dy}{dx_1}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}<0$$

Deci: $p_Y(y)=\dfrac{p_X(x_2)}{\left|\frac{dy}{dx_2}\right|}+\dfrac{p_X(x_1)}{\left|\frac{dy}{dx_1}\right|}=\sum_{k=1}^{2}\left.\dfrac{p_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\right|_{x=x_k}$

Daca *f* are *N* intervale de monotonie atunci $p_Y(y)=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{p_X(x_k)}{\left|\frac{dy}{dx_k}\right|}$

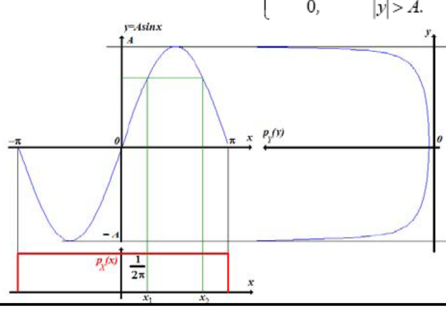
Un exemplu

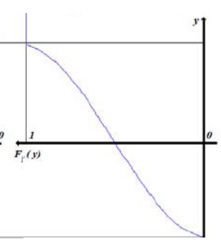
Fie *X* o variabila aleatoare uniform distribuita in intervalul

$[-\pi,\pi]$ si $f(x)=A\sin x$. Aceasta functie are doua intervale de monotonie, ea este crescatoare pe $[-\pi/2, \pi/2]$ si descrescatoare in rest.

$$\left|\frac{dy}{dx_k}\right|=\left|A\cos x_k\right|=\left|A\sqrt{1-\sin^2 x_k}\right|=\left|\sqrt{A^2-y^2}\right| \qquad p_Y(y)=\frac{p_X(x_1)}{\left|\frac{dy}{dx_1}\right|}+\frac{p_X(x_2)}{\left|\frac{dy}{dx_2}\right|}=\frac{2}{2\pi\sqrt{A^2-y^2}}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2-y^2}}, & |y|\le A\\ 0, & |y|>A.\end{cases}$$

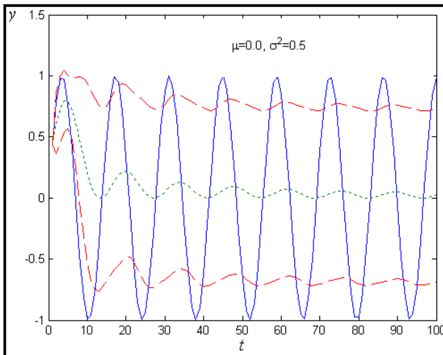


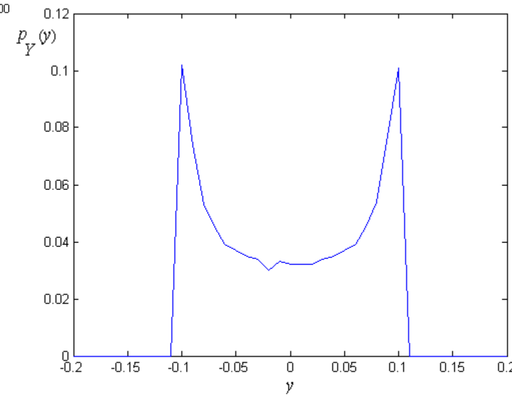


$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}p_Y(u)du=$$

$$=\begin{cases}0, & y<-A\\ \displaystyle\int_{-A}^{y}\frac{du}{\pi\sqrt{A^2-u^2}}, & -A\le y<A\\ \displaystyle\int_{-A}^{A}\frac{du}{\pi\sqrt{A^2-u^2}}, & y\ge A\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{y}{A}.$$





Functia caracteristica a unei variabile aleatoare

Se noteaza cu $\Phi_Y(u)$ si reprezinta media variabilei aleatoare $Y = f(X)$ unde:

$$f(x) = e^{jux}$$

$$\Phi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy \; ; \; p_Y(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \cdot p_X(x) = \frac{1}{jue^{jux}} \cdot p_X(x) = \frac{e^{-jux}}{ju} \cdot p_X(x) \Rightarrow$$

$$\Phi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \cdot \frac{e^{-jux}}{ju} \cdot p_X(x) \cdot jue^{jux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) e^{jux} dx = \Im\{p_X(x)\}(-u).$$

Functia caracteristica a variabilei aleatoare X reprezinta transformata Fourier reflectata a densitatii sale de probabilitate.

Functia caracteristica a unei variabile aleatoare se foloseste la calculul momentelor sale.

$$\frac{d}{du}\left(\Phi_X(u)\right) = j\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) e^{jux} dx \Rightarrow \frac{1}{j}\frac{d}{du}\left(\Phi_X(u)\right)\Big|_{u=0} = M\{X\}.$$

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\Phi_X(u)\right) = j^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) e^{jux} dx \Rightarrow \frac{1}{j^2}\frac{d^2}{du^2}\left(\Phi_X(u)\right)\Big|_{u=0} = M\{X^2\}.$$

Operatii cu variabile aleatoare

Variabila aleatoare Z, rezultatul unei operatii in care sunt implicate variabilele aleatoare X si Y poate fi privita ca si rezultatul aplicarii functiei de doua variabile f cuplului de variabile aleatoare (X,Y):

$Z = f(X,Y)$. Deci:

$$m_Z = M\{f(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) p_{X,Y}(x,y) dxdy;$$

$$\sigma_Z^2 = M\left(\dot{Z}^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x,y) - m_Z\right)^2 p_{X,Y}(x,y) dxdy;$$

Suma a doua variabile aleatoare

$$Z = X + Y \Rightarrow m_Z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)p_{X,Y}(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy = m_X + m_Y \Rightarrow$$

$$m_{X+Y} = m_X + m_Y.$$

$$\sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,y)p_{X,Y}(x,y)dxdy + m_Z^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dxdy -$$

$$2m_Z \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

Dar: $F_{X,Y}(\infty,\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$

si: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p_{X,Y}(x,y)dxdy = m_Z.$

$$\sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,y)p_{X,Y}(x,y)dxdy - m_Z^2.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,y)p_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{X,Y}(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_{X,Y}(x,y)dxdy +$$

$$+ 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_Y(y)dy + 2R_{XY}.$$

$$\sigma_Z^2 = M\{X^2\} + M\{Y^2\} + 2R_{XY} - (m_X + m_Y)^2 =$$
$$= M\{X^2\} - m_X^2 + M\{Y^2\} - m_Y^2 + 2(R_{XY} - m_X m_Y) =$$
$$= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2C_{XY}.$$
$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2C_{XY}.$$

Daca X si Y sunt necorelate:

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2.$$

Functii aleatoare in timp

T – multime de momente,

O functie aleatoare de timp este o aplicatie a produsului $\Omega\mathrm{x}T$ in R, $(t,\omega) \rightarrow X(t,\omega)$.

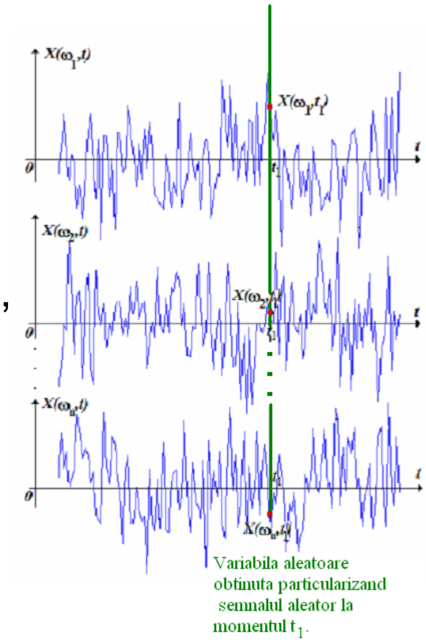
O functie aleatoare de timp este o colectie de variabile aleatoare indexate de elementele unei multimi T.

Un semnal aleator obtinut prin achizitionarea zgomotului termic de la n rezistoare avand aceasi rezistenta.

$X(\omega, t_1)$- variabila aleatoare,

$X(\omega_1, t)$- semnal, zgomotul termic al primului rezistor, prima realizare a semnalului aleator,

$X(\omega_1, t_1)$ - numar.



Caracterizarea statistica a semnalelor aleatoare

Functia de repartitie de ordinul I a semnalului aleator $X(\omega, t)$

$$F_X(x, t_1) = P(X(\omega, t_1) \leq x);$$

Densitatea de probabilitate de ordinul I a semnalului aleator $X(\omega, t)$:

$$p_X(x, t_1) = \frac{\partial F_X(x, t_1)}{\partial x};$$

Media semnalului aleator $X(\omega,t)$:

$$m_X(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x,t_1) dx;$$

Dispersia semnalului aleator $X(\omega,t)$:

$$\sigma_X^2(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t_1))^2 p_X(x,t_1) dx;$$

Cuplul de variabile aleatoare $X_1 = X(\omega,t_1)$ si

$X_2 = X(\omega,t_2)$ reprezinta variabila aleatoare bidimensionala (X_1, X_2). Folosind-o putem defini statisticile de ordinul 2 ale semnalului aleator considerat.

Functia de distributie de ordinul 2 a semnalului aleator $X(\omega,t)$ este functia de repartitie comuna a variabilei aleatoare bidimensionale:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2,t_1,t_2) = P(X(\omega,t_1) \le x_1, X(\omega,t_2) \le x_2);$$

Momentul de ordinul 1 al variabilei aleatoare bidimensionale reprezinta corelatia statistica a semnalului aleator $X(\omega,t)$,

$$R_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_{X_1,X_2}(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

Multimea de variabile aleatoare

$$\{X_1=X(\omega,t_1),X_2=X(\omega,t_2),\ldots,X_n=X(\omega,t_n)\}$$

reprezinta o variabila aleatoare n-dimensionala. Alocarea proprietatilor statistice ale acestei variabile aleatoare semnalului aleator permite analiza sa statistica de ordinul n.

Functia de repartitie de ordinul n a semnalului aleator $X(\omega,t)$ este definita cu:

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots,t_n)=P(X(\omega,t_1)\le x_1,X(\omega,t_2)\le x_2,\ldots,X(\omega,t_n)\le x_n);$$

Caracterizarea temporala a semnalelor aleatoare

Semnalul $x_k(t) = X(\omega_k, t)$ reprezinta cea de a k-a realizare a semnalului aleator. Media sa temporala este data de:

$$\langle m_k \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_k(\tau) d\tau$$

Media sa patratica temporala este:

$$\langle m_k^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_k^2(\tau) d\tau$$

si este egala cu puterea realizarii.

Corelatia temporala a celei de a k-a realizari a semnalului aleator este exprimata de:

$$\langle R_k(\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_k(t) x_k(t+\tau) dt.$$

Valoarea $\langle R_k(0) \rangle$ este egala cu puterea celei de a k-a realizari.

Semnale aleatoare stationare

Un semnal aleator este strict stationar daca toate caracteristicile sale statistice sunt invariante in timp. De exemplu densitatea sa de probabilitate de ordinul n are proprietatea:

$$\forall \tau \in R \; p_{X_1,\, X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) =$$
$$= p_{X_1,\, X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Caracteristicile statistice de ordinul I ale unui semnal aleator strict stationar au urmatoarele proprietati :

$$p_X(x, t_1) = p_X(x), \forall t_1;$$
$$m_X(t_1) = m_X, \forall t_1;$$
$$\sigma_X^2(t_1) = \sigma_X^2, \forall t_1.$$

Caracteristicile statistice de ordinul doi nu mai sunt funcții de doua momente t_1 si t_2, ele sunt functie doar de diferenta $\tau = t_1 - t_2$.

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2,t_1,t_2) = p_{X_1,X_2}(x_1,x_2,\tau);$$
$$R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau).$$

Un semnal aleator este stationar in sens larg daca sunt satisfacute doar ultimele cinci conditii.

Semnale aleatoare stationare

Ergodicitatea specifica o legatura intre caracteristicile statistice si temporale ale semnalului aleator.

Semnalul aleator este ergodic in sens larg daca mediile sale temporale $\langle m_k \rangle$ si $\langle R_k(\tau) \rangle$ nu depind de evenimentul ω_k.

$$\langle m_1 \rangle = \langle m_2 \rangle = \ldots = \langle m_n \rangle = \langle m \rangle$$
$$\langle R_1(\tau) \rangle = \langle R_2(\tau) \rangle = \ldots = \langle R_n(\tau) \rangle = \langle R(\tau) \rangle.$$

Daca semnalul aleator ergodic este si stationar atunci:

$$\langle m \rangle = m_X \text{ si } \langle R(\tau) \rangle = R_X(\tau).$$

Deci analiza statistica a unui semnal aleator ergodic si stationar poate fi realizata in domeniul timp folosind oricare dintre realizarile sale.

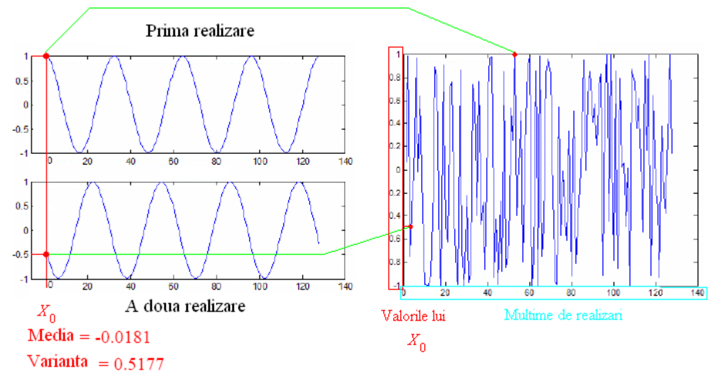
Un exemplu de semnal aleator ergodic si stationar

Se considera semnalul aleator ale carui realizari sunt semnale armonice de amplitudine A, pulsatie ω_0 si faza initiala distribuita uniform in intervalul $[-\pi, \pi]$:

$$x_k(t) = A sin(\omega_0 t + \alpha_k).$$

La momentul $t=0$, semnalul se particularizeaza la variabila aleatoare X_0 pe care am studiat-o deja.

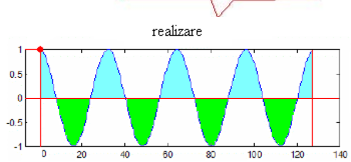
$$F_{X_0}(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}arcsin\frac{x}{A}+\frac{1}{2}, & |x|\le A\\ 0, & x<-A\\ 1, & x\ge A\end{cases}\ ;\ p_{X_0}(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}, & |x|\le A\\ 0, & |x|>A\end{cases}$$



Media statistica a variabilei aleatoare X_0 este nula deoarece densitatea sa de probabilitate este functie para. $m_{X_0}=\int_{-\infty}^{\infty} x p_{X_0}(x)dx=0$

Media temporala:

$$\langle m_k\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\,sin(\omega_0 t+\alpha_k)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{\text{constant}}{2T}=0;$$



Suma suprafetelor marcate cu albastru este practic egala cu suma suprafetelor marcate cu verde.

Deci: $\langle m\rangle=m_X.$

Dispersia variabilei aleatoare este:

$$M\{X_0^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \int_{-A}^{A} \frac{x^2}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx \overset{x=A\sin u}{=} \frac{A^2}{2} = \sigma_{X_0}^2.$$

Se calculeaza corelatia statistica a semnalului aleator considerat: $R_X(t_1, t_2) = M\{X_1 X_2\}$.

Considerand: $t_2 = t_1 + \tau$

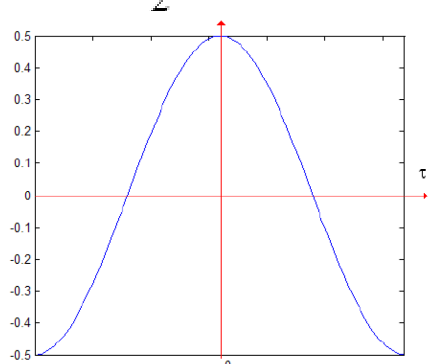
$$R_X(t_1, t_1 + \tau) = M\{A\sin(\omega_0 t_1 + \alpha) \cdot A\sin(\omega_0(t_1 + \tau) + \alpha)\} =$$
$$M\left\{\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 \tau)\right\} + M\left\{\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0(t_1 + \tau) + 2\alpha)\right\}$$

Primul termen $\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 \tau)$ nu este aleator. De aceea media sa statistica este egala cu el insusi.

Semnalul $\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0(t_1 + \tau) + 2\alpha)$ este o variabila aleatoare de acelasi tip ca si X_0.
Deci media sa statistica este egala cu 0.

In consecinta:

$$R_X(t_1, t_1 + \tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 \tau) = R_X(\tau).$$

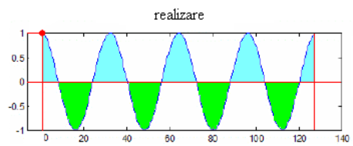


Deoarece media statistica si corelatia statistica sunt invariante in timp rezulta ca semnalul considerat este stationar in sens larg. Autocorelatia temporala:

$$\langle R_k(\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\sin(\omega_0 t+\alpha_k)A\sin(\omega_0(t+\tau)+\alpha)dt =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)\cdot 2T + \underbrace{\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(2t+\tau)+2\alpha_k]dt}\right]=$$

Suma suprafetelor marcate cu albastru este practic egala cu suma suprafetelor marcate cu verde.



$$\langle R_k(\tau)\rangle = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) = \langle R(\tau)\rangle.$$

Deci: $m_X = \langle m\rangle$ si $R_X(\tau) = \langle R(\tau)\rangle$

Deoarece mediile si corelatiile temporale nu depind de realizare semnalul aleator considerat este si ergodic in sens larg.

Puterea sa este egala cu:

$$R_X(0) = \frac{A^2}{2}.$$

In consecinta semnalul aleator considerat este ergodic si stationar in sens larg.

Analiza spectrala a semnalelor aleatoare

Se considera semnalul aleator $X(\omega,t)$ cu realizarile $x_k(t)$. Acestea nu sunt semnale de energie finita deoarece durata lor este infinita. Se considera restrictiile lor la intervalul $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$. Deoarece aceste restrictii au energii finite le putem calcula transformatele Fourier $X_{Tk}(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2} x_{Tk}(t)e^{-j\omega t}dt$ precum şi puterile.

$$P_k=\frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_{Tk}(\omega)\right|^2 d\omega=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x_{Tk}(t)\right|^2 dt.$$

Se noteaza cu $\frac{\left|X_{Tk}(\omega)\right|^2}{T}=\Phi_{P_k}(\omega,T)$ densitatile spectrale de putere ale fiecarei realizari. Ele reprezinta valorile unei variabile aleatoare. Pentru a defini densitatea spectrala de putere a semnalului aleator trebuie sa calculam media acestei variabile aleatoare. Densitatea spectrala de putere a semnalului aleator considerat este exprimata prin:

$$\Phi_{P_X}(\omega)=\lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{\left|X_{Tk}(\omega)\right|^2}{T}\right\}$$

$$\Phi_{P_X}(\omega) = \lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{|X_{Tk}(\omega)|^2}{T}\right\}$$

Se calculeaza limita cand T tinde la infinit pentru a reveni la semnalul aleator original ale carui realizari pot fi de durata infinita.

Teorema Wiener-Hincin

Densitatea spectrala de putere si corelatia statistica ale unui semnal aleator formeaza o pereche Fourier:

$$\Phi_{P_X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \Im\{R_X(\tau)\}$$

Deci densitatea spectrala de putere a semnalului aleator din ultimul exemplu este:

$$\Phi_{P_X}(\omega) = \frac{\pi A^2}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)].$$

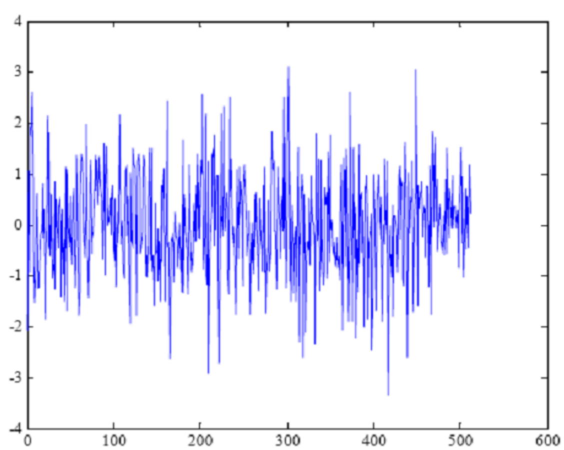
Zgomotul alb

Densitatea spectrala de putere a zgomotului alb este constanta. Denumirea acestui semnal aleator vine de la asocierea cu lumina alba care contine componente spectrale cu toate lungimile de unda.

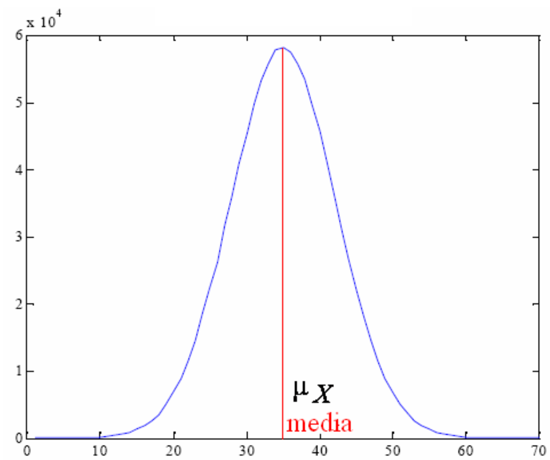
$$\Phi_{P_X}(\omega) = N_0;\ R_X(\tau) = N_0\delta(\tau).$$

Variabilele aleatoare $X(t_1)$ si $X(t_2)$ obtinute prin particularizarea zgomotului alb la momentele $t_1 \neq t_2$ sunt ne-corelate.

O realizare a unui zgomot alb

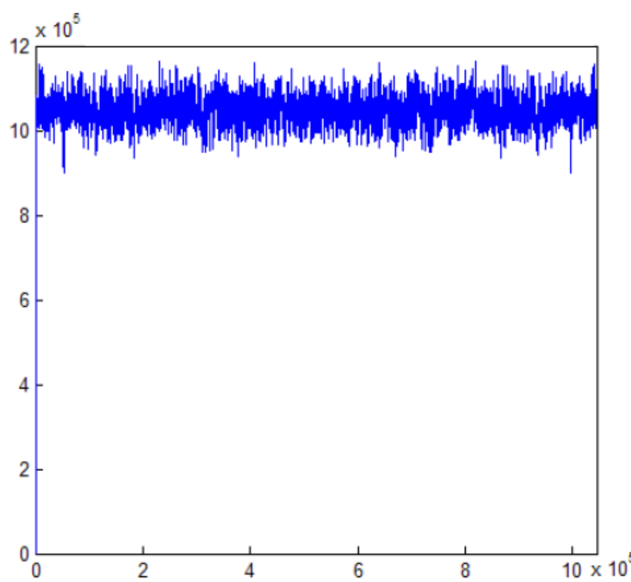


Densitatea de probabilitate a unui zgomot alb Gaussian



$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

Densitatea spectrala de putere a unui zgomot alb



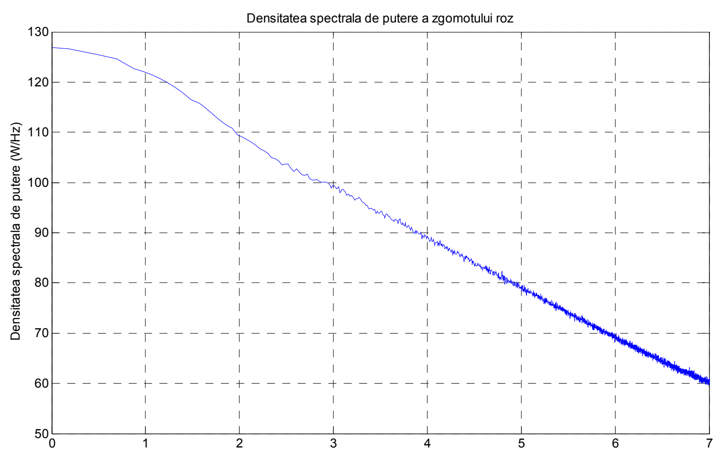
Zgomotul alb in timp discret

Este obtinut prin esantionarea uniforma a zgomotului alb in timp continuu. Esantioanele sale sunt ne-corelate.

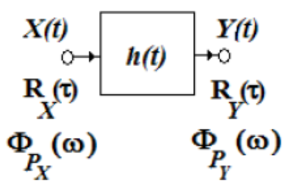
$$R_X[n] = N_0 \delta[n];$$
$$\Phi_{P_X}(\omega) = N_0.$$

Zgomotul roz

Densitatea sa spectrala de putere scade cu 10 dB/dec.



Raspunsul sistemelor liniare si invariante in timp la semnale aleatoare stationare



$$\Phi_{P_Y}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{P_X}(\omega);$$
$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau).$$

Un exemplu

Se calculeaza raspunsul unui sistem liniar si invariant in timp la un zgomot alb in timp continuu.

$$\Phi_{P_X}(\omega) = N_0 \,;\, H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\alpha} \Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2\omega^2}$$

$$\Phi_{P_Y}(\omega) = \frac{N_0}{1 + \omega^2\alpha^2};$$

$$R_X(\tau) = N_0\delta(\tau); R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau}}{1 + \omega^2\alpha^2} d\omega = \ldots = \frac{N_0}{2\alpha} e^{-\frac{|\tau|}{\alpha}}.$$

Efectul prelucrarii zgomotului alb este corelarea variabilelor aleatoare $X(t_1)$ si $X(t_2)$.

$$P_X \to \infty \,;\, P_Y = \frac{N_0}{2\alpha}.$$

Desi puterea semnalului de intrare este infinita puterea semnalului de iesire este finita.