

### 9.6 Relația dintre spectrul unui semnal discret și spectrul semnalului analogic din care provine

Dacă semnalul analogic  $x_a(t)$ , având spectrul  $X_a(\omega)$  se eșantionează, atunci secvența valorii eșantioanelor sale  $\{x_a(kT_e) \mid k \in Z\}$  formează un semnal discret, definit prin  $x_d[n] = x_a(nT_e)$ . Semnalul discret are spectrul  $X_d(\Omega)$ . Se pune întrebarea: deoarece între semnalul analogic și cel discret există o legătură, care este legătura dintre spectrele lor?

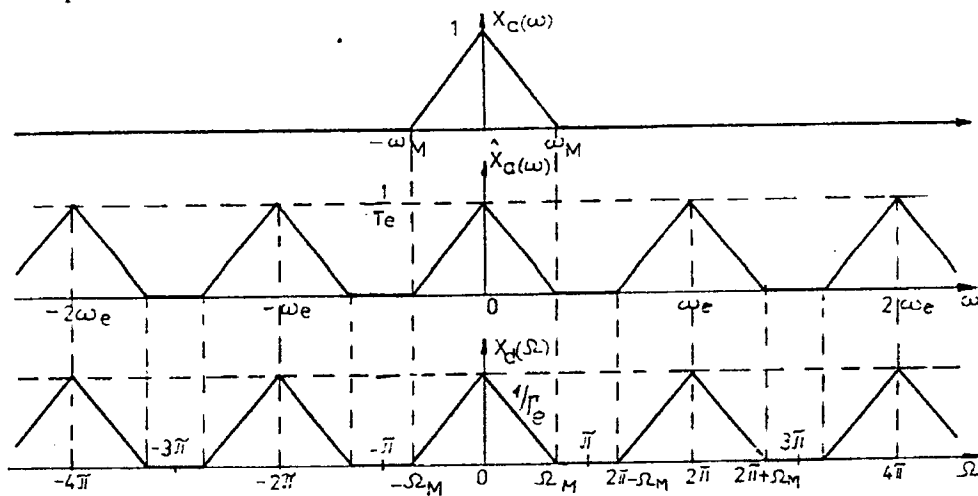


Fig. 9.22. Relația dintre spectrul unui semnal discret  $X_d(\Omega)$  și spectrul semnalului analogic din care provine,  $X_a(\omega)$ .

Se știe că:

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_e), \quad \omega_e = \frac{2\pi}{T_e}, \quad (9.43)$$

este spectrul semnalului  $\hat{x}(t) = x(t) \delta_{T_e}(t)$  din care provine. Dar  $\hat{X}(\omega)$  se poate calcula și prin aplicarea directă a transformatei Fourier semnalului  $\hat{x}(t)$ :

$$\begin{aligned}\hat{X}(\omega) &= \mathcal{F}\{x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_e) \delta(t - kT_e)\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_e) \mathcal{F}\{\delta(t - kT_e)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_e) e^{-j\omega kT_e}.\end{aligned}\quad (9.44)$$

Am ajuns la două expresii echivalente pentru spectrul  $\hat{X}(\omega)$ :

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_e) e^{-j\omega kT_e}.\quad (9.45)$$

Spectrul semnalului discret este:

$$X_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k] e^{-j\Omega k}.\quad (9.46)$$

Dacă în (9.46) se substituie  $x_d[n] = x_a(nT_e)$  se obține:

$$X_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k] e^{-j\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_e) e^{-j\Omega k}.\quad (9.47)$$

Se compară (9.45) cu (9.47). Se observă că punând în (9.45)  $\omega = \Omega/T_e$  se obține:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_e) e^{-j\omega kT_e} \Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T_e}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_e) e^{-j\Omega k},\quad (9.48)$$

sau pe baza relațiilor (9.45) și (9.46):

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_e) \Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T_e}} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_e} - k\frac{2\pi}{T_e}\right),$$

adică:

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_e} - k\frac{2\pi}{T_e}\right),\quad (9.49)$$

În figura 9.22 se poate urmări grafic modul de obținere al spectrului  $X_d(\Omega)$ . Între cele două axe de frecvență corespunzătoare spectrului eșantionat respectiv spectrului semnalului discret există relația:

$$\Omega = \omega T_e \quad . \quad (9.50)$$

Se explică acum și natura periodică a spectrului semnalului discret  $X_d(\Omega)$ . Între  $\Omega_M$  și  $\omega_M$  există o relație ce rezultă din (9.50):

$$\Omega_M = \omega_M T_e \quad ; \quad T_e \leq \frac{\pi}{\omega_M} \quad . \quad (9.51)$$

### 9.7 Eșantionarea semnalelor discrete

În prelucrarea numerică a semnalelor apar situații în care, ulterior achiziționării eșantioanelor, se constată că frecvența de eșantionare a fost prea mare. În principiu, acest lucru nu deranjează decât în măsura în care prelucrarea mai multor eșantioane decât este strict necesar duce la un timp de prelucrare inadmisibil de mare. În astfel de situații, când nu se mai poate eșantiona semnalul analogic, este posibilă eșantionarea semnalului numeric, reținându-se din acesta tot a N-a valoare.

Fie semnalul  $\delta_N[n]$  definit prin:

$$\delta_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \quad . \quad (9.52)$$

El este echivalent în spațiul semnalelor discrete distribuției  $\delta_{T_e}(t)$  din spațiul semnalelor definite în timp continuu (analogice). Trebuie menționat că  $\delta_N[n]$  este o funcție obișnuită.

Dacă  $x[n]$  este un semnal discret, atunci semnalul discret eșantionat  $\hat{x}[n]$  se obține prin produsul:

$$\hat{x}[n] = x[n] \delta_N[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \delta[n - kN] \quad . \quad (9.53)$$

În figura 9.23 este ilustrată eșantionarea semnalului  $x[n]$  cu pasul  $N = 3$ . Semnalul  $\hat{x}[n]$  conține între două valori prelevate din  $x[n]$  câte două (sau în cazul general câte  $N-1$ ) valori nule.

Vom presupune că restricția la perioada principală a spectrului  $X(\Omega)$  are suportul  $[-\Omega_M, \Omega_M]$ , unde  $\Omega_M < \pi$ . Dar, conform relației (6.60'), schimbând  $\Omega_0$  în  $\Omega_e$ , spectrul semnalului  $\delta_N[n]$  este:

$$\delta_N[n] \xrightarrow{\quad} \Omega_e \delta_{\Omega_e}(\Omega) = \Omega_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_e) \quad , \quad \Omega_e = \frac{2\pi}{N} \quad . \quad (9.54)$$

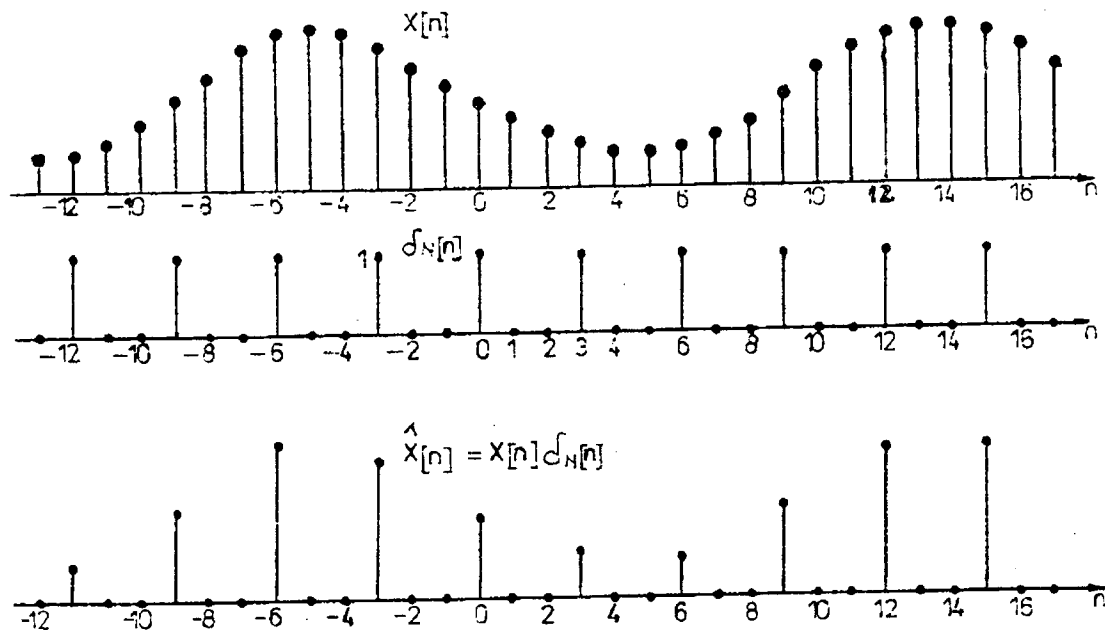


Fig. 9.23 Semnalul discret  $x[n]$  este eșantionat cu pasul  $N$ , obținându-se semnalul discret eșantionat  $\hat{x}[n]$ .

Aplicând teorema produsului semnalelor (teorema convoluției circulare în domeniul spectrului) rezultă spectrul semnalului eșantionat,  $\hat{X}(\Omega)$ :

$$\hat{X}(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n] \delta_N[n]\} = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \otimes \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_e); \quad \Omega_e = \frac{2\pi}{N}. \quad (9.55)$$

Deoarece convoluția circulară se efectuează pe o perioadă de lungime  $2\pi$ , va trebui să constatăm care dintre distribuțiile Dirac  $\delta(\Omega - k\Omega_e)$  au suportul în, să zicem  $[0, 2\pi)$ . Cum suportul lui  $\delta(\Omega - k\Omega_e)$  se reduce la  $\Omega = k\Omega_e$  (un punct), rezultă pentru  $k$  condiția:  $0 \leq k\Omega_e < 2\pi$  sau  $0 \leq k(2\pi/N) < 2\pi$ , adică  $0 \leq k < N$ . În consecință, indicele  $k$  în relația (9.55) se limitează la  $0 \leq k \leq N-1$  și deci, pentru calculul lui  $\hat{X}(\Omega)$  se poate calcula restricția sa la perioada principală  $\hat{X}_r(\Omega)$ , și apoi se poate prelungi prin periodicitate această restricție:

$$\hat{X}_r(\Omega) = \frac{1}{N} X_r(\Omega) * \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\Omega - k\Omega_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_r(\Omega - k\Omega_e), \quad \Omega_e = \frac{2\pi}{N}, \quad (9.56)$$

unde s-a notat cu  $X_r(\Omega)$  restricția la aceeași perioadă principală a lui  $X(\Omega)$ .

Deoarece  $X(\Omega)$  este periodic de perioadă  $2\pi$ , se observă imediat din (9.56) că prelungirea prin periodicitate cu perioada  $2\pi$  a lui  $X_r(\omega)$  este și periodică de perioadă  $\Omega_e$ ,  $\hat{X}(\Omega + \Omega_e) = \hat{X}(\Omega)$ . În consecință, așa cum rezultă și din figura 9.24, desenată pentru  $N = 3$ , spectrul semnalului eșantionat este periodic, de perioadă  $2\pi/N$ . Lobul spectral  $k = 0$  se întinde pe semiaxa  $\Omega > 0$  până la  $\Omega_M$ . Primul lob vecin, axat pe

$\Omega_e$ , are frecvența minimă  $\Omega_e - \Omega_M$ . Condiția de evitare a suprapunerii lobilor spectrali este  $\Omega_M \leq \Omega_e - \Omega_M$ , care se pune sub forma:

$$\Omega_e \geq 2\Omega_M ; \Omega_e = \frac{2\pi}{N} \tag{9.57}$$

Relația este asemănătoare cu (9.11), stabilită pentru semnalele analogice.

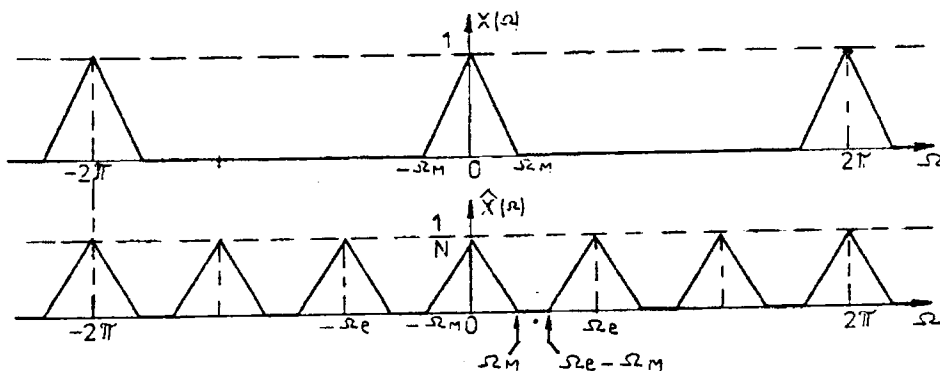


Fig. 9.24 Relația dintre spectrul unui semnal discret  $X(\Omega)$  și spectrul secvenței eșantionate  $\hat{X}(\Omega)$  pentru  $N = 3$ .

Cum  $\Omega_M = T_e \omega_M$ , unde  $\omega_M$  este frecvența maximă din spectrul semnalului analogic din care provine  $x[n]$ , iar  $T_e$  pasul cu care acest semnal analogic a fost eșantionat, rezultă din (9.57):

$$NT_e \leq \frac{\pi}{\omega_M} ; T_e \leq \frac{\pi}{\omega_M} \quad T_e \neq NT_e \tag{9.58}$$

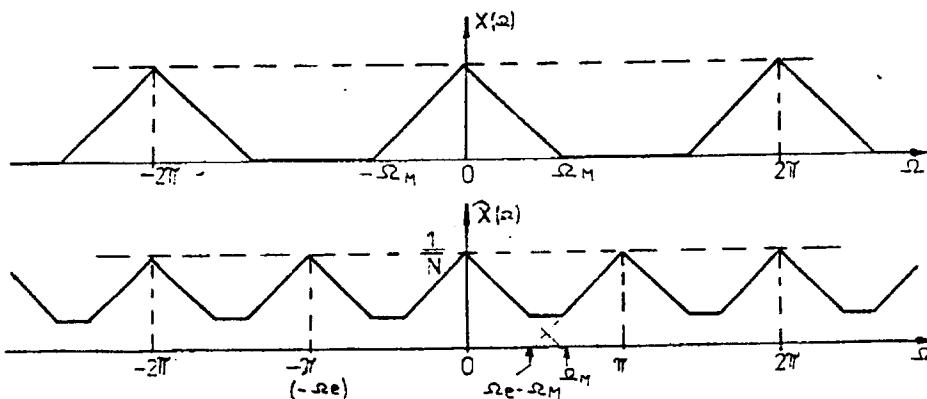


Fig. 9.25 Dacă  $\Omega_e - \Omega_M < \Omega_M$  se produce suprapunerea lobilor spectrali ai semnalului discret eșantionat.

Se dovedește prin urmare, că semnalul discret  $x[n]$  este eșantionabil cu pasul

$N$ , fără să apară suprapunerea lobilor spectrali, dacă semnalul analogic ar fi putut să fie eșantionat și cu perioada  $T'_c = NT_c$ , respectându-se teorema WKS. În aceste condiții, semnalul analogic a fost, inițial, supraeșantionat.

Dacă condiția (9.57) nu este satisfăcută, deci dacă se eșantionează astfel încât  $\Omega_e - \Omega_M < \Omega_M$ , apare suprapunerea lobilor spectrali vecini, după cum se poate remarca și din figura 9.25. Erorile ce apar sunt de tip "alias", făcând de nerecuperat semnalul discret inițial  $x[n]$  din spectrul semnalului discret eșantionat,  $\hat{X}(\Omega)$ .

### Reconstruirea semnalului discret din eșantioanele sale.

Dacă, după eșantionare, lobi spectrali ai semnalului eșantionat nu se suprapun, este posibilă reconstruirea semnalului inițial din eșantioanele sale  $\{\hat{x}[n]\}$ , prin filtrare trece jos ideală efectuată prin intermediul unui filtru de reconstruire,  $H_r(\Omega)$ , așa cum rezultă și din figura 9.26. Răspunsul în frecvență al filtrului este periodic, cu perioadă  $2\pi$  și are expresia:

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} N & |\Omega - 2k\pi| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad \Omega_M \leq \Omega_c \leq \Omega_e - \Omega_M \quad (9.59)$$

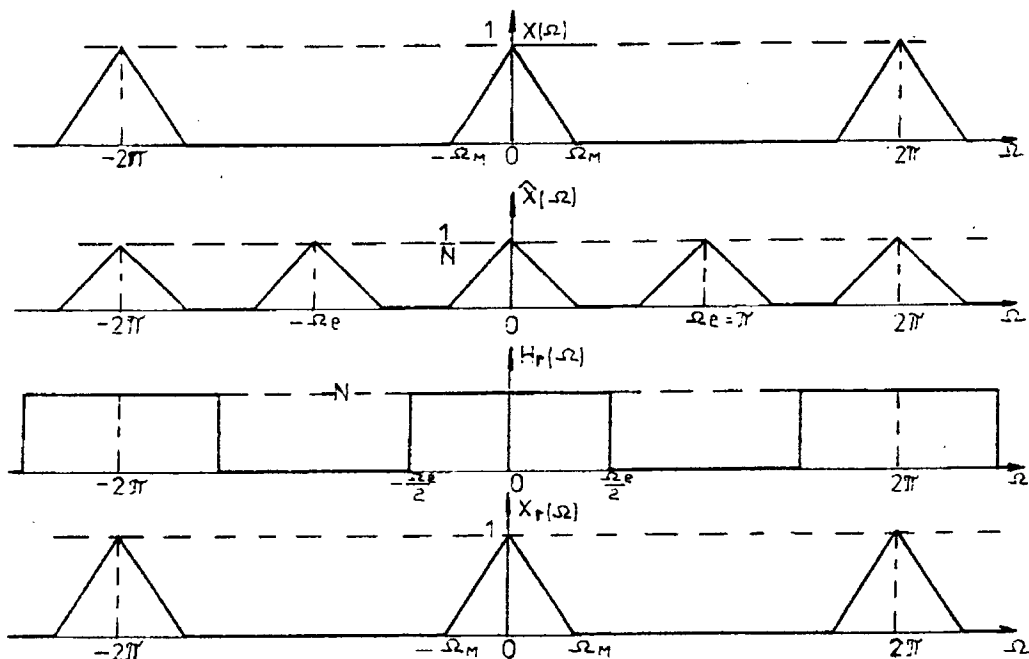


Fig. 9.26 Reconstruirea semnalului discret din semnalul discret eșantionat prin filtrare trece jos ideală cu  $\Omega_c = \Omega_e/2$ .

De obicei se ia  $\Omega_c = \Omega_e/2$ , ca și în cazul eșantionării ideale a semnalelor analogice.

Răspunsul la impuls al filtrului de reconstruire este:

$$h_r[n] = \frac{\sin n \Omega_c}{n \Omega_c} ; \quad \Omega_c = \frac{\Omega_e}{2} = \frac{\pi}{N} . \quad (9.60)$$

Din:

$$X_r(\Omega) = H_r(\Omega) \cdot \hat{X}(\Omega) = H_r(\Omega) \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_c) = X(\Omega) , \quad (9.61)$$

rezultă egalitatea dintre  $x_r[n]$ , semnalul de la ieșirea filtrului de reconstruire și  $x[n]$ , semnalul inițial:

$$x_r[n] = \hat{x}[n] * h_r[n] = x[n] ,$$

relație care se poate pune și sub forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}[k] h_r[n-k] .$$

Cum însă  $\hat{x}[k] = 0$  pentru  $k \neq Nm$  și  $\hat{x}[Nm] = x[Nm]$ , se mai poate scrie și:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[Nm] h_r[n-Nm] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[Nm] \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}n - \pi m\right)}{\frac{\pi}{N}n - \pi m} . \quad (9.62)$$

### Eșantionarea și decimarea unui semnal discret

După eșantionarea unui semnal discret, foarte multe valori ale acestuia se anulează forțat. Între două valori reținute sunt intercalate  $N-1$  zerouri care nu aduc nici o informație despre semnalul  $x[n]$  care a fost eșantionat. În consecință, ele pot fi omise, rezultând un nou semnal denumit "decimatul" semnalului eșantionat, pe care îl vom nota cu  $\hat{x}_D[n]$ . Din semnalul decimat se poate reconstrui semnalul nedecimat prin simpla inserare a câte  $N-1$  zerouri între două valori consecutive.

Un semnal eșantionat (cu  $N = 2$ ) și apoi decimat este prezentat în figura 9.27 c. Între semnalul discret decimat și cel eșantionat există relația simplă:

$$\hat{x}_D[n] = \hat{x}[nN] . \quad (9.63)$$

Spectrul semnalului decimat,  $\hat{X}_D(\Omega)$ , se determină în urma aplicării directe a definiției transformării Fourier în timp discret:

$$\hat{X}_D(\Omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}_D[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_D[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[nN] e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[m] e^{-j\frac{\Omega}{N} m}$$

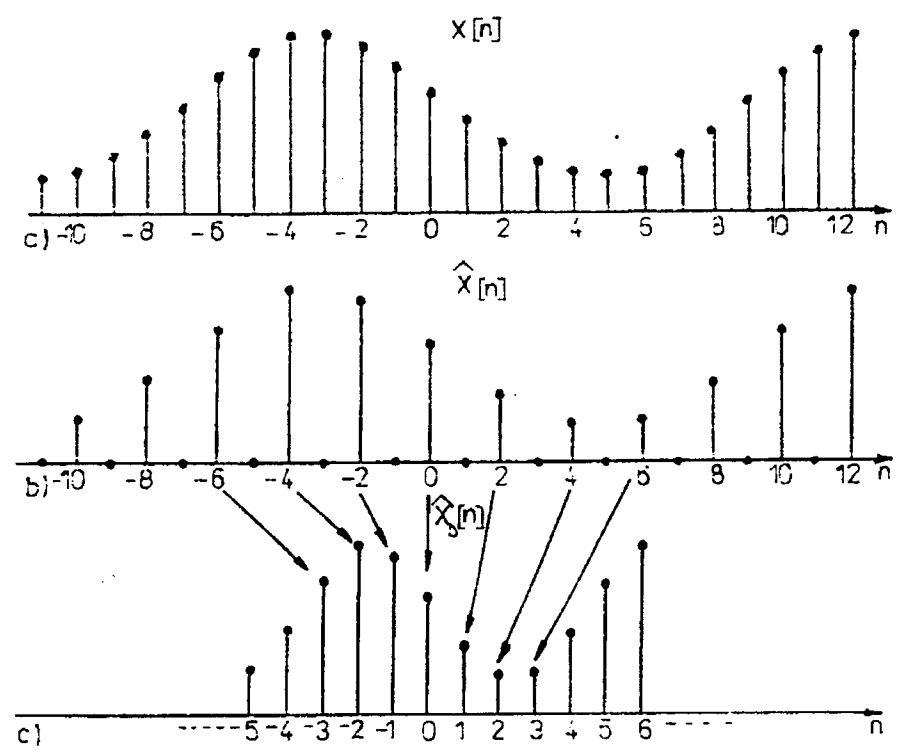


Fig. 9.27 Eșantionarea semnalului discret (a) dă naștere semnalului discret eșantionat (b). Prin decimare se obține semnalul (c).

În concluzie, s-a obținut relația:

$$\hat{X}_D(\Omega) = \hat{X}\left(\frac{\Omega}{N}\right) \quad (9.64)$$

Dacă se ține seama de (9.56), relația (9.64) conduce la:

$$\hat{X}_{Dr}(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_r\left(\frac{\Omega - k2\pi}{N}\right) \quad (9.65)$$

Se observă imediat periodicitatea de perioadă  $2\pi$  a spectrului semnalului eșantionat și decimat.

Pentru  $k = 0$  lobul central  $(1/N)X(\Omega/N)$  se anulează la argumentul  $\Omega/N = \Omega_M$ , deci  $\Omega = N\Omega_M$ . Prin urmare, lobiile spectrale ai lui  $\hat{X}_D(\Omega)$  au întinderea de  $N$  ori mai mare decât a lobilor semnalului inițial  $x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$ .

În figura 9.28 sunt ilustrate spectrul semnalului inițial  $X(\Omega)$  (a), spectrul semnalului eșantionat  $\hat{X}(\Omega)$  cu  $N = 2$  (b) și spectrul obținut după decimarea



semnalului eșantionat,  $\hat{X}_D(\Omega)$  (c).

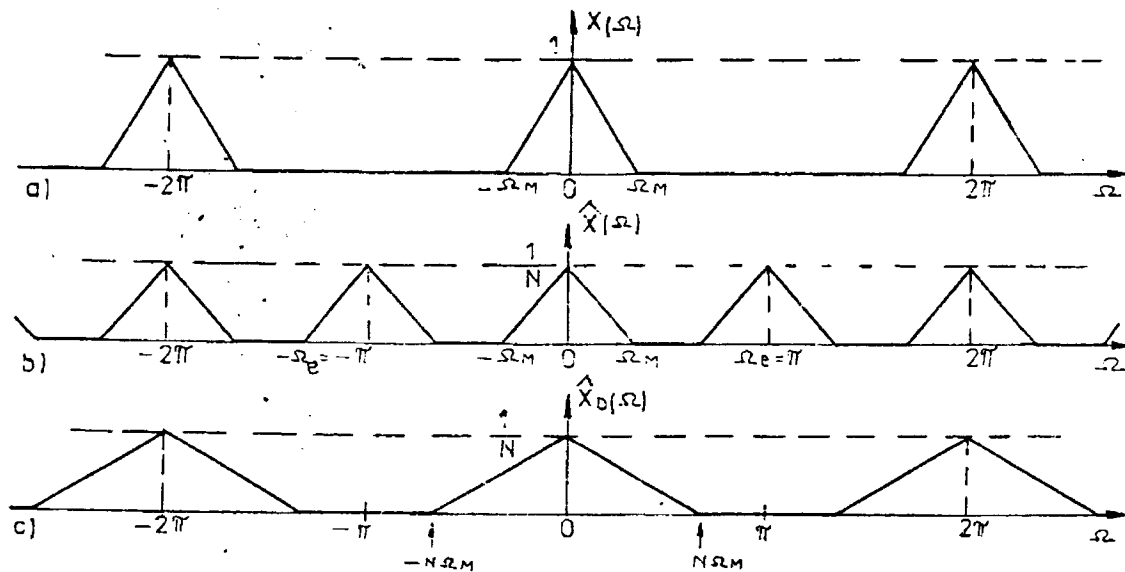


Fig. 9.28 Spectrul semnalului discret (a), spectrul semnalului eșantionat,  $\hat{X}(\Omega)$ , (b) și spectrul semnalului decimat,  $\hat{X}_D(\Omega)$ , (c).

### 9.8 Eșantionarea spectrului $X(\Omega)$ al unui semnal discret de durată finită

Discretizarea semnalelor a fost impusă de utilizarea calculatoarelor numerice, care nu pot prelucra decât mărimi discrete în timp (și evident și în mărime). Prelucrarea în domeniul spectrului, de multe ori mai simplă decât în domeniul timp, nu poate fi însă realizată în mod direct cu un calculator electronic. Aceasta, deoarece spectrul semnalului discret este o funcție de variabila continuă  $\Omega$ . Se pune întrebarea dacă spectrul unui semnal discret nu ar putea fi el însuși eșantionat, pentru a fi prelucrat cu calculatorul? Efectul eșantionării în domeniul timp a unui semnal având spectrul cu suport finit a avut drept efect periodizarea spectrului. Ne putem aștepta, deci, la un efect similar și anume eșantionarea în domeniul frecvenței să conducă la o periodizare în domeniul timpului, transformând un semnal  $x[n]$  aperiodic într-un semnal  $\tilde{x}[n]$ , periodic.

Fie semnalul discret aperiodic (dacă semnalul este periodic, el are spectrul discret și problema nu se pune)  $x[n]$  de spectru  $X(\Omega)$ . Se eșantionează spectrul în mod ideal, utilizând pentru aceasta produsul cu distribuția Dirac periodică în frecvență  $\delta_{\Omega_e}(\Omega)$ . Se obține un spectru de linii - figura 9.29 - cu expresia:

$$\tilde{X}(\Omega) = X(\Omega) \delta_{\Omega_e}(\Omega) = X(\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_e) \delta(\Omega - k\Omega_e). \quad (9.66)$$

Pentru a determina semnalul  $\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{X}(\Omega)\}$ , se ține seama de relația (9.54), din care se obține prin împărțire cu  $\Omega_e$ :

$$\frac{1}{\Omega_e} \delta_N[n] \longleftrightarrow \delta_{\Omega_e}(\Omega) \quad \Omega_e = \frac{2\pi}{N} \quad (9.67)$$

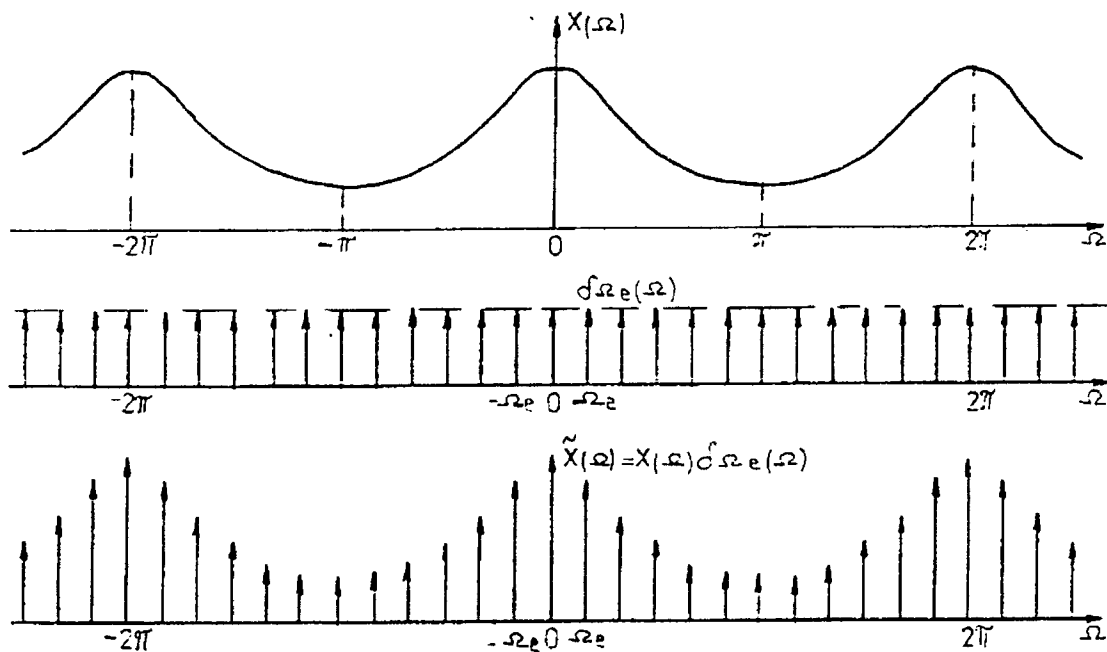


Fig. 9.29 Spectrul unui semnal discret (a) se eșantionează cu un semnal Dirac periodic (b), obținându-se un spectru discret,  $\tilde{X}(\omega)$ , (c)

Aplicând relației (9.66) transformarea Fourier inversă, conform teoremei convoluției semnalelor, avem:

$$\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\delta_{\Omega_e}(\Omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} * \mathcal{F}^{-1}\{\delta_{\Omega_e}(\Omega)\} = x[n] * \frac{1}{\Omega_e} \delta_N[n]; \quad \Omega_e = \frac{2\pi}{N},$$

sau:

$$\tilde{x}[n] = \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN] \quad , \quad (9.68)$$

adică ceea ce era de așteptat. Pentru ca semnalul  $x[n]$  să poată fi recuperat din  $\tilde{x}[n]$  este necesar ca el să fie cu suportul mărginit.

Fie  $x[n]$  cu suportul  $0 \leq n \leq M-1$ , de lungime  $M$ , așa cum se prezintă în figura 9.30 a. Semnalul ce are spectrul eșantionat este  $\tilde{x}[n]$ . Perioada sa este  $N=2\pi/\Omega_e$ . Dacă  $N \geq M$  nu se produce suprapunerea grupurilor temporale din relația (9.68) corespunzătoare diverselor valori  $k$ . Nu apare decât un efect de tip "alias" în domeniul timp. Prin multiplicarea semnalului  $\tilde{x}[n]$  cu fereastra temporală rectangulară:

$$w_r[n] = \begin{cases} \frac{2\pi}{N} & , 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases} \quad (9.69)$$

se obține semnalul reconstruit  $x_r[n]$ , identic cu semnalul  $x[n]$ :

$$x_r[n] = x[n] = \tilde{x}[n] w_r[n] \quad (9.70)$$

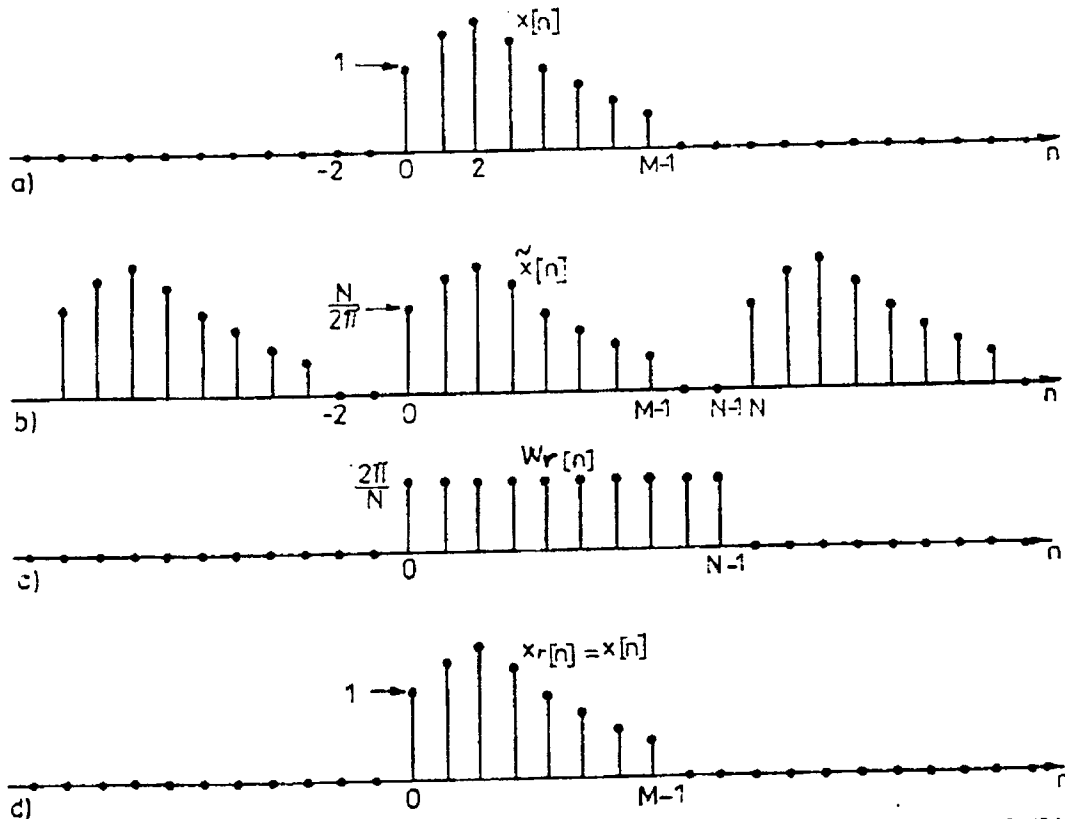


Fig. 9.30 Semnalul de durată limitată  $M$ ,  $x[n]$  (a). Semnalul periodic  $\tilde{x}[n]$  (b). Fereastra temporală  $w_r[n]$  (c) și semnalul  $x_r[n]$  (d).

Dacă spectrul  $X(\Omega)$  se eșantionează prea rar, rezultă  $N < M$  și apare suprapunerea grupurilor temporale, determinând erori de tip "alias". Semnalul  $x[n]$  nu mai poate fi reconstruit din spectrul eșantionat.

### 9.9 Măsurile practice ce se iau în cazul eșantionării semnalelor definite în timp continuu

În multe cazuri nu se cunoaște lărgimea benzii unui semnal de bandă limitată ce urmează a fi eșantionat. Semnalul poate avea componente spectrale de frecvențe mari, neinteresante în aplicația considerată. Ele pot fi cauzate și de zgomotul ce însoțește semnalul. De aceea există riscul apariției erorilor de tip "alias". Pentru a

evita astfel de erori se prevede în structura lanțului de prelucrare a semnalului, înaintea circuitului de eșantionare și memorare, un filtru trece jos, numit filtru "anti-alias" sau filtru de gardă - figura 9.31.

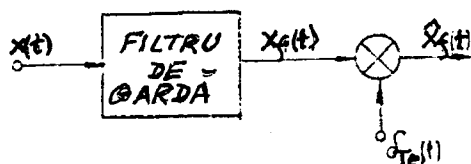


Fig. 9.31 Filtrul de gardă pentru evitarea apariției erorilor de tip "alias".

Caracteristica de modul a unui astfel de filtru are aspectul prezentat în figura 8.9. Eșantionarea nu poate fi făcută decât cu o frecvență de cel puțin de două ori mai mare decât frecvența de oprire  $\omega_s$ :  $\omega_c \geq 2\omega_s$ . Pe de altă parte, pentru a nu afecta semnalul prea mult, trebuie să avem  $\omega_M \leq \omega_p$ , unde  $\omega_p$  este limita de trecere. În consecință:

$$\omega_M \leq \omega_p < \omega_s \leq \frac{\omega_c}{2} \quad (9.71)$$

Cu cât banda de tranziție  $\omega_s - \omega_p$  este mai mare, trebuie să eșantionăm la o frecvență mult superioară frecvenței Nyquist,  $2\omega_M$ . Dar bandă de tranziție mare înseamnă că filtrul are un ordin redus, puține elemente constructive, deci ieftin. Se plătește însă, prin creșterea frecvenței de eșantionare. Dacă filtrul de gardă are un ordin mai mare, frecvența de eșantionare poate să scadă, apropiindu-se mai mult de limita ei inferioară,  $2\omega_M$ .

Cu cât eroarea  $\epsilon_s$  admisă - vezi figura 8.9 - este mai redusă, cu atât mai reduse vor fi erorile de tip "alias". În schimb crește  $\omega_s$ , deci crește și  $\omega_c$ .

În sistemele de telefonie numerică, frecvența maximă din spectrul semnalului vocal transmis este 3,4kHz. Frecvența Nyquist de eșantionare este, prin urmare, de 6,8kHz. În practică s-a standardizat valoarea de 8kHz pentru cadența de eșantionare.

În sistemele de televiziune, semnalul video se întinde până la ~5MHz. În consecință, limita inferioară a frecvenței de eșantionare este de 10MHz. Se lucrează, însă, cu frecvențe de eșantionare de ordinul a 18MHz.

În cazul unei frecvențe de eșantionare reduse, spre limita inferioară  $2\omega_M$ , filtrului de gardă i se impun condiții severe în ceea ce privește banda de tranziție. Și filtrul de reconstrucție, neideal, introduce erori în refacerea semnalelor. Erori reduse de reconstrucție, la o frecvență de eșantionare adoptată, se obțin crescând ordinul filtrului. Sau, la un ordin dat al filtrului, reducerea erorilor de reconstrucție se poate face prin creșterea frecvenței de eșantionare.

### 9.10 Eșantionarea semnalelor trece bandă

Spectrul semnalelor prezentate până acum era concentrat în benzi de frecvență care includeau și frecvența nulă. Aceste semnale sunt denumite semnale de tip "trece jos". O altă categorie de semnale utilizate în practică este cea a semnalelor de tip "trece bandă". Suportul spectrului acestor semnale este de forma:

$$\text{supp}\{X(\omega)\} = [-\omega_M, -\omega_m] \cup [\omega_m, \omega_M] .$$

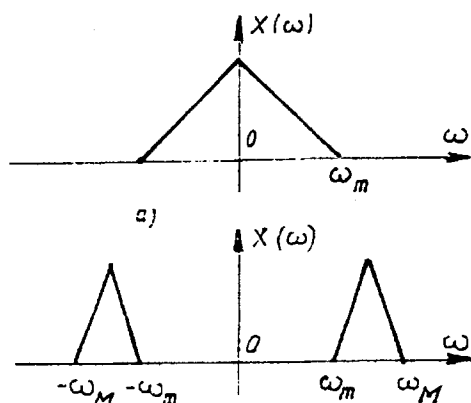


Fig. 9.32 Exemple de spectre de semnale de tip trece jos (a) și trece bandă (b).

examinaăm în continuare cazul semnalelor de tip trece bandă de bandă îngustă. Acestea sunt semnale de tip trece bandă care satisfac și condiția suplimentară:

$$\frac{\omega_M - \omega_m}{\omega_m} < 1 .$$

Semnalul al cărui spectru este prezentat în figura 9.32 b este de acest tip.

Suportul spectrului unui semnal trece bandă de bandă îngustă eșantionat ideal  $X_e(\omega)$  este de forma:

$$\text{supp}\{X_e(\omega)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{R}} \{ [-\omega_M + n\omega_e, -\omega_m + n\omega_e] \cup [\omega_m + n\omega_e, \omega_M + n\omega_e] \} . \quad (9.72)$$

Această relație poate fi verificată și pe baza exemplului din figura 9.33 care prezintă spectrul unui semnal trece bandă de bandă îngustă eșantionat ideal. Figura evidențiază faptul că un filtru trece bandă ideal poate reconstrui perfect semnalul  $X(\omega)$  din semnalul eșantionat  $X_e(\omega)$ , chiar dacă frecvența de eșantionare este inferioară frecvenței Nyquist.

Condiția de reconstrucție perfectă, a unui semnal trece bandă de bandă îngustă eșantionat ideal, din eșantioanele sale, este:

$$[-\omega_M + k\omega_e, -\omega_m + k\omega_e] \cap [\omega_m + l\omega_e, \omega_M + l\omega_e] = \emptyset \quad \forall k, l \in \mathbb{Z} . \quad (9.73)$$

Pentru  $l = 0$  condiția devine  $[-\omega_M + k\omega_e, -\omega_m + k\omega_e] \cap [\omega_m, \omega_M] = \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$

Figura 9.32 prezintă spectrele unor semnale de tip trece jos și de tip trece bandă.

Reconstrucția perfectă a unui semnal de tip trece bandă eșantionat ideal poate fi realizată pe baza teoremei WKS. Condiția ce trebuie îndeplinită în acest caz este  $\omega_e \geq 2\omega_M$ , unde cu  $\omega_e$  s-a notat frecvența de eșantionare.

În anumite condiții (prezentate în continuare) semnalele de tip trece bandă pot fi reconstruite perfect chiar dacă au fost eșantionate cu frecvențe mai mici decât frecvența Nyquist. Pentru a exemplifica ultima afirmație, să

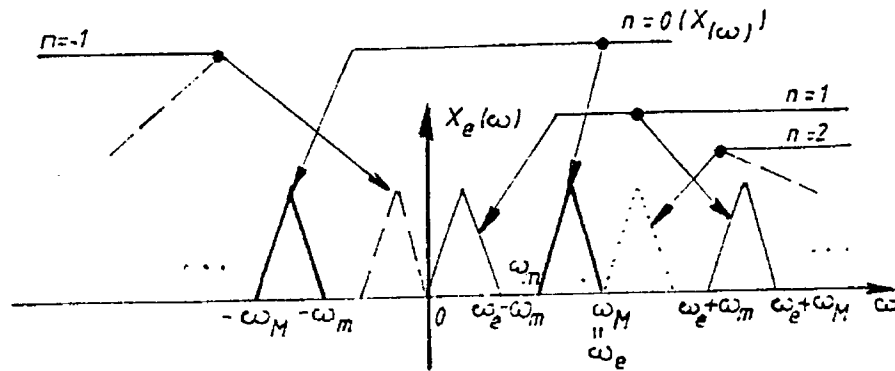


Fig. 9.33 Spectrul unui semnal trece bandă de bandă îngustă eșantionat ideal.

Îndeplinirea ultimei condiții implică satisfacerea următoarelor inegalități:

$$\begin{cases} -\omega_M + k\omega_e \leq \omega_m \\ -\omega_M + (k+1)\omega_e \geq \omega_M \end{cases}$$

Ultimele relații pot fi puse și sub forma:

$$\frac{2\omega_M}{k+1} \leq \omega_e \leq \frac{2\omega_m}{k} \quad (9.74)$$

Se poate demonstra că dacă această condiție este satisfăcută, atunci este satisfăcută și condiția (9.73).

Dacă există valori întregi  $k$ , pentru care dubla inegalitate (9.74) este îndeplinită, atunci există valori pentru frecvența de eșantionare (sub frecvența Nyquist) pentru care semnalele trece bandă de bandă îngustă pot fi reconstruite în urma eșantionării ideale.

Privim ultima relație ca o inecuație în mulțimea numerelor întregi. Soluția acesteia este:

$$0 < k \leq \frac{\omega_m}{\omega_M - \omega_m} \quad (9.75)$$

Notând cu  $n_0$  partea întreagă a fracției  $\omega_m/(\omega_M - \omega_m)$ , rezultă că frecvența de eșantionare va aparține unor intervale de forma:

$$\left[ \frac{2\omega_M}{k+1}, \frac{2\omega_m}{k} \right] \text{ cu } k \in \{1, \dots, n_0\} \quad (9.76)$$

**Exemplu:** Spectrul  $X(\omega)$  al unui semnal trece bandă are suportul cuprins între  $\omega_m = 8\pi$  și  $\omega_M = 10\pi$ . Se cer valorile posibile ale frecvenței de eșantionare care asigură reconstruire fără erori a semnalului trece bandă eșantionat.

Calculăm factorul  $n_0$ :

$$n_0 = \frac{\omega_m}{\omega_M - \omega_m} = 4 .$$

Valorile admisibile ale lui  $k$ , care satisfac condiția (9.76) sunt 1, 2, 3, 4. Acestor valori le corespund pentru frecvența de eșantionare, următoarele domenii de pe axa frecvențelor:

$$k \in \{4\pi\} \cup [5\pi, 5,33\pi] \cup [6,66\pi, 8\pi] \cup [10\pi, 16\pi] \cup [20\pi, \infty] .$$