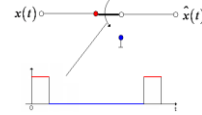


# Esantionarea semnalelor

[http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap9\\_1.pdf](http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap9_1.pdf)

[http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap9\\_2.pdf](http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap9_2.pdf)

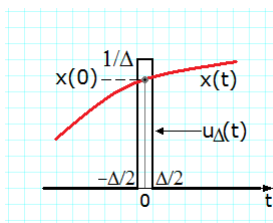
- Discretizarea variatiei in timp a semnalului, numita esantionare.
- Semnale de banda limitata.
- Problema reconstruirii semnalulelor analogice din semnalul esantionat.
- Teorema esantionarii: esantionarea ideala



1

# Teorema esantionarii

$$u_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \left[ \sigma\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right]$$



Un esantion al lui  $x(t)$  este obtinut prin produsul semnalului analogic  $x(t)$  cu un impuls foarte scurt dreptunghiular  $u_{\Delta}(t)$  de arie 1:

$$x(t)u_{\Delta}(t) \cong x(0)u_{\Delta}(t)$$

Un alt esantion poate fi obtinut daca se plaseaza impulsul la momentul de timp  $kT_s$ .

$$x(t)u_{\Delta}(t - kT_s) \cong x(kT_s)u_{\Delta}(t - kT_s)$$

2

Procedura de esantionare: esantionam semnalul cu un tren de impulsuri foarte scurte

$$x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{\Delta}(t-kT_s) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)u_{\Delta}(t-kT_s)$$

Pentru valori mici ale lui  $\Delta$ :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t) = \delta(t) \quad \text{Distributia Dirac}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{\Delta}(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s)x(kT_s) = \delta_{T_s}(t)$$

Distributia Dirac periodica

*Esantionarea ideala* a semnalului  $x(t)$  :

$$\hat{x}(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_s)$$

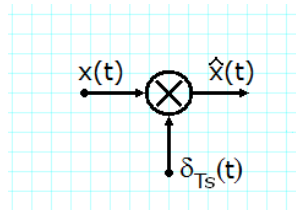
3

### *Esantionarea ideala*

Modelul matematic

$$x(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_s)$$

Modelul esantionarii ideale



4

# Spectrul semnalului esantionat ideal

Semnalul esantionat ideal:

$$x(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

Spectrul semnalului esantionat ideal:

$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ x(t) \delta_{T_s}(t) \right\}$$

5

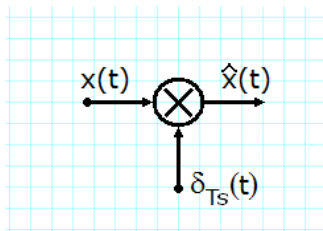
Aplicand teorema produsului :

$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ x(t) \delta_{T_s}(t) \right\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left( \omega - k \frac{2\pi}{T_s} \right)$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta \left( \omega - k \frac{2\pi}{T_s} \right) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \left( \omega - k \frac{2\pi}{T_s} \right)$$

Spectrul semnalului esantionat apare prin insumarea unor lobi spectrali indexati dupa  $k$

6



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

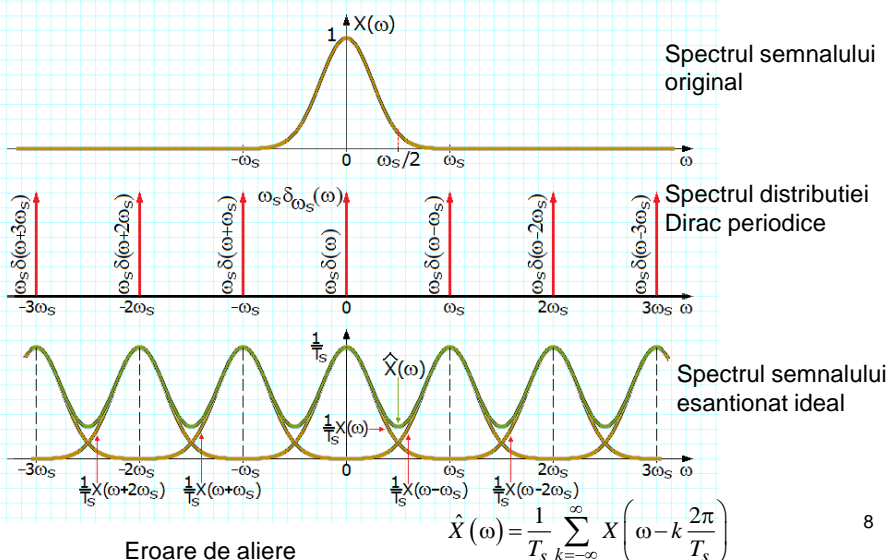
$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

Spectrul semnalului esantionat ideal este repetitia periodica a spectrului semnalului original. Perioada este invers proportionala cu pasul de esantionare  $T_s$ .

7

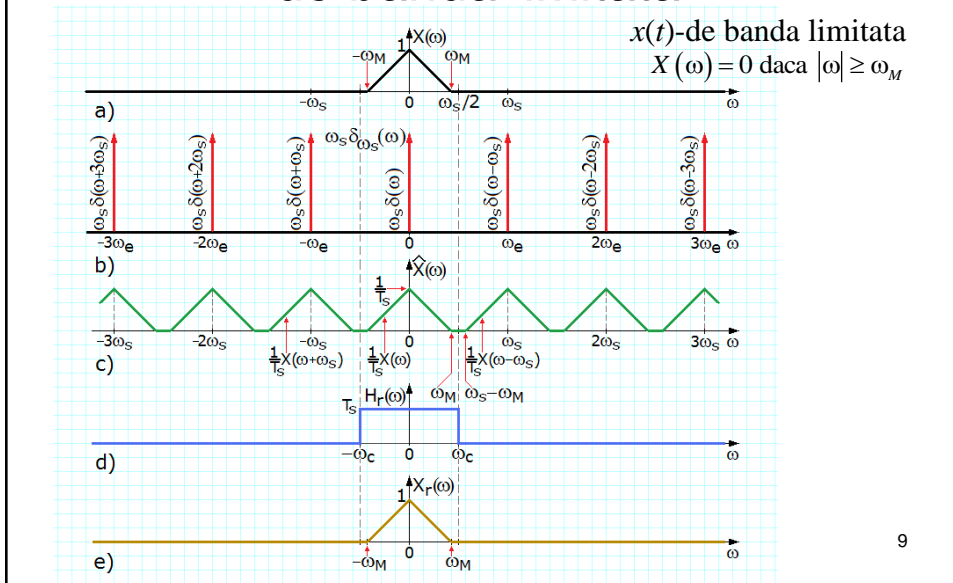
Din spectrul semnalului esantionat ideal nu se mai poate recupera spectrul semnalului original, deoarece apare o "amestecare" spectrala (aliere).

Semnalul original trebuie sa fie de banda limitata pentru ca aceste erori sa nu apara.



8

# Teorema esantionarii semnalelor de banda limitata



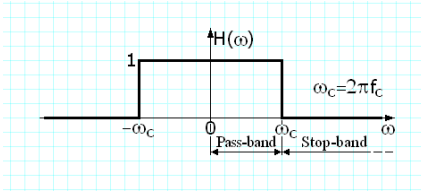
9

- Lobii spectrali successivi nu se suprapun si spectrul semnalului original poate fi recuperat prin FTJ din spectrul semnalului esantionat daca

$$\omega_s \geq 2\omega_M$$

10

## FTJ ideal



$$H(\omega) = p_{\omega_c}(\omega) \leftrightarrow h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

Utilizam un filtru trece jos cu frecventa de taiere  $\omega_c$  si amplificarea in banda  $T_s$

Eroarea de aliere poate fi evitata.

$$\omega_s \geq 2\omega_M$$

Frecventa de esantionare

$$\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M$$

Frecventa de taiere pentru FTJ

Conditia de reconstructie perfecta:  $|H_r(0)| = T_s$

11

Raspunsul in frecventa al filtrului de reconstructie este:

$$|H_r(\omega)| = T_s p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad \omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M$$

Semnalul reconstruit este :

$$x_r(t) = \hat{x}(t) * h_r(t)$$

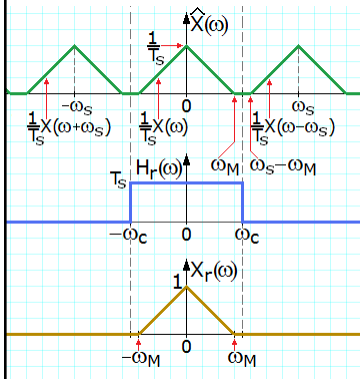
cu spectrul:

$$\begin{aligned} X_r(\omega) &= \hat{X}(\omega) \cdot H_r(\omega) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) T_s p_{\omega_c}(\omega) = X(\omega) \end{aligned}$$

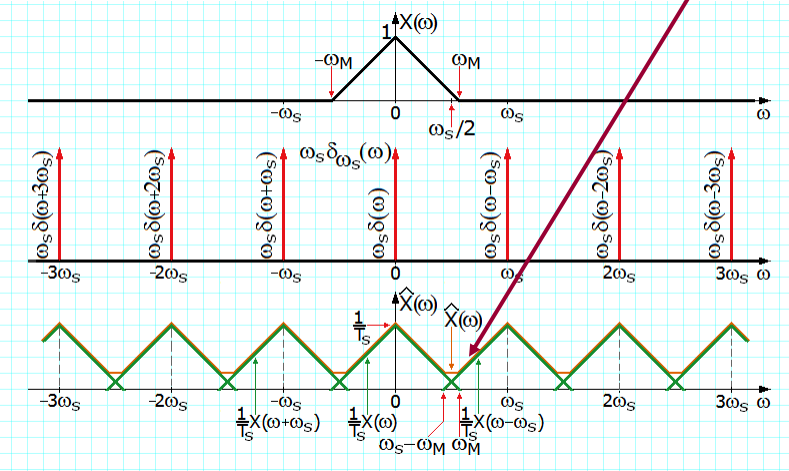
Spectrele egale implica egalitatea aproape peste tot a semnalului reconstruit cu semnalul initial

$$x_r(t) = x(t), \quad a.e.w.$$

12



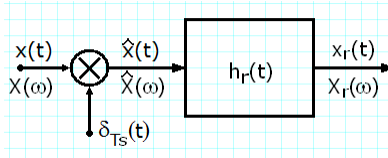
Daca nu se respecta conditia de esantionare  $\omega_s \geq 2\omega_M$ , apar erorile de aliere.



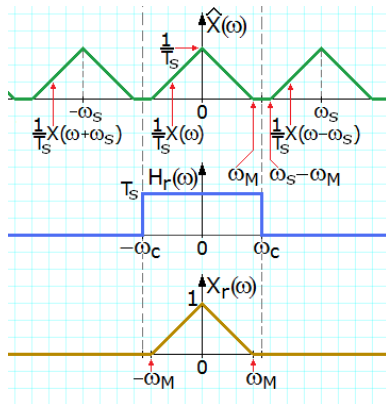
$$\omega_s - \omega_M < \omega_M$$

13

## Reconstructie



$$H_r(\omega) = T_s p_{\omega_c}(\omega) \leftrightarrow h_r(t) = T_s \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$



$$\begin{aligned} x_r(t) &= h_r(t) * \hat{x}(t) \\ &= T_s \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \mathcal{I}_s \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} * \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \mathcal{I}_s \frac{\sin \omega_c (t - kT_s)}{\pi (t - kT_s)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_c}{\omega_s} x(kT_s) \frac{\sin \omega_c (t - kT_s)}{\omega_c (t - kT_s)} \end{aligned}$$

14

Frecventa de esantionare minima este  $\omega_s = 2\omega_M$  si poarta denumirea de frecventa de esantionare Nyquist. In cazul esantionarii la frecventa Nyquist formula de reconstructie devine:

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \omega_M (t - kT_s)}{\omega_M (t - kT_s)}$$

15

## Teorema WKS (Whittaker, Kotelnikov, Shannon)

Daca semnalul  $x(t)$  este de banda limitata la  $\omega_M$ , in sensul ca  $X(\omega) \equiv 0$  pentru  $|\omega| > \omega_M$ , atunci  $x(t)$  este unic determinat de multimea esantioanelor sale  $\{x(nT_s) | n \in Z\}$ , daca  $\omega_s \geq 2\omega_M$ , adica **frecventa de esantionare este cel putin dublul frecventei maxime**. In conditiile de mai sus semnalul initial  $x(t)$  se poate reconstitui din esantioanele sale, a.p.t prin relatia:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{2\omega_c \sin \omega_c (t - kT_s)}{\omega_s \omega_c (t - kT_s)}$$

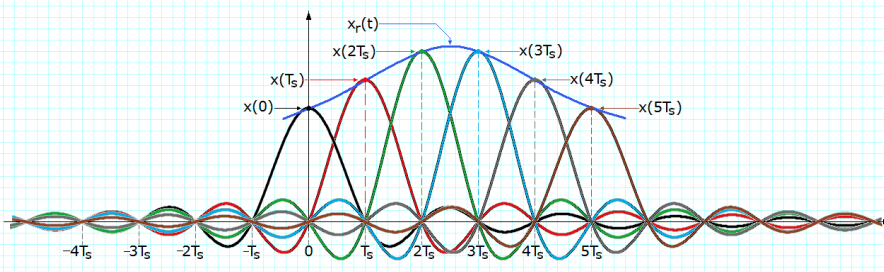
cu conditia ca  $\omega_c$  sa fie astfel ales incat sa satisfaca relatia :  $\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M$ .

Frecventa Nyquist:  $\omega_s = 2\omega_M$

16



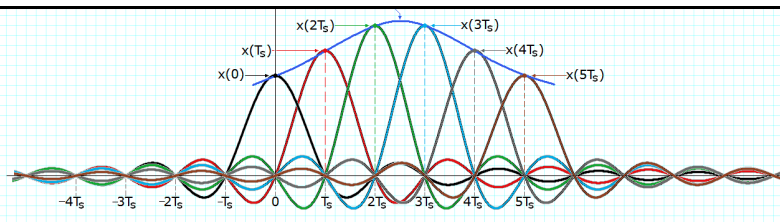
# Reconstructia prin filtrare trece-jos ideala



Semnalul se poate reconstrui din curbe de tipul  $\sin x / x$ .

- Intr-un punct de esantionare,  $kT_s$ , suma se reduce la  $x(kT_s)$ .
- Intre punctele de esantionare, reconstructia se obtine prin aportul tuturor termenilor sumei
- Operatia de reconstructie se mai numeste si interpolare.

17



- In punctele de esantionare, un singur esantion defineste semnalul

$$x(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \omega_M T_s (n-k)}{\omega_M T_s (n-k)}$$

$$\omega_M = \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow x(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta_{n,k} = x(nT_s)$$

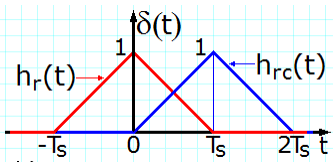
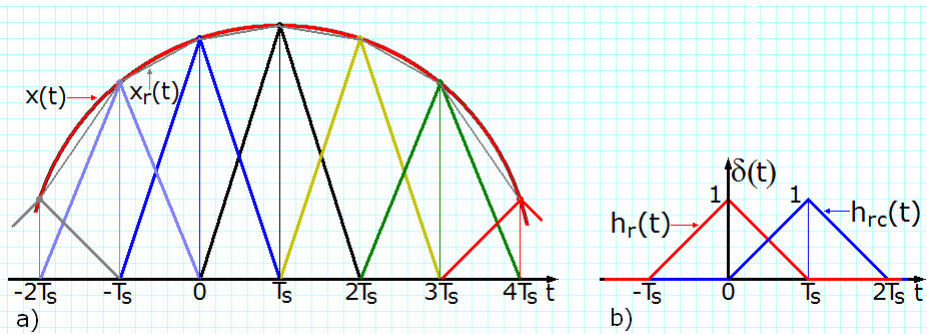
$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = k \\ 0, & \text{pentru } n \neq k \end{cases}$$

- Esantionare cu frecventa Nyquist
- Intre punctele de esantionare, reconstructia se obtine prin aportul tuturor termenilor sumei

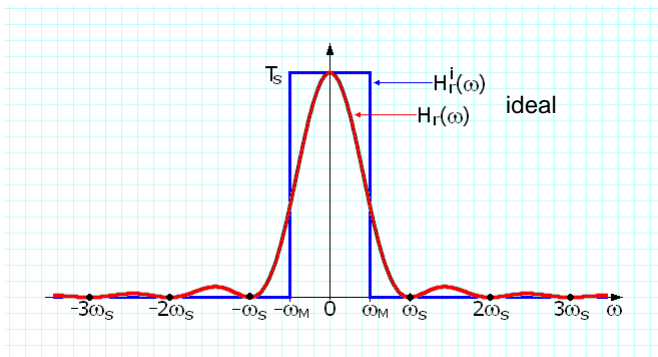
18

## Reconstrucție prin interpolare liniară

- Este posibilă și o reconstrucție aproximativă a semnalului, prin unirea punctelor determinate de valorile esanțioanelor cu linii drepte. Semnalul reconstruit  $x_r(t)$  este doar aproximativ egal cu  $x(t)$
- Răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție: triunghiular.



$$H_r(\omega) = T_s \left( \frac{\sin \frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}} \right)^2 = T_s \left( \frac{\sin \frac{\omega}{\omega_s} \pi}{\frac{\omega}{\omega_s} \pi} \right)^2$$

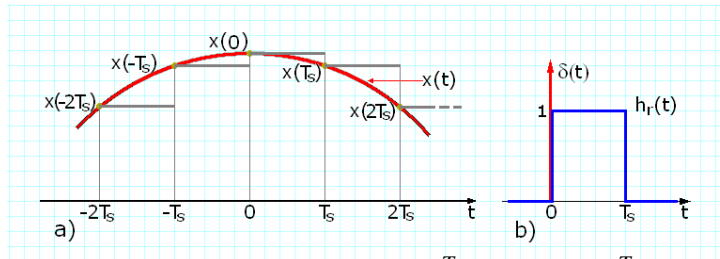


Răspunsul în frecvență al filtrului de reconstrucție

20

## Reconstructia prin extrapolare de ordinul zero

- Este posibila reconstruirea prin extrapolare de ordin zero: valoarea esantionului curent se mentine pana la aparitia noului esantion.

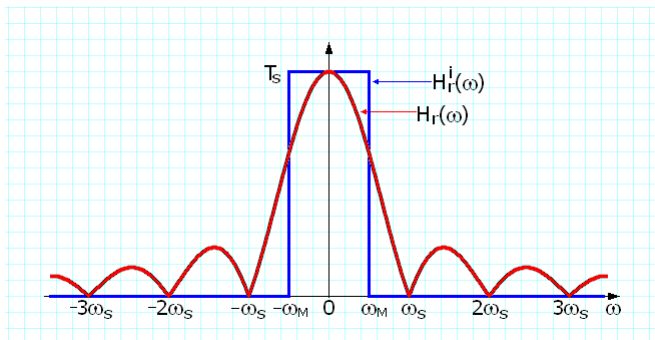


$$h_r(t) = p_{Ts} \left( t - \frac{T_s}{2} \right) \longleftrightarrow e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega T_s}{2}}{\omega} = e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} T_s \frac{\sin \frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}}$$

$$H_r(\omega) = e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} T_s \frac{\sin \frac{\omega T_s}{2}}{\frac{\omega T_s}{2}} = e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} T_s \frac{\sin \pi \frac{\omega}{\omega_s}}{\pi \frac{\omega}{\omega_s}}$$

21

- Diferenta dintre filtre (cel de reconstructie si ideal) este semnificativa  $\Rightarrow$  erori de reconstructie mari

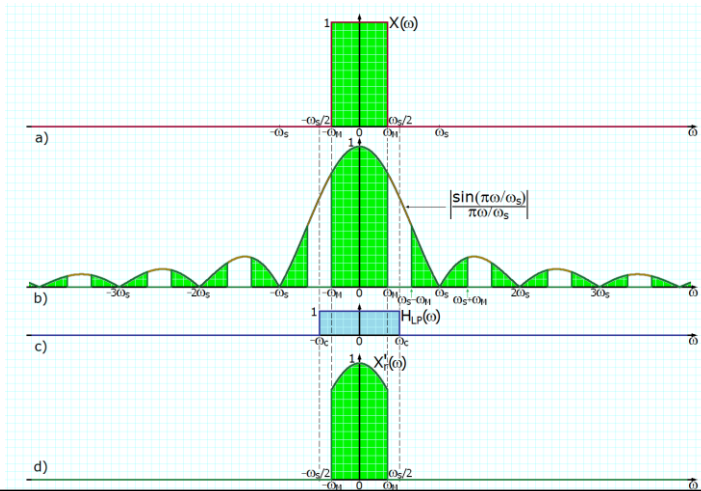


Modulul raspunsului in frecventa al filtrului de reconstructie.

22

Spectrul semnalului reconstruit:

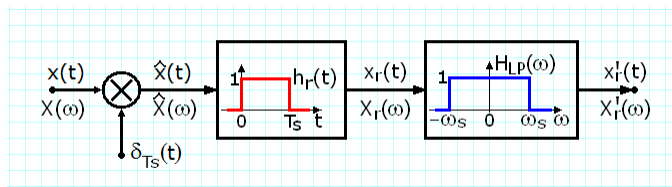
$$X_r(\omega) = X(\omega)H_r(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_s}} \frac{\sin \pi \frac{\omega}{\omega_s}}{\pi \frac{\omega}{\omega_s}} X(\omega - k\omega_s)$$



23

Lobii spectrali sunt puternic deformati. Chiar daca dupa reconstructia de ordin zero am aplica un filtru suplimentar, trece jos ideal, tot nu s-ar putea recupera semnalul initial

Evident pentru  $\omega_s \gg 2\omega_M$ , erorile din lobul central pot fi mult diminuate.



24

## Esantionarea ideala a semnalelor periodice

- Consideram semnale periodice de banda limitata la a  $N$ -a armonica. Cea mai mare frecventa din spectrul lor este

$$\omega_M = N\omega_0; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

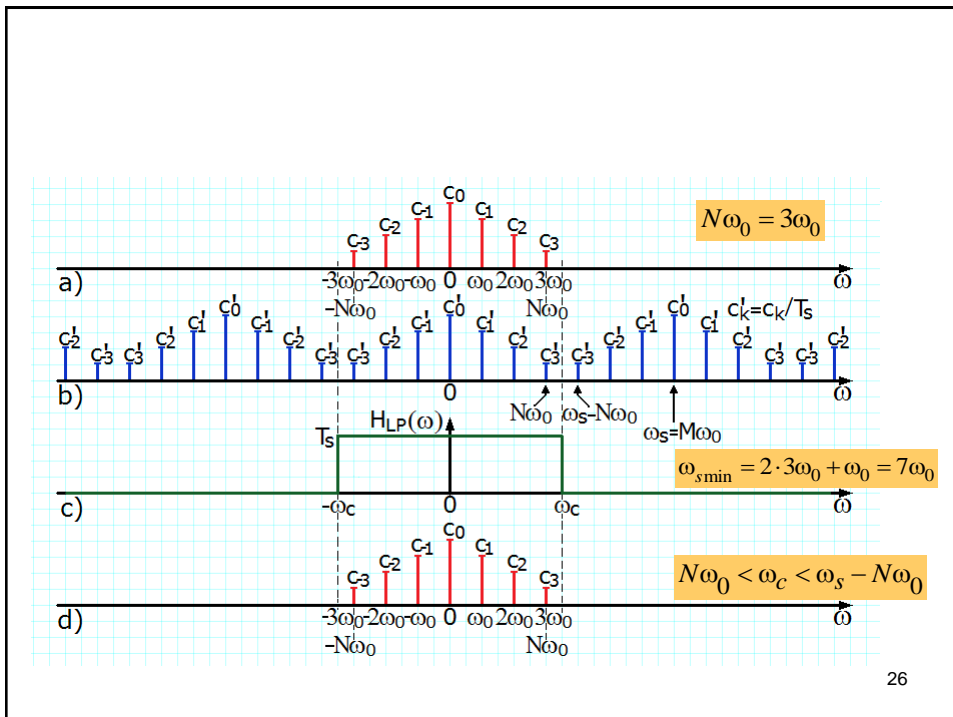
- Se esantioneaza semnalul cu o frecventa

$$\omega_s = M\omega_0, \quad M \in \mathbb{N}$$

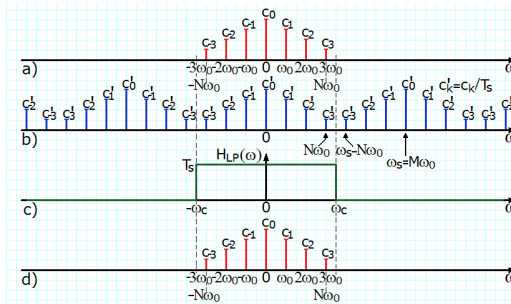
- Prin esantionare lobi spectrali se repeta.
- Pentru ca sa nu apara suprapunerea lobilor spectrali :

$$N\omega_0 < \omega_s - N\omega_0 = \omega_0(M - N)$$

25



26



$$N\omega_0 < \omega_s - N\omega_0 = \omega_0(M - N)$$

Diferenta dintre  $\omega_0(M - N)$  si  $N\omega_0$  trebuie sa fie de forma:

$$\omega_0(M - N) - N\omega_0 = R\omega_0, \quad R = 1, 2, \dots$$

$$\omega_s = M\omega_0 = (2N + R)\omega_0 = 2\omega_M + R\omega_0, \quad R = 1, 2, \dots$$

### Frecventa minima de esantionare

$$\omega_{s \min} = (2N + 1)\omega_0 = 2\omega_M + \omega_0$$

27

Reconstructie prin filtrare trece jos ideala

$$H_r(\omega) = T_s p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c; \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$N\omega_0 < \omega_c < \omega_s - N\omega_0$$

Pentru a evita aparitia erorilor de aliere este necesar ca:

$$\omega_s - N\omega_0 > N\omega_0$$

$$\omega_s > 2N\omega_0 = 2\omega_M$$

spre deosebire de semnalele aperiodice unde  $\omega_s \geq 2\omega_M$

**Pe perioada celei mai rapide componente spectrale, trebuie sa prelevam mai mult de doua esantioane din spectru.**

**Daca esantionarea mentine periodicitatea atunci pe perioada celei mai rapide componente din spectru trebuie sa prelevam 3 esantioane (cel putin).**

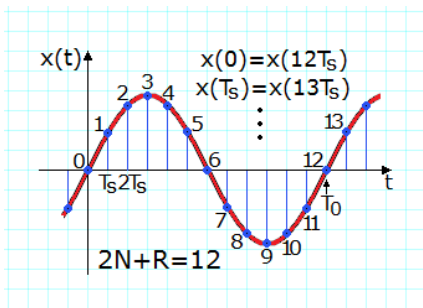
28

$T_0$  - perioada fundamentalei

Esantionarea se face cu  $\omega_s = (2N+R)\omega_0$  atunci:

$$\frac{2\pi}{T_s} = (2N+R) \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T_s = \frac{T_0}{2N+R}; \quad R=1,2,\dots$$



Doar  $2N+R$  esantioane pot fi distincte ca urmare a periodicitatii semnalului supus esantionarii. Toate pot fi prelevate intr-o singura perioada a fundamentalei  $T_0$ .

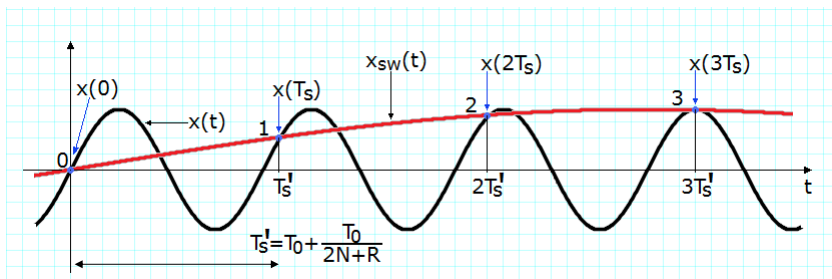
29

## Principiul osciloscopului

Acelasi rezultat se poate obtine prelevand esantioanele succesive din perioade diferite.

$$x(kT_s) = x(T_0 + kT_s) = x(KT_0 + kT_s)$$

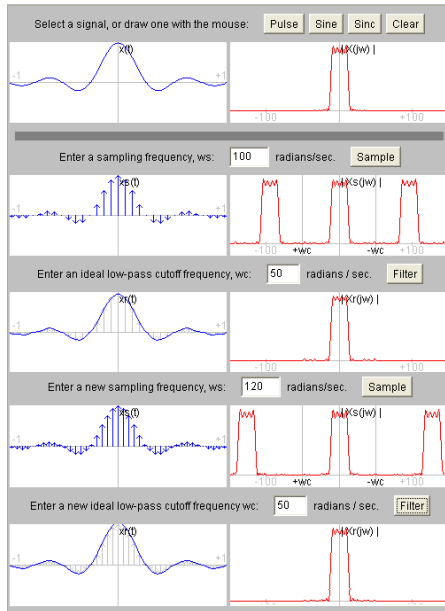
$$T_s' = KT_0 + kT_s = KT_0 + \frac{1}{2N+R}T_0$$



Aceasta posibilitate este valorificata in constructia osciloscopelor cu esantionare.

30

<http://www.jhu.edu/~signals/sampling>



$$\omega_s > 2N\omega_0$$

$$N\omega_0 < \omega_c < \omega_s - N\omega_0$$

$$\omega_s = 100 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\omega_c = 50 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\omega_s = 120 \text{ rad} / \text{s}$$

31

## Relatii energetice

Pentru *semnale aperiodice esantionate*, este valabila relatia de tip Rayleigh

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(kT_s)|^2$$

Pentru *semnale periodice esantionate*, relatia de tip Parseval

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |x(kT_s)|^2; \quad M = 2N + R; \quad R = 1, 2, \dots$$

Energia sau puterea pot fi calculate fie din forma de variatie in timp, fie in frecventa.

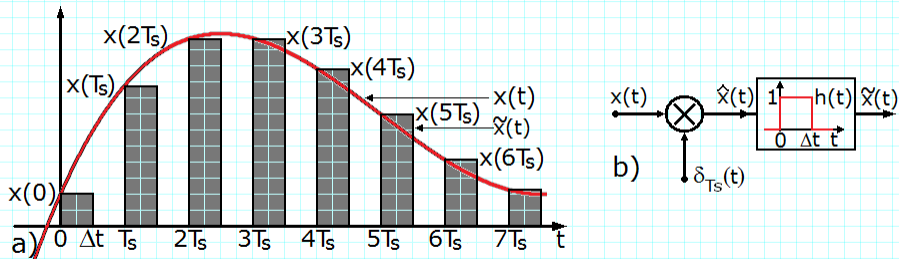
32



## Esantionarea cu memorare

$$\tilde{x}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] * h(t) = \hat{x}(t) * h(t)$$

$$h(t) = p_{\frac{\Delta t}{2}}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \longleftrightarrow e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\omega} = e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \Delta t \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}}$$



a) Semnal esantionat. b) Model matematic al sistemului de modulare a impulsurilor in amplitudine (PAM)

Valoarea esantionului prelevat se pastreaza pentru un interval de timp  $\Delta t \leq T_s$

33

## Spectrul semnalului esantionat cu memorare

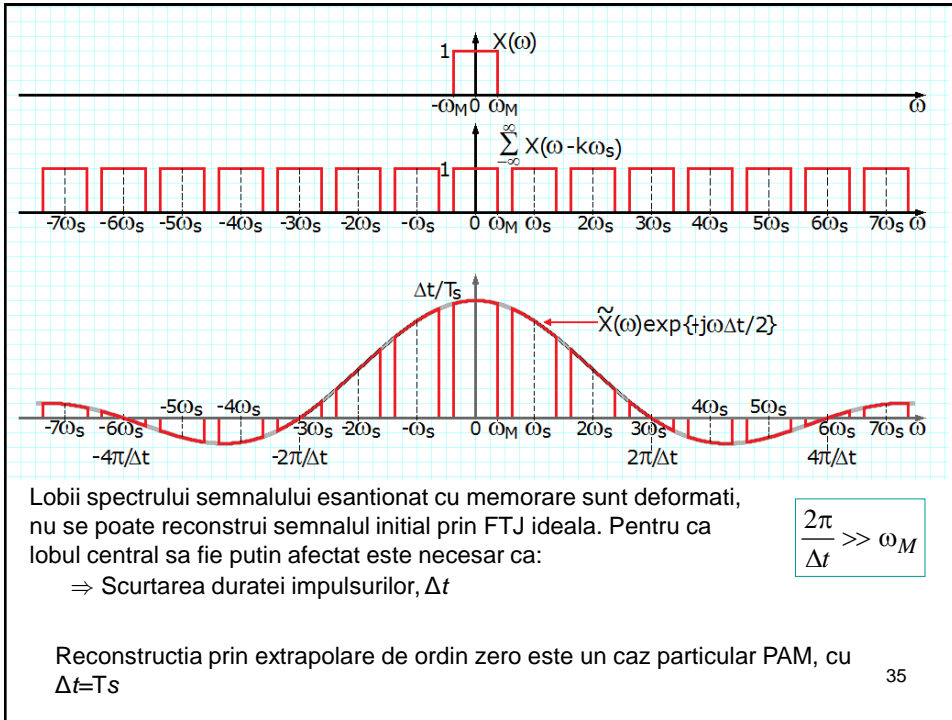
$$\tilde{x}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] * h(t) = \hat{x}(t) * h(t)$$

Spectrul semnalului esantionat cu memorare se poate scrie:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \Delta t \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_s)$$

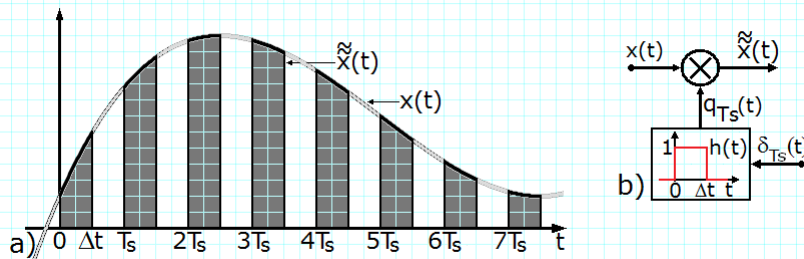
$$\tilde{X}(\omega) e^{j\frac{\omega\Delta t}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin \pi \frac{\Delta t}{T_s}}{\pi \frac{\Delta t}{T_s}} X(\omega - k\omega_s)$$

34



## Esantionarea naturala

Esantionare cu “decuparea” unor portiuni din semnal; se aplica in multiplexarea in timp a semnalelor analogice -- time division multiplexing (TDM)



$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t)q_{T_s}(t) = x(t)[h(t) * \delta_{T_s}(t)] \\ &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)h(t - kT_s)\end{aligned}$$

• Semnalul este înmulțit cu un tren de impulsuri periodice  $q_{T_s}(t)$ .

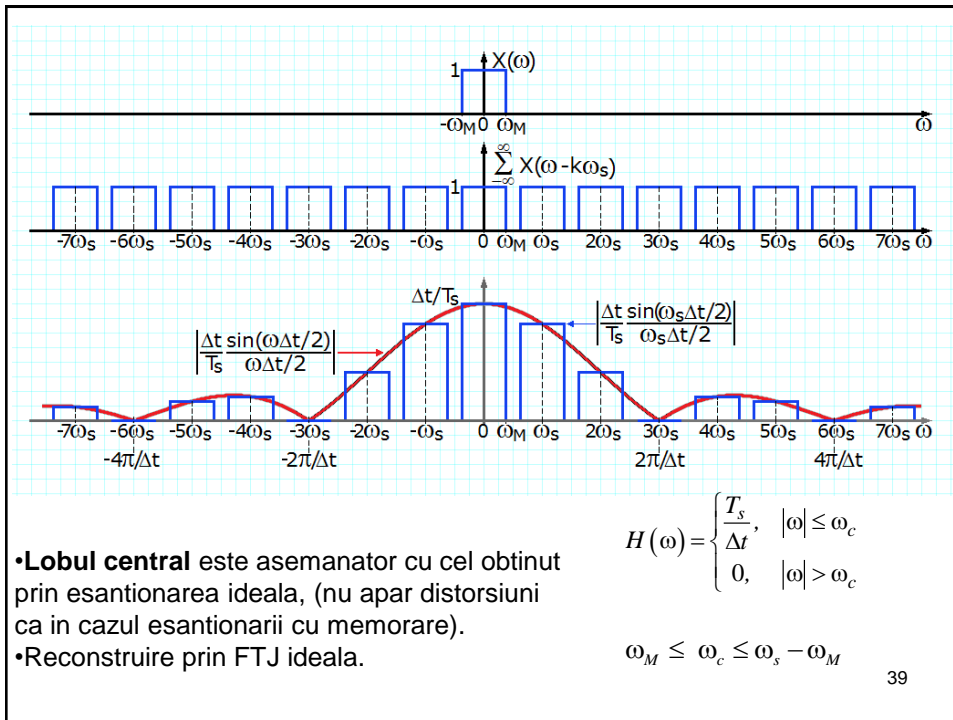
$$h(t) = p_{\frac{\Delta t}{2}}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \longleftrightarrow H(\omega) = e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{2 \sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\omega}$$

37

## Spectrul semnalului esantionat natural

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t)[h(t) * \delta_{T_s}(t)]\} \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \left[ e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \Delta t \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} \cdot \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right] \\ &= X(\omega) * \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{k\omega_s\Delta t}{2}} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin \frac{k\omega_s\Delta t}{2}}{\frac{k\omega_s\Delta t}{2}} \cdot \delta(\omega - k\omega_s)}_{\text{factor numeric}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-j\frac{k\omega_s\Delta t}{2}} \frac{\Delta t}{T_s} \frac{\sin \frac{k\omega_s\Delta t}{2}}{\frac{k\omega_s\Delta t}{2}}}_{\text{factor numeric}} \cdot X(\omega - k\omega_s)\end{aligned}$$

38



39

## Relatia dintre spectrul unui semnal discret si spectrul semnalului analogic din care provine

Semnal analogic si spectrul sau  $x_a(t) \longleftrightarrow X_a(\omega)$ ;      Semnal discret si spectrul sau  $x_d[n] = x_a(nT_s) \longleftrightarrow X_d(\Omega)$

Doua expresii echivalente pentru spectrul semnalului analogic:

$$\hat{x}(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) \longleftrightarrow \hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) &\longleftrightarrow \hat{X}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \right\} \\ &= x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) &= \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) \delta(t - kT_s) \right\} \\ & &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) \mathcal{F} \{ \delta(t - kT_s) \} \\ & &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\omega kT_s} \end{aligned}$$

40

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\omega k T_s}$$

Spectrul semnalului discret este:

$$X_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k] e^{-j\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\Omega k}$$

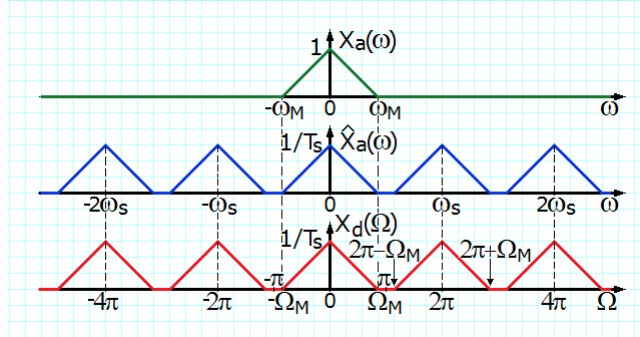
Se observa ca:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-j\omega k T_s} \Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T_s}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_s) e^{-jk\Omega}$$

**Relatia dintre spectrul unui semnal discret si spectrul semnalului analogic din care provine este :**

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_s} - k \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

41



Intre cele doua axe de frecventa corespunzatoare spectrului esantionat respectiv semnalului discret exista relatia:

$$\Omega = \omega T_s$$

Se aplica si acum natura periodica a spectrului semnalului discret  $X_d(\Omega)$

Intre frecventele maxime din spectru exista relatia:

$$\Omega_M = \omega_M T_s; \quad T_s \leq \frac{\pi}{\omega_M}$$

42

## Esantionarea semnalelor discrete

**Problema:** In prelucrarea numerica a semnalelor apar situatii in care, ulterior achizitionarii esantioanelor, se constata ca **frecventa de esantionare a fost prea mare**.

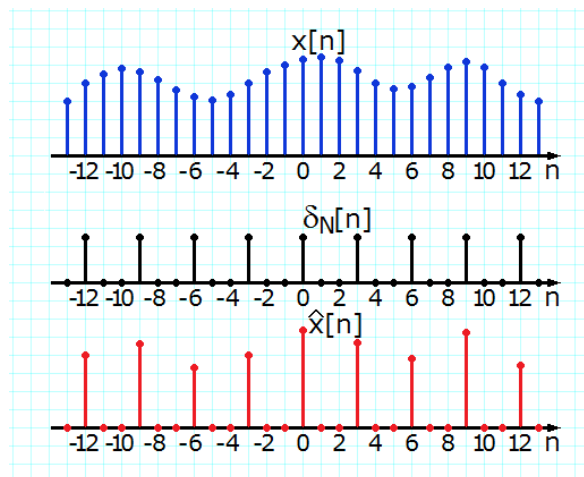
**Solutie:** In astfel de situatii, cand nu se mai poate esantiona semnalul analogic, este posibila esantionarea semnalului numeric, retinandu-se tot a N-a valoare. Se reduce astfel numarul de esantioane dupa ce semnalul a fost deja esantionat = esantionarea semnalului discret

Semnalul discret esantionat se obtine prin produsul:

$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= x[n] \delta_N[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \delta[n - kN]\end{aligned}$$

43

Pas de esantionare  $N=3$



44

## Spectrul semnalului esantionat

$$\delta_N[n] \longleftrightarrow \Omega_s \delta_{\Omega_s}(\Omega) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s); \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(\Omega) &= \mathcal{F}\{x[n]\delta_N[n]\} \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \otimes \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s); \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{N} \end{aligned}$$

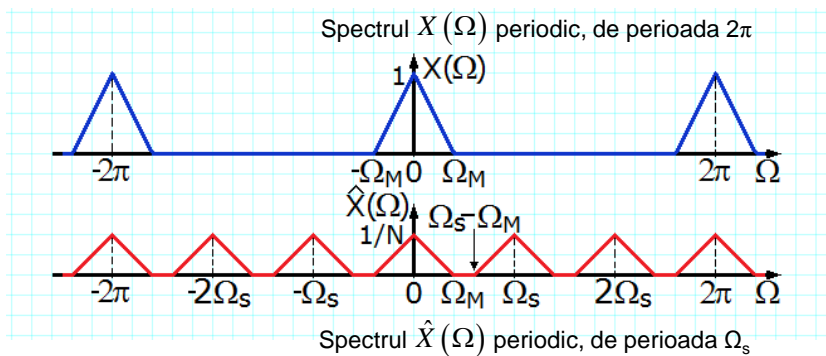
Spectrul semnalului discret esantionat este periodic, de perioada  $\Omega_s$

$$\hat{X}_r(\Omega) = \frac{1}{N} X_r(\Omega) * \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_r(\Omega - k\Omega_s), \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

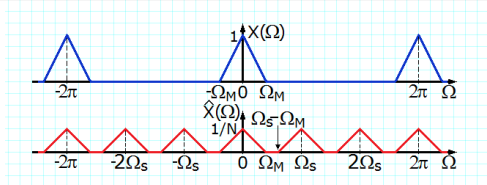
Restrictia pe  $2\pi$  (perioada spectrului semnalului  $x[n]$ )

45

Pas de esantionare  $N=3$



46



Semnalul analogic,  $x(t)$ , de banda limitata  $\omega_M$ , a fost esantionat ideal, cu pasul de esantionare  $T_s \Rightarrow$  semnal numeric de banda limitata  $x[n]$ , care este si el esantionat cu pasul  $N \Rightarrow$  semnal numeric esantionat  $\hat{x}[n]$

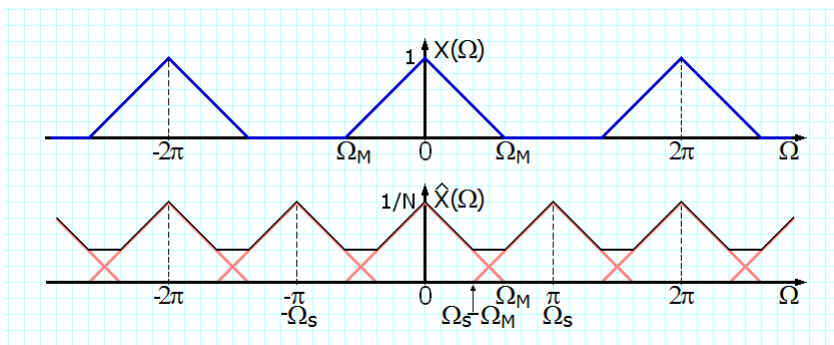
Se dovedeste ca semnalul  $x[n]$  este esantionabil cu pasul  $N$  adica lobi spectrali nu se suprapun, daca semnalul analogic  $x(t)$  ar fi putut fi esantionat si cu perioada  $T'_s = NT_s$  respectandu-se teorema WKS. Initial semnalul analogic a fost supra-esantionat.

Frecventa maxima este  $\Omega_M = \omega_M T_s$ ,  $\Omega_S = 2\pi/N$ , atunci conditia de reconstruire perfecta este:

$$\Omega_S \geq 2\Omega_M$$

$$NT_s \leq \frac{\pi}{\omega_M}; \quad T'_s \leq \frac{\pi}{\omega_M} \quad T'_s = NT_s \quad 47$$

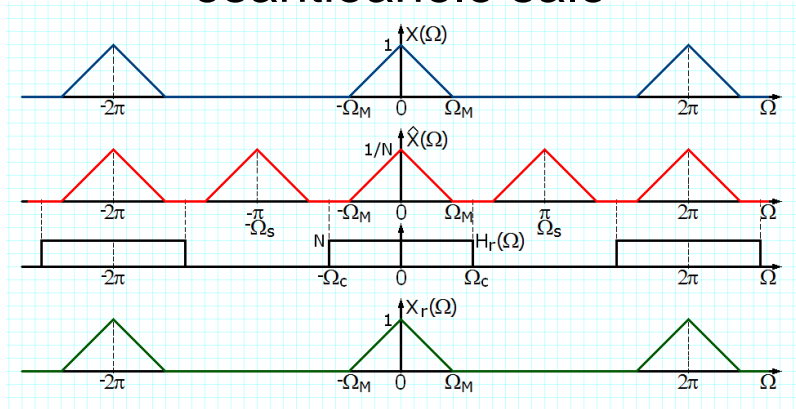
## Eroarea de aliere



$$\Omega_S - \Omega_M < \Omega_M$$



## Reconstruirea semnalului discret din esantioanele sale

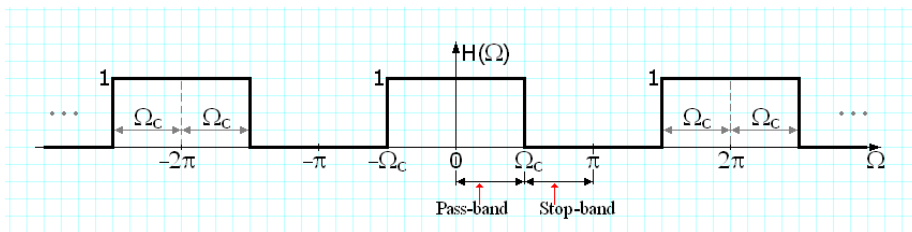


Daca lobii nu se suprapun, prin filtrare trece-jos ideala:

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} N, & |\Omega - 2k\pi| \leq \Omega_c \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad \Omega_M \leq \Omega_c \leq \Omega_s - \Omega_M$$

49

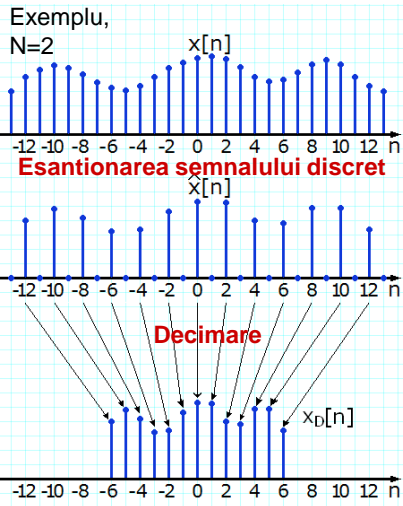
## Caracteristica in frecventa a FTJ ideal in timp discret (capitolul Filtrare)



$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega - 2k\pi| < \Omega_c, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \longleftrightarrow h[n] = \frac{\sin \Omega_c n}{\pi n}$$

50

# Esantionarea si decimarea unui semnal discret



Dupa esantionarea unui semnal discret, intre doua valori retinute (esantioane) sunt intercalate  $N-1$  zerouri, care nu aduc *nici o informatie* despre semnalul esantionat. Ele pot fi *omise*.

Rezulta **semnalul decimat**  $\hat{x}_D[n]$ .

Relatia dintre semnalul discret decimat si cel esantionat :

$$\hat{x}_D[n] = \hat{x}[Nn].$$

Din semnalul decimat se poate reconstrui semnalul nedecimat prin inserarea  $N-1$  zerouri intre doua valori consecutive.

51

Spectrul **semnalul decimat** :

$$\hat{X}_D(\Omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}_D[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_D[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[nN] e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[m] e^{-j\frac{\Omega}{N}m} = \hat{X}\left(\frac{\Omega}{N}\right)$$

Spectrul semnalul digital esantionat  $\hat{X}(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega - k\Omega_s)$       Spectrul semnalul digital initial  $X(\Omega)$

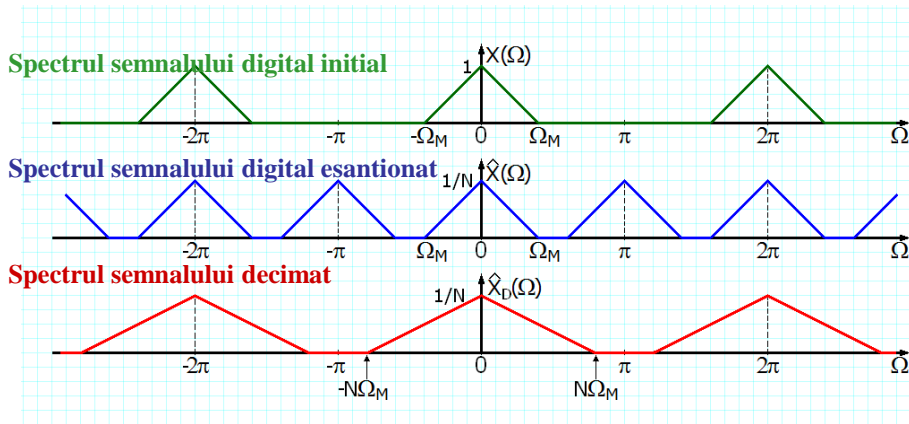
$$\hat{X}_{Dr}(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_r\left(\frac{\Omega - k2\pi}{N}\right)$$

$$k=0: (1/N)X(\Omega/N) \xrightarrow{\Omega \geq N\Omega_M} 0$$

**Intinderea** lobilor spectrali ai semnalului decimat este **de N ori mai mare** decat intinderea lobilor spectrali ai semnalului nedecimat  $x[n]$ .

52

exemplu  $N=2$ .

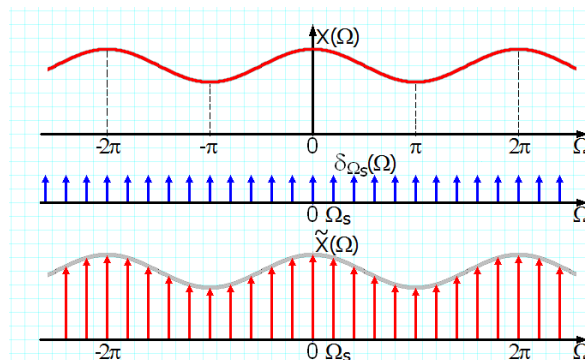


53

## Esantionarea spectrului unui semnal discret de durata finita

Discretizarea semnalelor a fost impusa de utilizarea calculatoarelor numerice (care nu pot prelucra decat marimi discrete in timp/frecventa). *Prelucrarea in domeniul spectrului este de multe ori mai simpla decat in domeniul timp.* Se pune intrebarea cu ce frecventa sa esantionam spectrul  $X(\Omega)$  unui semnal discret  $x[n]$ .

$$\tilde{X}(\Omega) = X(\Omega) \delta_{\Omega_s}(\Omega) = X(\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_s) \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



54

$$\frac{1}{\Omega_s} \delta_N[n] \longleftrightarrow \delta_{\Omega_s}(\Omega) \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

$$\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\delta_{\Omega_s}(\Omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} * \mathcal{F}^{-1}\{\delta_{\Omega_s}(\Omega)\} = x[n] * \frac{1}{\Omega_s} \delta_N[n];$$

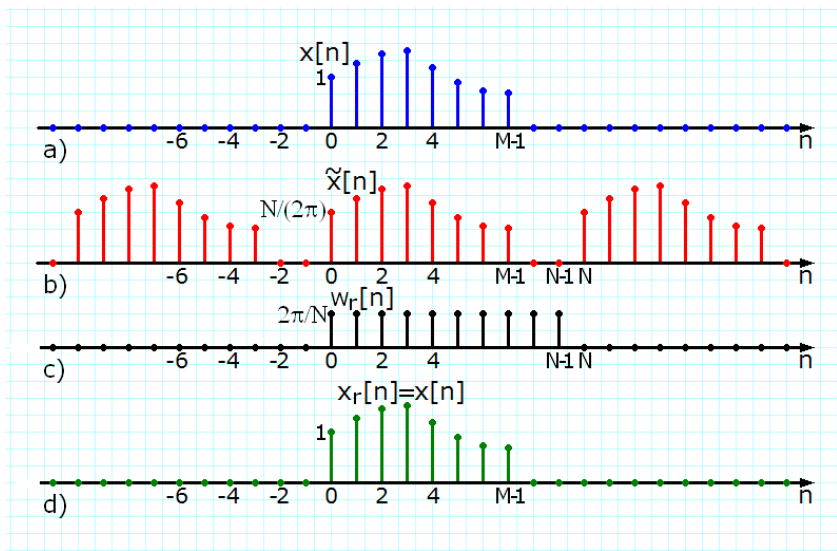
$$\Omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

Fie semnalul  $x[n]$  cu suportul  $0, M-1$ . Semnalul obtinut prin esantionarea spectrului semnalului  $x[n]$  este o extensie prin repetare cu perioada  $N$  a semnalului original  $x[n]$ .

$$\tilde{x}[n] = \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

Conditia de reconstructie:  $x[n]$  sa fie de durata finita,  $M \leq N$ .

55



Se esantioneaza spectrul semnalului de durata finita  $x[n]$  (zero pentru  $n < 0$  si  $n > M-1$ )  $\Rightarrow$  semnal periodic  $\tilde{x}[n]$ , perioada  $N = 2\pi/\Omega_s$

Conditia de reconstructie :  $N \geq M$ , nu sunt suprapuneri ale grupurilor temporale din semnalul rezultat.

•Reconstructia se face prin inmultirea semnalului cu fereastra temporala rectangulara:

$$x_r[n] = x[n] = \tilde{x}[n]w_r[n]; \quad w_r[n] = \begin{cases} \frac{2\pi}{N}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

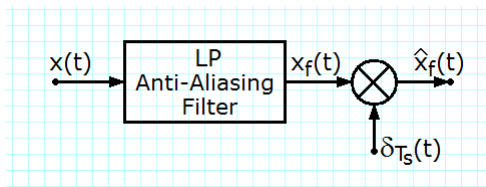
Daca spectrul se esantioneaza prea rar, rezulta  $N < M \Rightarrow$  apare suprapunerea grupurilor temporale; deci erori de aliere.

Semnalul  $x[n]$  nu mai poate fi reconstruit din spectrul esantionat.

57

## Masuri practice la esantionarea semnalelor analogice

- Nu se cunoaste largimea benzii unui semnal de banda limitata ce urmeaza a fi esantionat.
- Semnalul poate avea componente spectrale de frecvente mari, neinteresante in aplicatia considerata. Ele pot fi cauzate si de zgomot.
- Apare astfel riscul erorilor de aliere. Acestea se evita folosind un filtru trece-jos numit si filtru *anti-aliere* prevazut in structura lantului de prelucrare a semnalului, inainte de circuitului de esantionare si memorare



58

•**Sisteme de telefonie numerica (semnal audio) :**

- Frecventa maxima din spectru:  $f_M=3.4$  kHz
- Frecventa Nyquist de esantionare:  $f_s=6.8$  kHz
- Frecventa standard de esantionare:  $f_s=8$  kHz

•**Sisteme de televiziune (semnalul video):**

- Frecventa maxima din spectru:  $f_M=5$  MHz
- Frecventa Nyquist de esantionare:  $f_s=10$  MHz
- Frecventa standard de esantionare:  $f_s=18$  MHz

59



Semnal vocal fara aliere.



originalspeech.wav



Semnal vocal cu aliere



aliasingspeech.wav



Semnal muzical fara aliere.



music.wav



Semnal muzical cu aliere.



aliasingmusic.wav

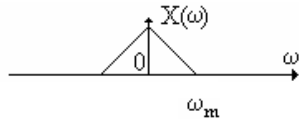
60

# Esantionarea semnalelor trece-banda

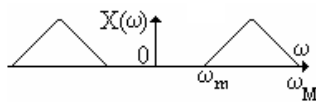
Semnale de tip "trece jos" - spectrul concentrat in benzi care includ frecventa nula.

Semnale de tip "trece banda" - au suportul spectrului de forma

$$\text{supp}\{X(\omega)\} = [-\omega_M, -\omega_m] \cup [\omega_m, \omega_M]$$



Low-pass signal.



Band-pass signal.

Reconstructia perfecta a unui semnal trece banda esantionat ideal se poate realiza pe baza teoremei WKS:  $\omega_s \geq 2\omega_M$ .

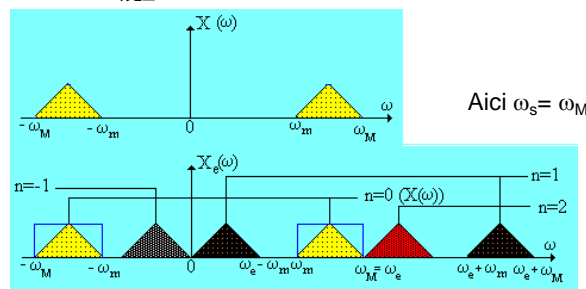
Uneori semnalele trece banda pot fi reconstruite din esantioanele lor chiar daca s-a folosit o *frecventa de esantionare mai mica decat frecventa Nyquist*.

# Cazul semnalelor trece banda de banda ingusta

Semnal trece banda de banda ingusta :  $\frac{\omega_M - \omega_m}{\omega_m} < 1$

Suportul spectrului unui semnal trece banda de banda ingusta esantionat ideal este de forma:

$$\text{supp}\{X_s(\omega)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{[-\omega_M + n\omega_s, -\omega_m + n\omega_s] \cup [\omega_m + n\omega_s, \omega_M + n\omega_s]\}$$

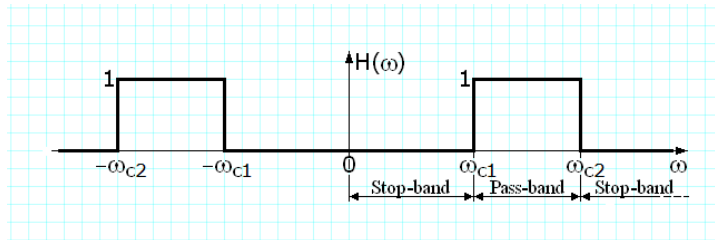


Reconstructie perfecta: filtrare trece-banda ideala chiar daca s-a folosit o frecventa de esantionare inferioara frecventei Nyquist

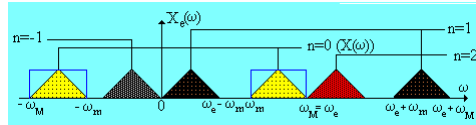
### Filtrul trece-banda ideal

$$H_{TB}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} = p_{\omega_{c2}}(\omega) - p_{\omega_{c1}}(\omega)$$

$$h_{BP}(t) = \frac{\sin \omega_{c2} t}{\pi t} - \frac{\sin \omega_{c1} t}{\pi t}$$



63



Reconstrucție perfectă :

$$\left[ -\omega_M + k\omega_s, -\omega_m + k\omega_s \right] \cap \left[ \omega_m + l\omega_s, \omega_M + l\omega_s \right] = \emptyset \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

Deplasare in intervalul  $[-\omega_M, -\omega_m]$  cu  $k\omega_s$       Deplasare in intervalul  $[\omega_m, \omega_M]$  cu  $l\omega_s$

Pentru  $l=0$ :

$$\begin{aligned} & \left[ -\omega_M + k\omega_s, -\omega_m + k\omega_s \right] \cap \left[ \omega_m, \omega_M \right] = \emptyset, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ & \begin{cases} -\omega_M + k\omega_s \leq \omega_m \\ -\omega_M + (k+1)\omega_s \geq \omega_M \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\omega_M}{k+1} \leq \omega_s \leq \frac{2\omega_m}{k} \end{aligned}$$

Daca exista valori intregi ale lui  $k$  pentru care aceasta conditie este satisfacuta, atunci exista valori ale frecventei de esantionare inferioare frecventei Nyquist pentru care semnalele trece banda de banda ingusta pot fi reconstruite in urma esantionarii ideale.

64



Solutia din multimea numerelor intregi a dublei inecuatii obtinute este

$$0 < k \leq \frac{\omega_m}{\omega_M - \omega_m} = n_0$$

frecventa de esantionare va apartine unor intervale de forma:

$$\left[ \frac{2\omega_M}{k+1}, \frac{2\omega_m}{k} \right] \quad \text{cu } k \in \{1, \dots, n_0\}$$

### Exemplu

$\omega_m = 8\pi$  si  $\omega_M = 10\pi$  atunci  $n_0 = \frac{\omega_m}{\omega_M - \omega_m} = 4 \Rightarrow$  Valorile admisibile pentru  $k$  sunt 1, 2, 3, 4.

Intervalele corespunzatoare pentru frecventa de esantionare:

$$\omega_s \in \{4\pi\} \cup [5\pi, 5.33\pi] \cup [6.66\pi, 8\pi] \cup [10\pi, 16\pi] \cup [20\pi, \infty]$$