



Prelucrarea semnalelor

Facultatea de Electronica si Telecomunicatii,
UPT

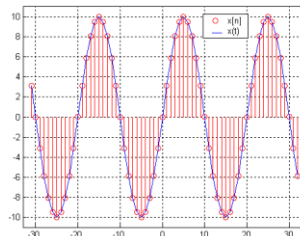
<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/>

1

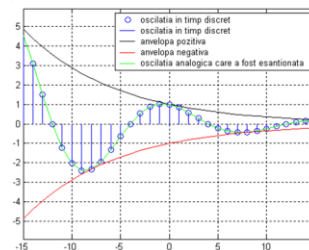
Transformarea Laplace

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap7.pdf>

Pierre Simon Laplace



Regim permanent – Transformata Fourier



Regim tranzitoriu – Transformata Laplace

2

- Transformarea Laplace bilaterala

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t), \sigma \in \text{DC}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt; s = \sigma + j\omega; \sigma, \omega \in \mathfrak{R}$$

- Transformarea Laplace unilaterala

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \leftrightarrow \mathcal{X}(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st} dt; \text{Re}\{s\} > \sigma_0$$

- Relatia dintre cele doua:

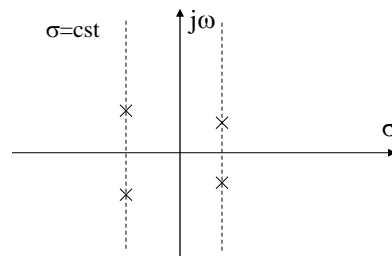
$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}_u\{x(-t)\}(-s)$$

3

Trasformata Laplace generalizează transformata Fourier în tot planul complex.

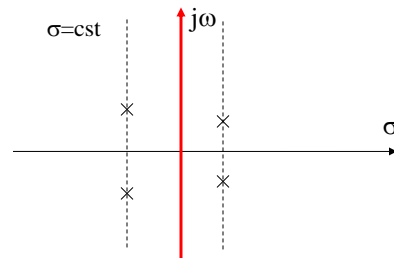
Pentru variabila complexă se utilizează notația:

$$s = \sigma + j\omega \quad \sigma \in \mathfrak{R}, \omega \in \mathfrak{R} \quad (1.1)$$



4

Pentru $\sigma=0$ transformata Laplace este spectrul semnalului adică transformata Fourier.



5

1. Răspunsul unui sistem liniar și invariant în timp la o exponențială cu exponent complex

Semnalul exponențială complexă, cu exponent complex:

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{\sigma_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t}, \quad (1.2)$$

se aplică la intrarea unui SLIT caracterizat prin răspunsul la impuls $h(t)$.

La ieșirea sistemului se obține semnalul:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{(\sigma_0 + j\omega_0)(t-\tau)} d\tau = \\ &= e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)\tau} d\tau = e^{s_0 t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \Big|_{s=s_0} \end{aligned}$$

În ipoteza că este convergentă, se notează cu $H(s)$ integrala:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-\sigma\tau} \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.3)$$

- depinde numai de $h(\tau)$,
- în anumite condiții caracterizează complet SLIT.

6

Răspunsul $y(t)$ al SLIT :

$$y(t) = e^{s_0 t} \cdot H(s_0) = x(t) \cdot H(s_0) \quad (1.4)$$

care ne arată că : $-e^{s_0 t}$ este o funcție proprie a SLIT,
- $H(s_0)$ este valoarea proprie asociată ei.

Daca semnalul de intrare este o combinație liniară de forma:

$$x(t) = \sum_k c_k e^{s_k t}, \quad (1.5)$$

rezultă :

$$y(t) = \sum_k c_k H(s_k) e^{s_k t}, \quad (1.6)$$

operatorul S care modelează sistemul fiind liniar.

Se poate vedea că o funcție $H(s)$ definită prin expresia (1.3) permite calculul răspunsului unui SLIT la care semnalul de intrare poate fi pus sub forma (1.5).

7

2. Transformarea Laplace bilaterală

Prin definiție transformata Laplace bilaterală a unui semnal $x(t)$ este:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt; \quad s = \sigma + j\omega; \quad \sigma, \omega \in \mathfrak{R} \quad (1.7)$$

Legătura între transformarea Laplace bilaterala și transformarea Fourier:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t) e^{-\sigma t}\}(\omega) \quad (1.8)$$

Transformata Laplace bilaterală a unui semnal $x(t)$ este transformata Fourier a semnalului $x(t)e^{-\sigma t}$.

Daca $\sigma=0$, se obține:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \quad (1.9)$$

Transformata Laplace bilaterală evaluată pe axa imaginara $j\omega$ ($\sigma=0$) este egală cu transformata Fourier a aceluiași semnal.

8

Notații:

În loc de a scrie $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, se scrie (din rațiuni tipografice)
 $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ și prin urmare: $\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$.

În continuare, vom nota cu $X(s)$ transformata Laplace bilaterală, tolerând două notații pentru transformata Fourier și anume $X(\omega)$ când este definită direct și $X(j\omega)$ când rezultă prin particularizarea transformatei Laplace bilaterale:

$$X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega) \equiv X(\omega) \quad (1.10)$$

9

Exemple:

1.) Considerăm semnalul causal $x(t) = e^{-\omega_0 t} \sigma(t)$. Transformata sa Fourier există și este: $\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \frac{1}{\omega_0 + j\omega}$.

Transformata Laplace bilaterală a semnalului $x(t)$ este:

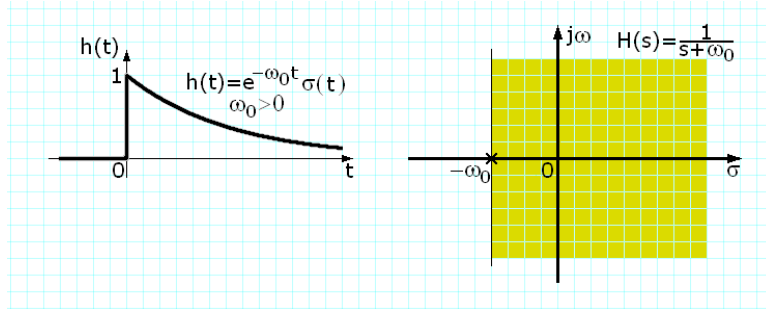
$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_0 t} \sigma(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} dt.$$

Integrala este convergentă numai pentru $\omega_0 + \sigma > 0$, deci $\sigma > -\omega_0$, care se mai scrie și $\text{Re}\{s\} > -\omega_0$. Avem deci:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{\sigma + \omega_0 + j\omega} = \frac{1}{\omega_0 + s}; \quad \sigma = \text{Re}\{s\} > -\omega_0. \quad (1.11)$$

Se poate constata că, dacă $-\omega_0 < 0$ atunci dreapta $\sigma = 0$, axa imaginară, este în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale și:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = \frac{1}{\omega_0 + j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega), \quad \omega_0 < 0. \quad 10$$



11

2.) Se consideră semnalul anticauzal din Fig.1.1, având expresia:

$$y(t) = -e^{-\omega_0 t} \sigma(-t), \quad \omega_0 > 0$$

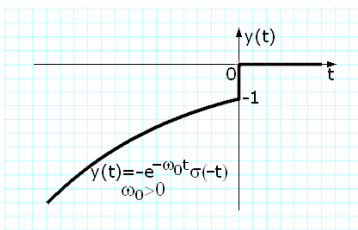


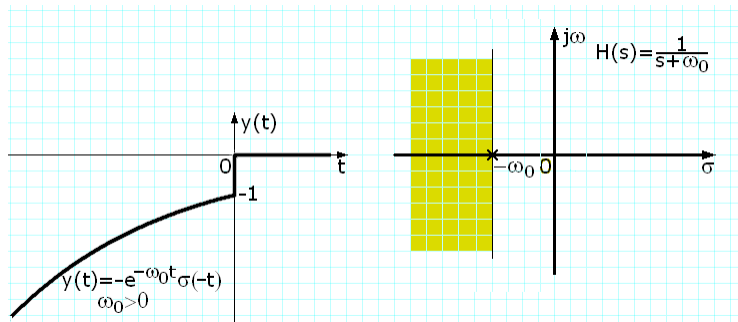
Fig.1.1 Semnal anticauzal, ce nu are transformată Fourier dar are transformată Laplace.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\omega_0 t} \sigma(-t) e^{-st} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Pentru ca integrala să fie convergentă este necesar și suficient să avem $\omega_0 + \sigma < 0$ sau $\sigma < -\omega_0$. În aceste condiții:

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_{-\infty}^0 -e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} \Big|_0^{-\infty}}{\omega_0 + \sigma + j\omega} = \frac{1}{\omega_0 + s}$$

(1.12) 12



$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_{-\infty}^0 -e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-(\omega_0 + \sigma)t} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^0}{\omega_0 + \sigma + j\omega} = \frac{1}{\omega_0 + s}$$

13

2.1 Proprietățile domeniului de convergență (DC) al transformatei Laplace bilaterale

- I.** DC al transformatei Laplace bilaterale, dacă există, este **format din benzi** ale planului s **paralele cu axa imaginară $j\omega$** .
- II.** DC al transformatei Laplace bilaterale **nu poate conține nici un pol** al acesteia.
- III.** Dacă $x(t)$ are **durață finită** și dacă există cel puțin o valoare s_0 din planul variabilei complexe pentru care transformata Laplace bilaterală converge, atunci domeniul de convergență este **întreg planul complex**.
- IV.** Dacă $x(t)$ este un **semnal cu întindere spre dreapta** (Fig.1.2) și dacă dreapta de ecuație $Re\{s\} = \sigma_0$ este în domeniul de convergență, atunci toate punctele s din planul complex ce satisfac $Re\{s\} \geq \sigma_0$ sunt în domeniul de convergență. Semnalele cu întindere spre dreapta au **domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale cu întindere spre dreapta**.

14

V. Dacă $x(t)$ este un semnal cu întindere spre stânga (Fig.1.3) și dacă dreapta de ecuație $Re\{s\}=\sigma_0$ este în domeniul de convergență, atunci toate punctele s din planul complex ce satisfac $Re\{s\} \leq \sigma_0$ sunt în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale cu întindere spre stânga.

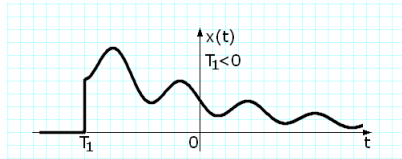


Fig.1.2 Semnal de durata infinită cu suportul nemărginit la dreapta.

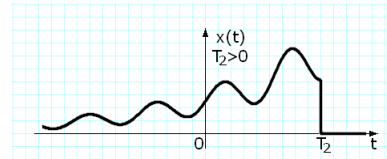


Fig.1.3 Semnal de durata infinită cu suportul nemărginit la stânga.

VI. Dacă suportul semnalului $x(t)$ este toată axa reală și dacă dreapta de ecuație $Re\{s\}=\sigma_0$ este în domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale, atunci DC al acesteia este o bandă paralelă cu axa imaginară, conținând dreapta $Re\{s\}=\sigma_0$.

15

Exemple:

1.) Semnalul de durată finită $x(t) = e^{-\omega_0 t} [\sigma(t) - \sigma(t - T)]$ are transformata Laplace bilaterală:

$$H(s) = \int_0^T e^{-(s+\omega_0)t} dt = \frac{1 - e^{-(s+\omega_0)T}}{s + \omega_0}$$

Zerourile transformatei sunt $s_{zk} = -\omega_0 + j(2k\pi/T)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Transformata are un singur pol $s_p = -\omega_0$, compensat de zeroul $k=0$, $s_{z0} = -\omega_0$. Așadar, $X(s)$ are ca DC tot planul complex.

2.) Semnalul de durată infinită, cu suportul confundat cu axa reală $x(t) = e^{-\omega_0 |t|}$, $\omega_0 > 0$, se poate scrie sub forma:

$x(t) = e^{-\omega_0 t} \sigma(t) + e^{\omega_0 t} \sigma(-t)$, egalitatea fiind valabilă aproape peste tot (cu excepția punctului $t=0$).

16

Semnalul cu întindere spre dreapta are transformata Laplace:

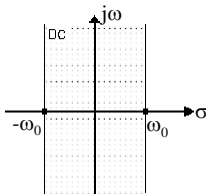
$$\mathcal{L}\{e^{-\omega_0 t} \sigma(t)\} = \frac{1}{s + \omega_0}, \quad \text{Re}\{s\} > -\omega_0$$

Semnalul cu întindere spre stânga are transformata Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{\omega_0 t} \sigma(-t)\} = -\frac{1}{s - \omega_0}, \quad \text{Re}\{s\} < \omega_0$$

În consecință:

$$\mathcal{L}\{e^{-\omega_0 |t|}\} = \frac{1}{s + \omega_0} - \frac{1}{s - \omega_0} = \frac{-2\omega_0}{s^2 - \omega_0^2}, \quad -\omega_0 < \text{Re}\{s\} < \omega_0$$



Dacă $\sigma=0$, rezultă:

$$\mathcal{F}\{e^{-\omega_0 |t|}\} = \frac{-2\omega_0}{(j\omega)^2 - \omega_0^2} = \frac{2\omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2}.$$

Fig.1.4 DC pentru transformata semnalului $\exp(-\omega_0 |t|)$.

17

2.2 Transformarea Laplace inversă

Transformarea Laplace bilaterală directă este o transformare Fourier directă aplicată semnalului $x(t)e^{-\sigma t}$, σ fixat, deci pe o paralelă la axa $j\omega$.

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}(\omega) \quad (1.8)$$

Semnalul $x(t)e^{-\sigma t}$, σ fixat, poate fi recuperat prin transformarea Fourier inversă:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.13)$$

Integrala (1.13) se efectuează pe o **paralelă** dusă în planul s **la axa $j\omega$** ($\sigma = \text{constant}$ în raport cu ω , $ds = d(\sigma + j\omega) = jd\omega$),

18

sau:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{j\omega t} ds$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t), \sigma \in \text{DC} \quad (1.14)$$

Integrala se efectuează pe o paralelă la axa imaginară conținută în DC.

Relațiile (1.7) și (1.14) definesc o pereche Laplace (bilaterală):

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad (1.15)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt; s = \sigma + j\omega; \sigma, \omega \in \mathfrak{R} \quad (1.7)$$

Pentru determinarea transformării inverse se folosește mai des metoda **descompunerii în fracții simple** și se caută funcțiile temporale în **tabele**.

19

Exemple:

1.) Se cere să se inverseze funcția $X(s) = 1/[(s+2)(s+3)]$. Dacă DC nu este precizat problema este nedeterminată, având 3 soluții posibile.

În DC nu poate intra nici un pol. Se exclud așa cum se arată în Fig.1.5 dreptele $\sigma = -2$ și $\sigma = -3$. Se descompune $X(s)$ în fracții simple:

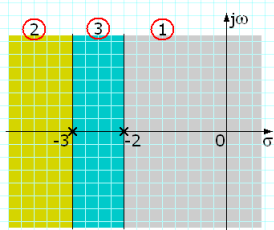


Fig.1.5 Cele 3 DC posibile pentru $X(s) = 1/[(s+2)(s+3)]$.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \quad (1.16)$$

i) Dacă DC este **1**, $\sigma > -2$, atunci fiecare termen al relației (1.16) va fi inversat într-un semnal cauzal:

$$\sigma > -2 : \frac{1}{s+2} \rightarrow e^{-2t} \sigma(t);$$

$$\sigma > -3 : \frac{1}{s+3} \rightarrow e^{-3t} \sigma(t)$$

Rezultă:

$$\sigma > -2 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \rightarrow (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot \sigma(t). \quad (1.17) \quad 20$$

ii) Dacă DC este **2**, $\sigma < -3$, atunci fiecare termen al relației (1.16) se inversează prin câte un semnal anticauzal:

$$\sigma < -2 : \frac{1}{s+2} \rightarrow -e^{-2t} \sigma(-t); \quad \sigma < -3 : \frac{1}{s+3} \rightarrow -e^{-3t} \sigma(-t)$$

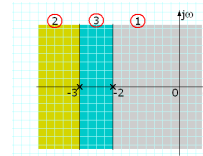


Fig.1.5

Rezultă:

$$\sigma < -3 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \rightarrow (-e^{-2t} + e^{-3t}) \sigma(-t). \quad (1.18)$$

iii) Dacă DC este **3**, $-3 < \sigma < -2$ atunci rezultă:

$$\text{semnal anticauzal: } \sigma < -2 : \frac{1}{s+2} \rightarrow -e^{-2t} \sigma(-t);$$

$$\text{semnal cauzal: } \sigma > -3 : \frac{1}{s+3} \rightarrow e^{-3t} \sigma(t);$$

$$-3 < \sigma < -2 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \rightarrow -e^{-2t} \sigma(-t) - e^{-3t} \sigma(t). \quad (1.19)$$

21

Concluzii:

- Aceiași transformată Laplace bilaterală, (1.16) poate fi inversată în trei moduri distincte, după cum este ales DC.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}. \quad (1.16)$$

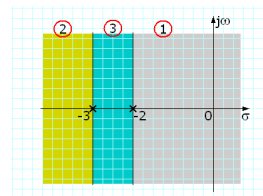
- Numai în cazul i) $j\omega \in DC$ și, prin urmare, numai pentru semnalul (1.17) există transformata Fourier.

$$\sigma > -2 : x(t) = (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot \sigma(t).$$

- Semnalele (1.18) și (1.19) deși au transformate Laplace bilaterale, nu au transformate Fourier, axa imaginară nefiind inclusă în DC.

$$\sigma < -3 : x(t) = (-e^{-2t} + e^{-3t}) \sigma(-t).$$

$$\sigma > -2 : x(t) = (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot \sigma(t).$$



22

2.3 Definirea transformatei Laplace bilaterale prin constelația de poli și zerouri

Dacă transformata Laplace bilaterală este o fracție rațională:

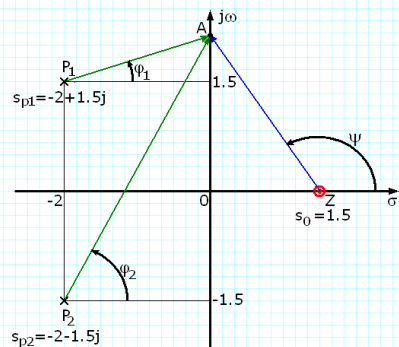
$$X(s) = K \frac{\prod_{k=1}^M (s - s_{0k})}{\prod_{k=1}^N (s - s_{pk})}, \quad (1.20)$$

se observă că este suficientă cunoașterea polilor s_{pk} și a zerourilor s_{0k} pentru a cunoaște, cu rezerva unei constante multiplicative K , pe $X(s)$. Dacă, în plus, se cunoaște și valoarea transformatei $X(s)$ într-un punct $s_0 \in DC$ poate fi determinată și constanta K .

Polii și zerourile pot fi dați prin valorile lor complexe sau printr-o diagramă a “constelației” de poli și zerouri, CPZ.

23

Exemplu de reprezentare a unei CPZ pentru o transformată Laplace bilaterală, $X(s)$.



$$X(s) = K \frac{s - 1,5}{(s + 2 - j1,5)(s + 2 + j1,5)},$$

$$X(s) = K \frac{s - 1,5}{s^2 + 4s + 6,25}$$

Dacă se specifică faptul că $x(t)$, semnalul temporal, este cauzal, atunci DC este $\sigma > -2$, situat la dreapta verticalei ce trece prin poli.

Axa $j\omega$ este inclusă în DC există și transformata Fourier a semnalului:

$$F\{x(t)\}(\omega) = \left. \frac{s - s_0}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})} \right|_{s=j\omega} = \frac{j\omega - s_0}{(j\omega - s_{p1})(j\omega - s_{p2})}$$

Transformarea Fourier este particularizarea lui $X(s)$ for $s=j\omega$. Ea poate fi calculata pentru diferite valori ale ω . Pentru fiecare valoare, punctul A ia o poziție diferită pe axa imaginara.

24

$$j\omega - s_0 = |\overline{ZA}| e^{j\Psi},$$

$$j\omega - s_{p1} = \overline{P_1A} e^{j\varphi_1},$$

$$j\omega - s_{p2} = \overline{P_2A} e^{j\varphi_2}.$$

$$X(j\omega) = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{P_1A}| \cdot |\overline{P_2A}|} e^{j(\Psi - \varphi_1 - \varphi_2)}$$

De unde:

$$|X(j\omega)| = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{P_1A}| \cdot |\overline{P_2A}|}; \quad \text{Arg}X(j\omega) = \Psi(\omega) = \Psi - \varphi_1 - \varphi_2$$

Modulul și faza transformatei Fourier, pentru cazul general, se calculează cu relațiile:

$$|X(j\omega)| = |K| \frac{\prod_{k=1}^M |\overline{Z_kA}|}{\prod_{k=1}^N |\overline{P_kA}|}; \quad \Psi(\omega) = \text{Arg}K + \sum_{k=1}^M \Psi_k - \sum_{k=1}^N \varphi_k \tag{1.21}$$

25

Transformarea Laplace unilaterala

Studiul sistemelor cauzale ce nu sunt initial in starea de repaus (nu au conditii initiale nule) se face utilizand transformarea definita prin relatia :

$$\mathcal{L}_u \{x(t)\}(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Ea exista si este analitica in semiplanul $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ daca $x(t)$ satisface conditiile :

- i) Cauzalitate $x(t) \cdot \sigma(t) = x(t)$;
- ii) Continue cu exceptia eventual a unei multimi numarabile de puncte in care au discontinuitati de speta intai;
- iii) $|x(t)| \leq M e^{-\sigma_0 t}, M > 0, \sigma_0 \geq 0,$

Transformarea inversa este definita de:

$$x(t) = \mathcal{L}_u^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds, \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$$

pereche Laplace unilaterala:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} X(s)$$

27

3.1 Relatia dintre transformata Laplace bilaterala si transformata Laplace unilaterala

-Pentru cazul semnalelor *cauzale*, $x(t)=x(t)\sigma(t)$, intre cele doua transformate nu exista diferente :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sigma(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) \end{aligned}$$

-Pentru semnale cu suportul plasat si in $t < 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 x(t) \cdot e^{-st} dt + \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt, \\ &= \int_0^{\infty} x(-t) e^{-(-st)} dt + \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \\ \mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}_u\{x(-t)\}(-s) \end{aligned}$$

28

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}_u\{x(-t)\}(-s)$$

Transformata Laplace bilaterală este suma dintre transformata Laplace unilaterală a semnalului și transformata Laplace unilaterală reflectată (-s) a semnalului reflectat (-t).

In cazul transformării unilaterale, specificarea domeniului de convergență nu este necesară.

Transformata unilaterală se referă nu mai la partea din dreapta originii a oricărui semnal și, deci, domeniul de convergență va fi un semiplan delimitat de o dreaptă paralelă cu axa imaginară, ce trece prin polul plasat în extrema dreaptă, întinzându-se spre dreapta.

29

4. Transformarea Laplace a distribuțiilor

Transformata Laplace a unei distribuții $f \in \mathcal{S}'$ poate fi definită utilizând transformata ei Fourier:

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{F}\{e^{-\sigma t} f\} \quad (1.26)$$

Pentru **distribuția Dirac** $\delta(t)$ se aplică definiția sub forma:

$$\mathcal{L}\{\delta\} = \mathcal{F}\{\delta(t)e^{-\sigma t}\}$$

Pentru $\forall \sigma \in \mathfrak{R}$, $e^{-\sigma t}\delta(t) = e^0\delta(t) = \delta(t)$ și, deci:

$$\mathcal{L}\{\delta\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1, \quad \forall s \in \mathcal{C}. \quad (1.27)$$

Considerând **distribuția Dirac deplasată** $\delta(t-t_0)$ rezultă:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \mathcal{F}\{\delta(t-t_0)e^{-\sigma t}\} = e^{-s t_0}, \quad \forall s \in \mathcal{C}. \quad (1.28)$$

30

Pentru **treapta unitară** $\sigma(t)$ se poate aplica direct definiția (1.7):

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt; \quad s = \sigma + j\omega; \quad \sigma, \omega \in \mathfrak{R} \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt.$$

Integrala este convergentă numai dacă $\text{Re}\{s\} > 0$, caz în care:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0. \quad (1.29)$$

Dacă treapta unitară este reflectată $x(t) = \sigma(-t)$, atunci:

$$\mathcal{L}\{\sigma(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(-t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = -\frac{1}{s}, \quad \text{Re}\{s\} < 0.$$

și, deci:

$$\mathcal{L}\{-\sigma(-t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}\{s\} < 0. \quad (1.30)$$

$$\mathcal{L}_u\{\delta\} = \mathcal{L}\{\delta\} = 1, \quad \mathcal{L}_u\{\sigma(t)\} = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}_u\{-\sigma(-t)\} = 0 \quad (1.31)$$

5. Proprietati ale celor doua tipuri de transformate Laplace

Se noteaza:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad s \in \text{DC}_x; \quad x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} X(s)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) \quad s \in \text{DC}_y; \quad y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} Y(s)$$

1. Liniaritatea:

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(s) + bY(s) \quad s \in \text{DC}_x \cap \text{DC}_y, \text{ cel puțin}$$

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX_u(s) + bY_u(s). \quad (1.32)$$

2. Translatia in timp:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad s \in \text{DC}_x, \forall t_0, \quad (1.33)$$

Teorema intarzierii: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X_u(s) \quad t_0 > 0.$

3. Modularea in timp:

$$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0) \quad s \in \text{DC} \text{ deplasat cu } \sigma_0$$

$$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X_u(s - s_0). \quad (1.34)$$

4. Scalarea variabilei timp:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), a \in \mathfrak{R}^*, \frac{s}{a} \in \text{DC}. \quad (1.35)$$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_u\left(\frac{s}{a}\right), a > 0.$$

5. Teorema convolutiei:

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s)Y(s) \quad s \in \text{DC}_x \cap \text{DC}_y \text{ cel putin.} \quad (1.36)$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X_u(s)Y_u(s).$$

6. Derivarare in timp:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) \quad s \in \text{DC cel putin.} \quad (1.37)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_u(s) - x(0^+).$$

33

7. Derivarare in domeniul variabilei s:

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad s \in \text{DC}. \quad (1.38)$$

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX_u(s)}{ds}.$$

8. Integrarea semnalului in domeniul timp:

Fie $y(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * \sigma(t).$$

Se deduce:

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

Cum $(1/s)$ are DC $\text{Re}\{s\} > 0$ rezulta:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s} \quad s \in \text{DC} \cap (\text{Re}\{s\} > 0) \text{ cel putin} \quad (1.39)$$
$$\int_{0^+}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X_u(s)}{s} \text{ sau } \int_{0^+}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X_u(s) + x^{(-1)}(0^+)}{s}$$

daca exista un impuls in origine. $x^{(-1)}(0^+)$ - valorarea integralei in origine.

9. Teorema valorii initiale a unui semnal causal:

Pentru semnalul causal $x(t)=x(t)\sigma(t)$, cele doua transformate sunt identice $X(s)\equiv X_u(s)$.

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX_u(s) \quad (1.40)$$

10. Teorema valorii finale a unui semnal causal:

Semnalul $x(t)$ fiind causal: $x(t)=x(t)\sigma(t)$, avem: $X(s)\equiv X_u(s)$.

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (1.41)$$

35

6. Studiul sistemelor liniare si invariante in timp prin intermediul transformarii Laplace

6.1 Functia de transfer a unui SLIT

Pentru un SLIT: $y(t)=h(t)*x(t)$.

Aplicand transformarea Laplace bilaterala rezulta:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s); \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s). \quad (1.42)$$



Fig.1.7a SLIT caracterizat de raspunsul la impuls $h(t)$.

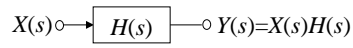


Fig.1.7b SLIT caracterizat de functia de sistem $H(s)$.

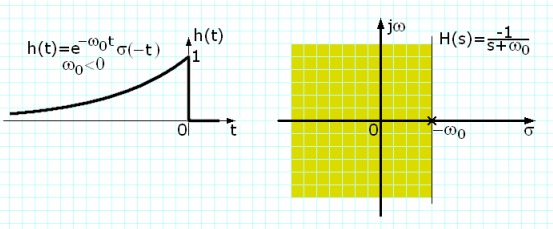
Raspunsul la impuls caracterizeaza complet comportarea unui SLIT in domeniul timp, iar functia $H(s)$, caracterizeaza complet comportarea sa in domeniul complex.

Denumiri pentru $H(s)$: - functie (de) sistem sau **functie de transfer**.

36

Consideram un sistem SLIT stabil. Atunci exista transformata sa Fourier $\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)=\mathcal{L}\{h(t)\}(j\omega)$ si axa imaginara este inclusa in domeniul de convergenta al functiei sistem $H(s)$.

Exemplu: un sistem anticauzal



Conditia de convergenta:

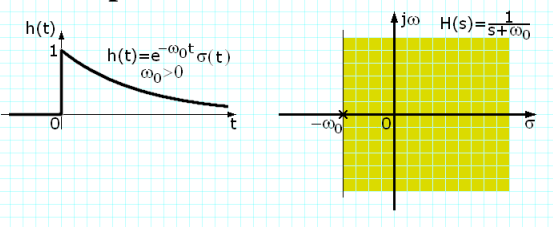
$$Re\{s\} < -\omega_0$$

$$\mathcal{F}\{h(t)\}=H(\omega)=-1/(\omega_0+j\omega)$$

Raspunsul la impuls $h(t)$ al unui sistem necauzal si functia sistem $H(s)$ impreuna cu domeniul de convergenta.

37

Exemplu: un sistem cauzal



Conditia de convergenta:

$$Re\{s\} > -\omega_0$$

Raspunsul la impuls $h(t)$ al unui sistem cauzal si functia sistem $H(s)$ impreuna cu domeniul de convergenta.

$$\mathcal{F}\{h(t)\}=1/(\omega_0+j\omega)$$

38

6.3 Sisteme liniare si invariante in timp caracterizate prin ecuatii diferentiale liniare cu coeficienti constanti

Fie SLIT caracterizat prin ecuatia diferentiala:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad a_0 \neq 0, \quad (1.52)$$

cu conditii initiale nenule.

Aplicand transformata Laplace bilaterala, rezulta:

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s). \quad (1.53)$$

Functia de transfer $H(s)=Y(s)/X(s)$:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (1.54)$$

39

Radacinile ecuatiei:

$$D(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0, \quad (1.55)$$

dau **polii sistemului**, s_{pk} , in numar de N , incluzand si ordinele de multiplicitate:

Radacinile ecuatiei:

$$N(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k = 0, \quad (1.56)$$

dau **zerourile sistemului**, s_{0k} , in numar de M , incluzand si ordinele de multiplicitate:

Se presupune ca sistemul este cauzal ($h(t)\sigma(t)= h(t)$), asadar: $H_u(s)=H(s)=\mathcal{L}_u\{h(t)\}=\mathcal{L}\{h(t)\}$.

Teorema valorii initiale a unui semnal cauzal, aplicata raspunsului la impuls (si el cauzal), conduce la:

$$h(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H_u(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sN(s)}{D(s)}. \quad (1.57)$$

40

Daca $h(0^+)$ este finit, deci nu exista impulsuri Dirac in origine, atunci se poate deduce ca $M+1 \leq N$. Tinand seama de forma expresie(1.54), avem:

$$h(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_M s^{M+1} + b_{M-1} s^M + \dots + b_1 s^2 + b_0 s}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Daca $M+1 > N$, atunci limita nu poate fi finita. Ramane, in consecinta: $h(0^+) < \infty$, $M+1 \leq N$, $M \leq N-1$.

Gradul numaratorului unei functii sistem ce nu are impulsuri Dirac in origine este cu cel putin o unitate mai mic decat al numitorului.

Daca $M+1 > N$ expresia lui $h(t)$ prezinta impulsuri Dirac in origine.

Exemplu:

$$H_u(s) = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1} \quad h(t) = \delta(t) + e^{-t} \sigma(t).$$

41

In mod normal numarul polilor unei functii sistem intrece cu cel putin o unitate numarul zerourilor ei.

Polii unui sistem stabil sunt plasati doar in semiplanul stang, iar zerourile sale pot fi plasate oriunde.

Sistemele ce au atat polii cat si zerourile plasate in semiplanul stang se numesc sisteme de faza minima.

Exemplu. Fie: $h(t) = e^{-t} \sigma(t) \leftrightarrow H_u(s) = \frac{1}{s+1}$.

Raspunsul in frecventa al acestui sistem este:

$$H(\omega) = 1/(1 + j\omega), \quad |H(\omega)| = 1/\sqrt{1 + \omega^2}, \quad \Phi(\omega) = -\arctg \omega.$$

si fie sistemul cu raspunsul in frecventa:

$$H_{\omega_0}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \leftrightarrow h_{\omega_0}(t) = \frac{1}{\omega_0 - 1} \left[(\omega_0 + 1)e^{-t} - 2\omega_0 e^{-\omega_0 t} \right] \sigma(t),$$

42

Se poate observa ca raspunsul in frecventa al celui de al doilea sistem are acelasi modul ca si sistemul caracterizat de $H(\omega)$.

Funcția sa faza-frecvență este:

$$\Phi_{\omega_0}(\omega) = -\arctg \omega - 2\arctg \frac{\omega}{\omega_0} = \Phi(\omega) - 2\arctg \frac{\omega}{\omega_0}.$$

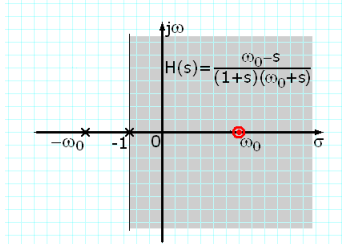


Fig.1.12 Funcție sistem și domeniul ei de convergență, DC.

Funcția sistem corespunzătoare lui $h_{\omega_0}(t)$:

$$H_{\omega_0 u}(s) = \frac{\omega_0 - s}{(1+s)(\omega_0 + s)}.$$

$$H_u(s) = \frac{1}{1+s}.$$

$$|H_{\omega_0 u}(s)| = |H_u(s)|, \quad |\min\{\Phi_{\omega_0}(\omega)\}| > |\min\{\Phi(\omega)\}|$$

$$\omega_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_{\omega_0}(\omega) = \Phi(\omega)$$

Prin urmare $H_u(s) = 1/(1+s)$ neavând nici un zero în semiplanul drept, corespunde unui sistem ce introduce un defazaj minim în comparație cu alte sisteme (cauzale) ce au aceeași caracteristică $|H(\omega)|$.

43

Contribuția polilor unui sistem cauzal la răspunsul la impuls al acestuia

Funcția de sistem $H_u(s)$ (1.54) pentru un sistem cauzal,

$$H_u(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (1.54)$$

poate fi descompusă în fracții simple și pusă sub formă:

$$H_u(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}; \quad A_k = H_u(s)(s - s_{pk}) \Big|_{s=s_{pk}}, \quad (1.58)$$

dacă toți poli sunt simpli. Forma lui $h(t)$ este atunci:

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} \right) \sigma(t). \quad (1.59)$$

Deosebim două cazuri: i) poli reali $s_{pk} \in \mathfrak{R}$ și ii) complecși $s_{pk} \notin \mathfrak{R}$.

Cum coeficienții a_k și b_k în ecuația (1.54) sunt reali, rezultă că poli complecși nu pot apărea decât în perechi complex conjugate.

44

Poli simpli

$$H_u(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}; \longleftrightarrow h(t) = \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} \right) \sigma(t).$$

i) Poli reali, $s_{pk} = \sigma_k$: contributia este o exponentiala

$$A_k e^{\sigma_k t}$$

ii) Poli complex conjugati $\notin \mathfrak{R}$: $s_{pk} = \sigma_k \pm j\omega_k$.

$$B_k e^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

Poli multipli de ordinul doi

$$H_u(s) = \dots + \frac{A}{s - s_p^r} + \frac{B}{(s - s_p^r)^2} + \frac{C}{s - s_p^i} + \frac{D}{s - s_p^{i*}} + \frac{E}{(s - s_p^i)^2} + \frac{F}{(s - s_p^{i*})^2} + \dots$$

i) Poli reali de ordinul doi:

$$s_p^r = \sigma_p : M_0 e^{\sigma_p t} + M_1 t e^{\sigma_p t}$$

ii) Perechea de poli complex conjugati

$$s_p^i = \sigma + j\omega, s_p^{i*} = \sigma - j\omega : N_0 e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi_0) + N_1 t e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

45

Pentru un sistem cauzal, stabilitatea stricta este intodeauna asigurata daca polii sunt in semiplanul stang.

Poli simpli pe axa imaginara = sistem stabil la limita.

Pentru o singura pereche de poli complex conjugati plasati pe axa imaginara se obtine un oscilator sinusoidal.

Plasarea unui pol al unui sistem cauzal in semiplanul drept, chiar daca este simplu da nastere unui sistem instabil.

Polii plasati in semiplanul stang dau o componenta tranzitorie ce se amortizeaza.

Raspunsul permanent, ce se mentine cu aceleasi caracteristici in timp este contributia exclusiva a polilor simpli situati pe axa imaginara.

46

Calculul raspunsului unui sistem caracterizat printr-o ecuatie diferentiala

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad a_0 \neq 0,$$

Exemplu: Se considera un sistem de tip cauzal, caracterizat de ecuatia diferentiala:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t),$$

Avand conditiile initiale $y(0^+) = 2$; $y'(0^+) = -2$. Fie $x(t) = 4\sigma(t)$. Se considera transformata unilaterala:

$$y(t) \leftrightarrow Y_u(s); \quad y'(t) \leftrightarrow sY_u(s) - y(0^+)$$

Prin derivare

$$(y')' = y'' \leftrightarrow s[sY_u(s) - y(0^+)] - y'(0^+)$$

47

Transformarea Laplace a semnalului de intrare este:

$$4\sigma(t) \leftrightarrow \frac{4}{s}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t),$$

$$s[sY_u(s) - 2] + 2 + 3[sY_u(s) - 2] + 2Y_u(s) = \frac{4}{s}.$$

Se determina transformarea Laplace unilaterala a semnalului de iesire:

$$Y_u(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2}.$$

Se determina raspunsul sistemului:

$$y(t) = 2\sigma(t) - 2e^{-t}\sigma(t) + 2e^{-2t}\sigma(t) = (2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t})\sigma(t)$$

48

$$y(t) = 2\sigma(t) - 2e^{-t}\sigma(t) + 2e^{-2t}\sigma(t) = (2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t})\sigma(t)$$

Se pot verifica conditiile initiale:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t}) = 2 - 2 + 2 = 2.$$

Derivata de ordinul intai a raspunsului:

$$y'(t) = 2e^{-t} - 4e^{-2t}, \quad t > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2e^{-t} - 4e^{-2t}) = 2 - 4 = -2.$$

49

Sisteme de ordinul intai

$$\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0 y(t) = K\omega_0 x(t) \quad \omega_0 > 0 \quad (1.66)$$

$$H(s) = H_u(s) = \frac{K\omega_0}{s + \omega_0} \quad \text{Re}\{s\} > -\omega_0. \quad (1.67)$$

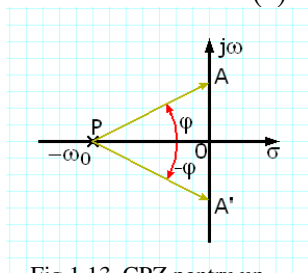


Fig.1.13. CPZ pentru un sistem de ordinul intai.

Sistemul: - este stabil, are raspunsul la impuls de tip exponential, polul fiind real.

Frecventa ω este definita de pozitia punctului A pe axa imaginara.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|PA|}; \quad \Phi(\omega) = -\varphi. \quad (1.68)$$

$$\omega \uparrow, |PA| \uparrow \Rightarrow |H(\omega)| \downarrow$$

Caracteristica de **modul** este o functie **para**: $|PA'| = |PA|$.

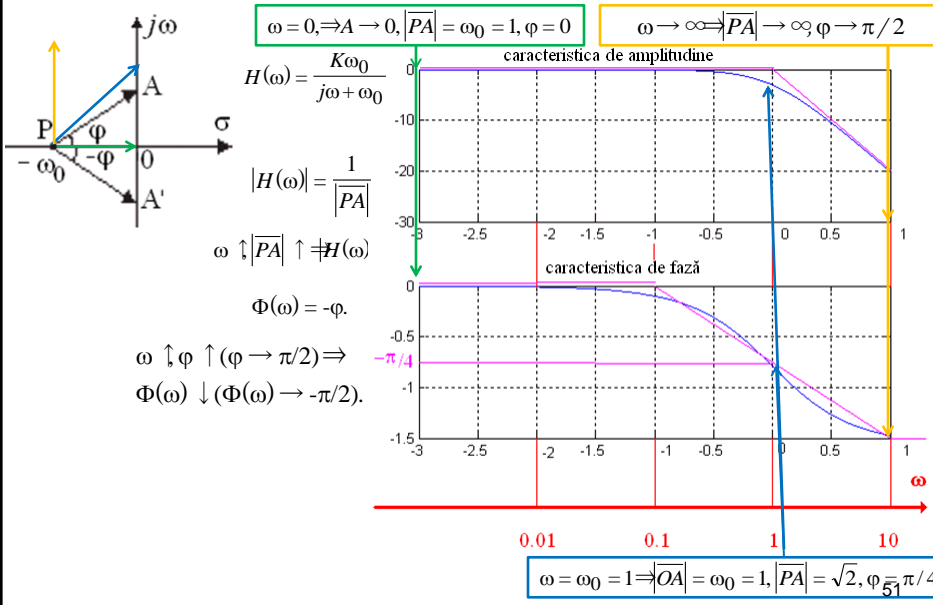
$$\omega \uparrow, \varphi \uparrow (\varphi \rightarrow \pi/2) \Rightarrow \Phi(\omega) \downarrow (\Phi(\omega) \rightarrow -\pi/2).$$

Caracteristica de **faza** este o functie **impara**.

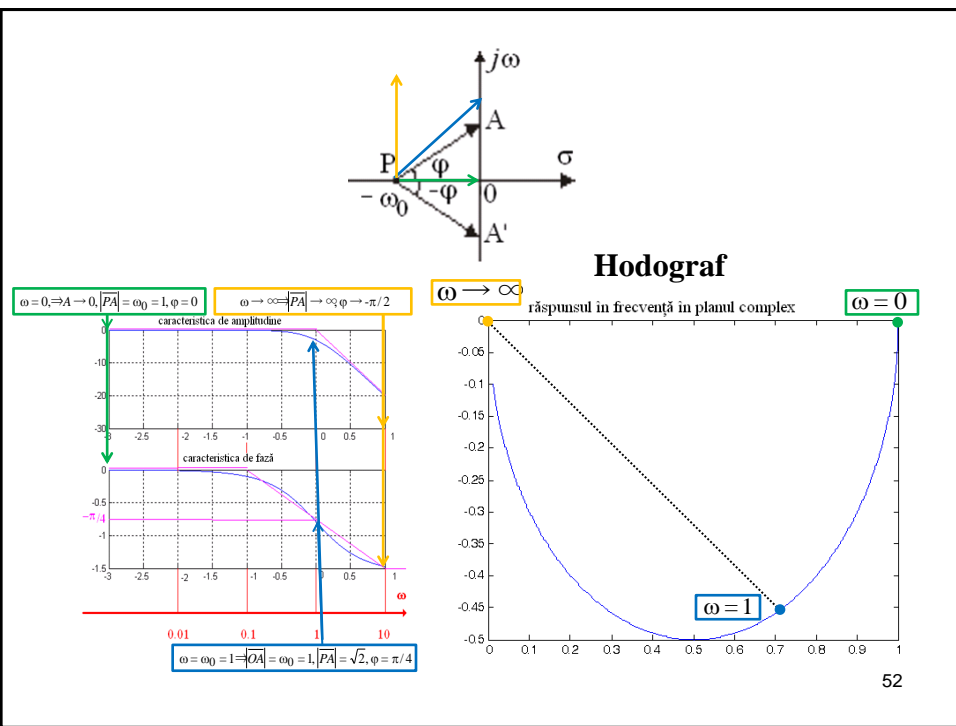
50

Caracteristici de frecvență

$K=1$ și $\omega_0=1$



Hodograf



Sisteme de ordinul doi (Studiu individual)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 x(t), \quad H_u(s) = H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

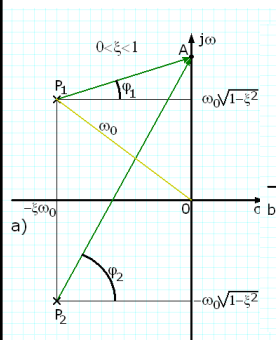


Fig.1.14 a) $\xi < 1$, CPZ pentru un sistem de ordinul doi avand o pereche de poli complex conjugati.

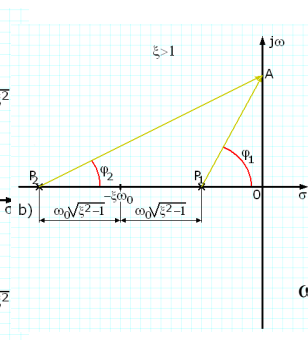


Fig.1.14 b) CPZ pentru un sistem de ordinul doi avand poli reali.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad \xi > 0$$

a) Frecventa de oscilatie: $\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

$$|OP_1| = \omega_0$$

Punctul A defineste o frecventa:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|P_1A| \cdot |P_2A|}; \quad \Phi(\omega) = -\varphi_1 - \varphi_2$$

$$\omega \rightarrow \infty, |P_1A| \text{ si } |P_2A| \rightarrow \infty \Rightarrow |H(\omega)| \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; \varphi_1 \text{ si } \varphi_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi(\omega) \rightarrow -\pi$$

b) $\xi > 1$, cei doi poli sunt plasati pe axa reala.

Daca $\xi = 1$, cei doi poli se confunda, in punctul $-\omega_0$ de pe axa reala.

53

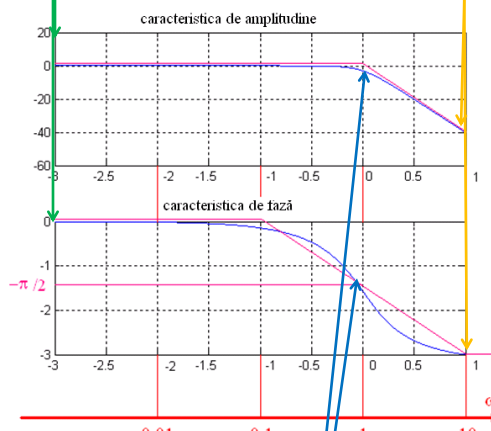
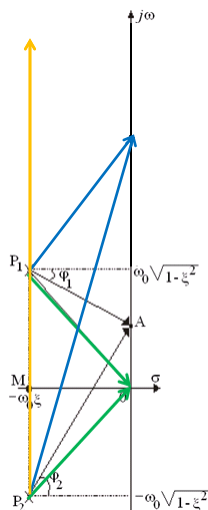
Cazul polilor complex conjugati. Caracteristici de

frecventa $\xi = 1/\sqrt{2}$ si $\omega_0 = 1$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|P_1A| \cdot |P_2A|}; \quad \Phi(\omega) = -\varphi_1 - \varphi_2$$

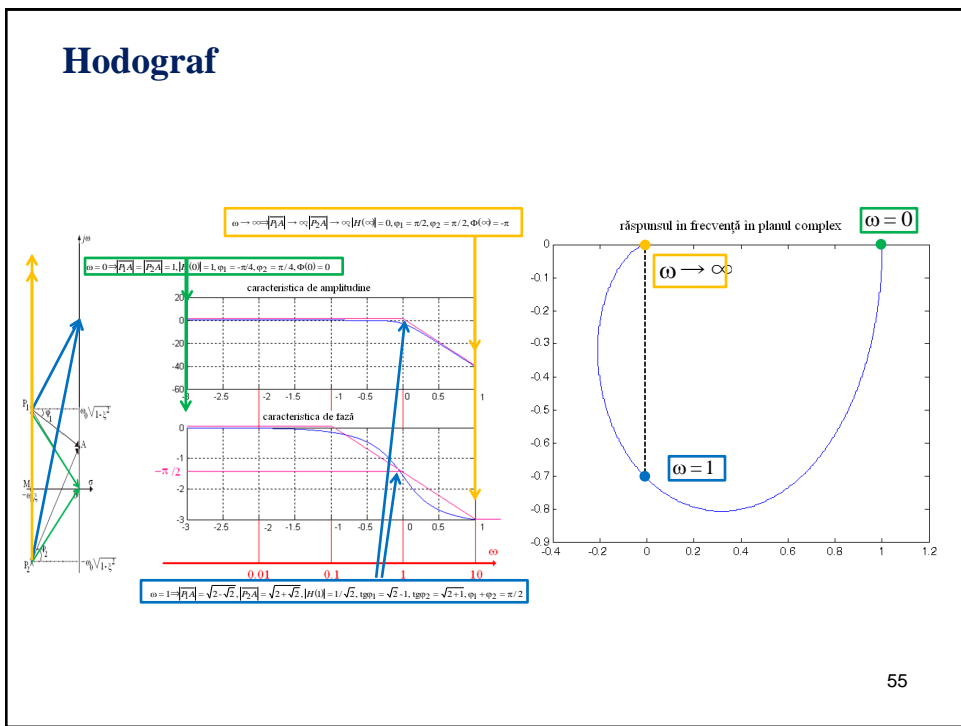
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |P_1A| \rightarrow \infty, |P_2A| \rightarrow \infty, |H(\infty)| = 0, \varphi_1 = \pi/2, \varphi_2 = \pi/2, \Phi(\infty) = -\pi$$

$$\omega = 0 \Rightarrow |P_1A| = |P_2A| = 1, |H(0)| = 1, \varphi_1 = -\pi/4, \varphi_2 = \pi/4, \Phi(0) = 0$$



$$\omega = 1 \Rightarrow |P_1A| = \sqrt{2-\sqrt{2}}, |P_2A| = \sqrt{2+\sqrt{2}}, |H(1)| = 1/\sqrt{2}, \text{tg}\varphi_1 = \sqrt{2}-1, \text{tg}\varphi_2 = \sqrt{2}+1, \varphi_1 = -\pi/4, \varphi_2 = \pi/4$$

Hodograf

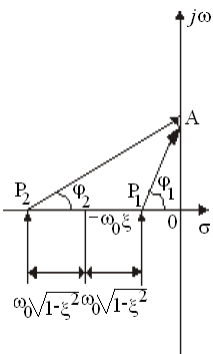


55

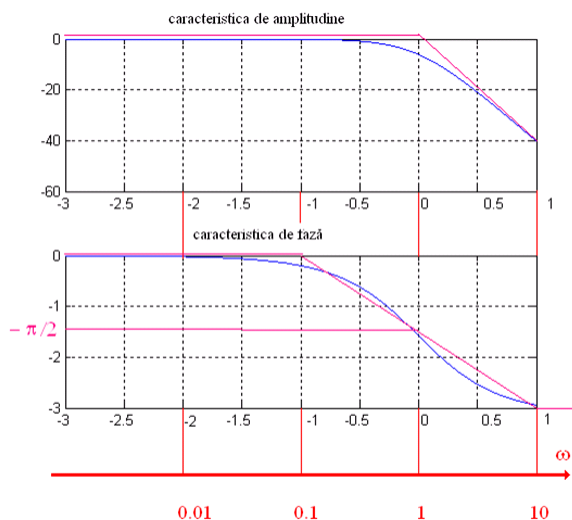
Cazul polilor reali. Caracteristici de frecventa

Daca $\xi=1$, apare un pol dublu in $-\omega_0$ pe axa reala.

Pentru $\omega_0 = 1$



Tema de curs

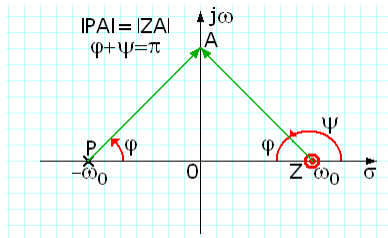


56

Sistemul “trece tot”

$$H(\omega) = \frac{\omega_0 - j\omega}{\omega_0 + j\omega}$$

$$H_u(s) = H(s) = \frac{\omega_0 - s}{\omega_0 + s}$$

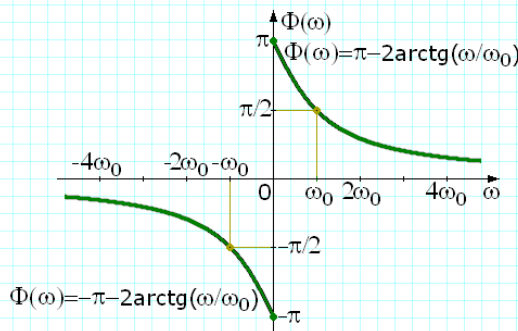


O sinusoida de orice frecventa, aplicata unui astfel de sistem trece fara ca amplitudinea ei sa fie afectata \Rightarrow trece-tot.

PZC pentru un sistem trece-tot.

$$|H(\omega)| = \frac{|ZA|}{|PA|} = 1,$$

57



$$\Phi(\omega) = \psi - \varphi = \pi - 2\varphi$$

$$\operatorname{tg}\psi = -\operatorname{tg}\varphi = -\frac{OA}{OZ} = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Caracteristica de faza $\Phi(\omega)$ a unui sistem trece-tot

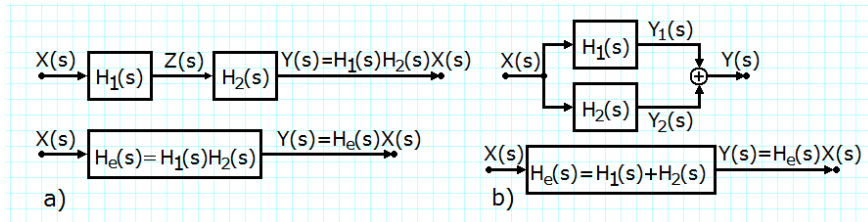
Cand $\omega=0$, deci $A=0$, $\varphi=0$ defazajul introdus de circuit este π .

Cand $OA=\omega_0$, $\Rightarrow \varphi=\pi/4 \Rightarrow \Phi(\omega_0)=\pi-2\pi/4=\pi/2$.

Daca aplicam o sinusoida unui astfel de sistem \Rightarrow nu isi modifica amplitudinea, ci doar faza conform caracteristicii $\Phi(\omega)$.

58

Funcția sistem echivalentă unor sisteme conectate în serie și paralel



a) Doua sisteme conectate în serie și sistemul echivalent.

b) Doua sisteme conectate în paralel și sistemul echivalent.

$$h_e(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H_e(s) = H_1(s) \cdot H_2(s).$$

$$h_e(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H_e(s) = H_1(s) + H_2(s).$$