

Metode de simulare a sistemelor analogice cu sisteme discrete

Problema 1. Fie sistemul analogic liniar și invariant în timp descris de funcția de transfer:

$$H_c(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}.$$

- a) Să se determine răspunsul său la impuls, $h_c(t)$;
- b) Să se determine răspunsul la impuls al sistemului numeric echivalent pe baza metodei invarianței răspunsului la impuls $h_d[n]$;
- c) Să se determine $H_d(z)$, transformata z a lui $h_d[n]$;
- d) Să se obțină ecuația cu diferențe finite pentru sistemul discret echivalent sistemului analogic considerat.

Rezolvare.

Punctul a)

$$H_c(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+3}$$

$$B = (s+1)^2 H_c(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s+3} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$C = (s+3) H_c(s) \Big|_{s=-3} = \frac{s+2}{(s+1)^2} \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

$$A = \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 H_c(s) \right] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s+2}{s+3} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{s+3-s-2}{(s+3)^2} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

$$H_c(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{4} e^{-t} \sigma(t) & & -\frac{1}{4} e^{-3t} \sigma(t) \end{array}$$

$$-\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right)$$

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Rightarrow \frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-t)e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{tx(t)\}(s)$$

$$-\frac{1}{(s+1)^2} = -\mathcal{L}\{te^{-t}\sigma(t)\}(s) \Rightarrow -\frac{1}{(s+1)^2} \leftrightarrow -te^{-t}\sigma(t)$$

$$h_c(t) = \frac{1}{4} e^{-t} \sigma(t) + \frac{1}{2} te^{-t} \sigma(t) - \frac{1}{4} e^{-3t} \sigma(t)$$

Punctul b) $h_d[n] = h_c(nT) = \frac{1}{4}e^{-nT}\sigma[n] + \frac{T}{2}ne^{-nT}\sigma[n] - \frac{1}{4}e^{-3nT}\sigma[n]$

Punctul c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}e^{-nT}\sigma[n] &= \frac{1}{4}(e^{-T})^n\sigma[n] \leftrightarrow \frac{1/4}{1-e^{-T}z^{-1}} \\ -\frac{1}{4}e^{-3nT}\sigma[n] &= -\frac{1}{4}(e^{-3T})^n\sigma[n] \leftrightarrow -\frac{1/4}{1-e^{-3T}z^{-1}} \\ \frac{T}{2}ne^{-nT}\sigma[n] &= \frac{T}{2}n(e^{-T})^n\sigma[n] \leftrightarrow \frac{T}{2}\frac{e^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2} \\ H_d(z) &= \frac{1/4}{1-e^{-T}z^{-1}} + \frac{Te^{-T}}{2} \cdot \frac{z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2} - \frac{1/4}{1-e^{-3T}z^{-1}}\end{aligned}$$

Punctul d)

$$\begin{aligned}H_d(z) &= \frac{\frac{1}{4}(1-e^{-T}z^{-1})(1-e^{-3T}z^{-1}) + \frac{Te^{-T}}{2}z^{-1}(1-e^{-3T}z^{-1}) - \frac{1}{4}(1-e^{-T}z^{-1})^2}{(1-e^{-T}z^{-1})^2(1-e^{-3T}z^{-1})} = \\ &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(e^{-T} + e^{-3T})z^{-1} + \frac{e^{-4T}}{4}z^{-2} + \frac{Te^{-T}}{2}z^{-1} - \frac{Te^{-4T}}{2}z^{-2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-T}z^{-1} - \frac{1}{4}e^{-2T}z^{-2}}{1 - 2e^{-T}z^{-1} + e^{-2T}z^{-2} - e^{-3T}z^{-1} + 2e^{-4T}z^{-2} - e^{-5T}z^{-3}} = \\ &= \frac{z^{-2}\left(\frac{e^{-4T}}{4} - \frac{Te^{-4T}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2T}\right) + z^{-1}\left(\frac{Te^{-T}}{2} - \frac{1}{4}e^{-T} - \frac{1}{4}e^{-3T} + \frac{1}{2}e^{-T}\right)}{1 - 2e^{-T}z^{-1} + e^{-2T}z^{-2} - e^{-3T}z^{-1} + 2e^{-4T}z^{-2} - e^{-5T}z^{-3}} \\ H_d(z) &= \frac{\frac{e^{-4T} - 2Te^{-4T} - e^{-2T}}{4}z^{-2} + \frac{2e^{-T} + 2Te^{-T} - e^{-T} - e^{-3T}}{4}z^{-1}}{-e^{-5T}z^{-3} + (e^{-2T} + 2e^{-4T})z^{-2} - (2e^{-T} + e^{-3T})z^{-1} + 1} \\ H_d(z) &= \frac{(e^{-4T} - 2Te^{-4T} - e^{-2T})z^{-2} + (2Te^{-T} + e^{-T} - e^{-3T})z^{-1}}{-4e^{-5T}z^{-3} + 4e^{-2T}(1 + 2e^{-2T})z^{-2} - 4e^{-T}(2 + e^{-2T})z^{-1} + 4} \\ H_d(z) &= \frac{b_2z^{-2} + b_1z^{-1}}{a_3z^{-3} + a_2z^{-2} + a_1z^{-1} + a_0}\end{aligned}$$

$$b_2 = e^{-2T}(e^{-2T} - 2Te^{-2T} - 1); b_1 = e^{-T}(2T + 1 - e^{-2T}); b_0 = 0$$

$$a_3 = -4e^{-5T}; a_2 = 4e^{-2T}(1 + 2e^{-2T}); a_1 = -4e^{-T}(2 + e^{-2T}); a_0 = 4$$

Ecuția cu diferențe finite este :

$$-4e^{-5T}y[n-3] + 4e^{-2T}(1+2e^{-2T})y[n-2] - 4e^{-T}(2+e^{-2T})y[n-1] + 4y[n] = e^{-T}(2T+1-e^{-2T})x[n-1] + e^{-2T}(e^{-2T}-2Te^{-2T}-1)x[n-2]$$

Problema 2. Fie $H_c(s)$ funcția de sistem a unui sistem analogic liniar și invariant în timp, $H_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$.

- Să se determine răspunsul la impuls al sistemului analogic, $h_c(t)$;
- Se notează cu $s_c(t)$ răspunsul indicial al sistemului analogic. Se notează cu $h_d[n]$ răspunsul la impuls și cu $s_d[n]$ răspunsul indicial al unui sistem discret liniar și invariant în timp. În ipoteza că sistemul discret s-a obținut prin echivalarea sistemului analogic considerat folosind metoda de echivalare bazată pe invarianța răspunsului la impuls, adică $h_d[n] = h_c(nT)$, este adevărată relația :

$$s_d[n] = \sum_{k=-\infty}^n h_c(kT) \quad ?$$

- Dacă sistemul discret echivalent s-a obținut prin metoda invarianței răspunsului indicial, adică $s_d[n] = s_c(nT)$, este adevărată relația : $h_d[n] = h_c(nT)$?
- În ipoteza de la punctul c), a invarianței răspunsului indicial, să se determine $H_d(z)$ pentru sistemul discret echivalent.

Rezolvare

Punctul a)

$$H_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = (s+1)H_c(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$B = (s+2)^2 H_c(s) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$C = \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 H_c(s) \right] \Big|_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right) \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$\Rightarrow h_c(t) = e^{-t}\sigma(t) - te^{-2t}\sigma(t) - e^{-2t}\sigma(t)$$

Punctul b)

$$s_d[n] = \sigma[n] * h_d[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_d[k]\sigma[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h_d[k] = \sum_{k=-\infty}^n h_c(kT)$$

Deci : $s_d[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_c[kT]$. Relația propusă este adevărată în cazul general.

Punctul c)

Fie $S_c(s)$ transformata Laplace a răspunsului indicial al sistemului analogic.

$$S_c(s) = \frac{H_c(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2}$$

Se calculează răspunsul indicial al sistemului analogic :

$$A = sS_c(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$B = (s+1)S_c(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -1$$

$$C = (s+2)^2 S_c(s) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$D = \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 S_c(s) \right] \Big|_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s^2+s} \right] \Big|_{s=-2} = -\frac{2s+1}{(s^2+s)^2} \Big|_{s=-2} = -\frac{-3}{4} = 3/4$$

$$\Rightarrow s_c(t) = \frac{1}{4} \sigma(t) - e^{-t} \sigma(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} \sigma(t) + \frac{3}{4} e^{-2t} \sigma(t)$$

Raspunsul la impuls al sistemului echivalent este:

$$h_d[n] = h_c(nt) = e^{-nT} \sigma[n] - nT e^{-2nT} \sigma[n] - e^{-2nT} \sigma[n]$$

$$s_d[n] = s_c(nT) \Rightarrow$$

$$s_d[n] = \frac{1}{4} \sigma[n] - e^{-nT} \sigma[n] + \frac{1}{2} nT \cdot e^{-2nT} \sigma[n] + \frac{3}{4} e^{-2nT} \sigma[n]$$

$$S_d(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T} \cdot z^{-1}} + \frac{T}{2} \cdot \frac{e^{-2T} \cdot z^{-1}}{(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-e^{-2T} \cdot z^{-1}}$$

$$S_d(z) = \frac{(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2 - 4(1-z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2}{4(1-z^{-1})(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{2Te^{-2T} \cdot z^{-1}(1-z^{-1})(1-e^{-T} \cdot z^{-1})}{4(1-z^{-1})(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{3(1-z^{-1})(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})}{4(1-z^{-1})(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2}$$

$$H_d(z) = (1-z^{-1})S_d(z) =$$

$$= \frac{(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-2e^{-2T} \cdot z^{-1} + e^{-4T} \cdot z^{-2})}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{-4(1-z^{-1})(1-2e^{-2T} \cdot z^{-1} + e^{-4T} \cdot z^{-2})}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{2Te^{-2T} (z^{-1} - z^{-2})(1-e^{-T} \cdot z^{-1})}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{3(1-z^{-1} - e^{-T} \cdot z^{-1} + e^{-T} \cdot z^{-2})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2}$$

$$\begin{aligned}
H_d(z) &= \frac{1 \cdot 2e^{-2T} \cdot z^{-1} + e^{-4T} \cdot z^{-2} \cdot e^{-T} \cdot z^{-1} + 2e^{-3T} z^{-2} - e^{-5T} z^{-3}}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \\
&+ \frac{-4(1+e^{-4T} z^{-2} - 2e^{-2T} z^{-1} - z^{-1} e^{-4T} z^{-3} - 2e^{-2T} z^{-2})}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \\
&+ \frac{2Te^{-2T} (z^{-1} - e^{-T} z^{-2} - z^{-2} + e^{-T} z^{-3})}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \\
&+ \frac{3(1-z^{-1} e^{-T} z^{-1} + e^{-T} z^{-2} - e^{-2T} z^{-1} - e^{-2T} z^{-2} + e^{-3T} z^{-2} - e^{-3T} z^{-3})}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \\
&= \frac{e^{-3T} (-e^{-2T} + 4e^{-T} + 2T - 3) z^{-3}}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \\
&+ \frac{z^{-2} [-3e^{-4T} + (5+2T)e^{-3T} + (5-2T)e^{-2T} + 3e^{-T}]}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \\
&+ \frac{(5+2T)e^{-3T} + z^{-1} (-4e^{-T} + (5+2T)e^{-2T} + 1)}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2}
\end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned}
H_d(z) &= \frac{e^{-3T} (e^{-2T} + 4e^{-T} + 2T - 3) z^{-3}}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{[-3e^{-4T} + (5+2T)e^{-3T} + 3e^{-T}] z^{-2}}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \\
&+ \frac{(-4e^{-T} + (5+2T)e^{-2T} + 1) z^{-1}}{4(1-e^{-T} \cdot z^{-1})(1-e^{-2T} \cdot z^{-1})^2}
\end{aligned}$$

Adică:

$$H_d(z) = \frac{e^{-3T} (e^{-2T} + 4e^{-T} + 2T - 3) z^{-3}}{4(1 - e^{-T} \cdot z^{-1})(1 - e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{e^{-T} [-3e^{-3T} + (5 + 2T)e^{-2T} + (5 - 2T)e^{-T} + 3] z^{-2}}{4(1 - e^{-T} \cdot z^{-1})(1 - e^{-2T} \cdot z^{-1})^2}$$

$$+ \frac{\alpha}{4(1 - e^{-T} \cdot z^{-1})(1 - e^{-2T} \cdot z^{-1})^2}$$

$$+ \frac{[-4e^{-T} + (5 + 2T)e^{-2T} + 1] z^{-1}}{4(1 - e^{-T} \cdot z^{-1})(1 - e^{-2T} \cdot z^{-1})^2}$$

$$H_d(z) = \frac{A}{1 - e^{-T} \cdot z^{-1}} + \frac{B}{(1 - e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} + \frac{C}{1 - e^{-2T} \cdot z^{-1}}$$

$$A = (1 - e^{-T} \cdot z^{-1}) H_d(z) \Big|_{z^{-1}=e^T}$$

$$= \frac{e^{-3T} (-e^{-2T} + 4e^{-T} + 2T - 3) z^{-3}}{4(1 - e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \Big|_{z^{-1}=e^T}$$

$$+ \frac{e^{-T} [-3e^{-3T} + (5 + 2T)e^{-2T} + (5 - 2T)e^{-T} + 3] z^{-2} + 2z^{-1}}{4(1 - e^{-2T} \cdot z^{-1})^2} \Big|_{z^{-1}=e^T}$$

$$A = \frac{-e^{-8T} - 4e^{-7T} + (2T - 3)e^{-6T} - 3e^{-2T} + 4e^T}{4(1 - e^{-T})^2}$$

$$h_d[n] = A(e^{-T})^n \sigma[n] + B(n+1)(e^{-2T})^n \sigma[n] + C(e^{-T})^n \sigma[n]$$

$$h_c(nT) = e^{-nT} \sigma[n] - nTe^{-2nT} \sigma[n] - e^{-2nT} \sigma[n]$$

Deoarece: $A \neq 1 \Rightarrow h_d[n] \neq h_c(nT)$ deci relația propusă nu este adevărată.

Problema 3. Se notează $h_c(t)$ răspunsul la impuls al unui sistem liniar, invariant în timp continuu și cu $h_d[n]$ cel al unui sistem liniar, invariant în timp discret ce echivalează sistemul analogic prin metoda invarianței răspunsului la impuls.

- Dacă $h_c(t) = e^{-t} \sigma(t)$ să se determine funcția de transfer a filtrului analogic și să se deseneze dependenta de frecvență a modului său ;
- Să se determine funcția de transfer a filtrului numeric ; să se schițeze caracteristica de modul a răspunsului în frecvență al sistemului discret.
- Sa se repete punctul b) astfel încât caracteristica filtrului numeric sa fie aproximativ identica cu cea a filtrului analogic.

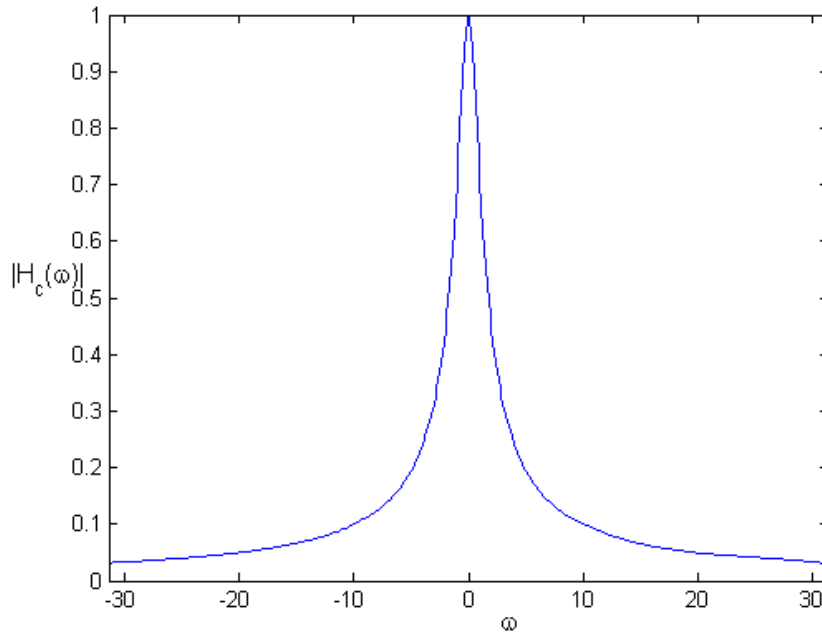
Rezolvare.

Punctul a)

$$H_c(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}\sigma(t)\} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow H_c(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow |H_c(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

Deci sistemul este de banda nelimitata => apare alierea la frecvente mari. Pentru T=0.1:

$$|H_c(0)| = 1; \quad \left|H_c\left(\frac{\pi}{2T}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(5\pi)^2}} \cong 0,063; \quad \left|H_c\left(\frac{\pi}{T}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(10\pi)^2}} = 0,031$$



Punctul b)

$$h_d[n] = h_c(nT) = e^{-nT}\sigma[n] \Rightarrow H_d(z) = \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} \Rightarrow H_d(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-T} \cdot e^{-j\Omega}}$$

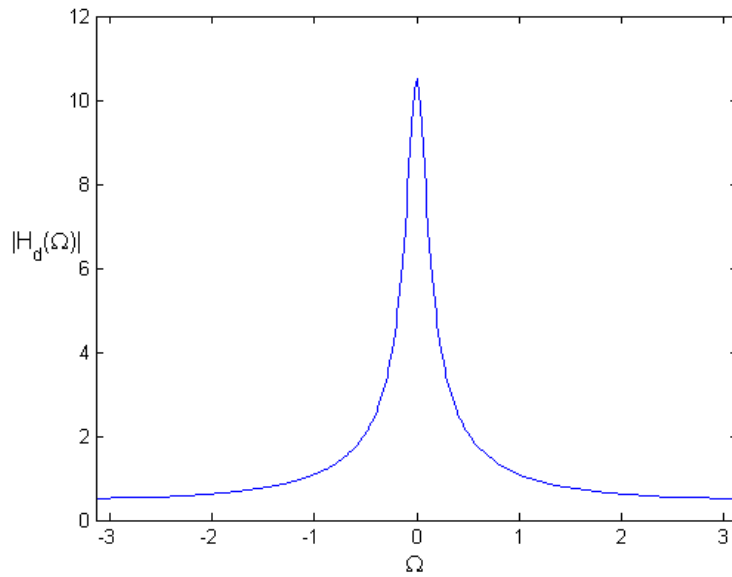
$$|H_d(\Omega)| = \frac{1}{|1-e^{-T} \cdot \cos\Omega + je^{-T} \cdot \sin\Omega|} = \frac{1}{\sqrt{(1-e^{-T} \cdot \cos\Omega)^2 + e^{-2T} \cdot \sin^2\Omega}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2T} - 2e^{-T} \cos\Omega}}$$

$$|H_d(0)| = \frac{1}{1-e^{-T}} \cong \frac{1}{1-(1-T)} = \frac{1}{T}; \quad \left|H_d\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2T}}}; \quad |H_d(\pi)| = \frac{1}{1+e^{-T}}$$

Se ia perioada de eșantionare, T = 0.1, astfel incat frecventa f = 1/T, sa fie de cel puțin 10 ori mai mare decât frecventa naturala a sistemului, inversul constantei sale de timp.

$$|H_d(0)| = 10,50; \quad |H_d(\pi/2)| = 1/\sqrt{1+e^{-0,2}} \cong 0,74; \quad |H_d(\pi)| = 1/(1+e^{-0,1}) = 0,52$$



Punctul c)

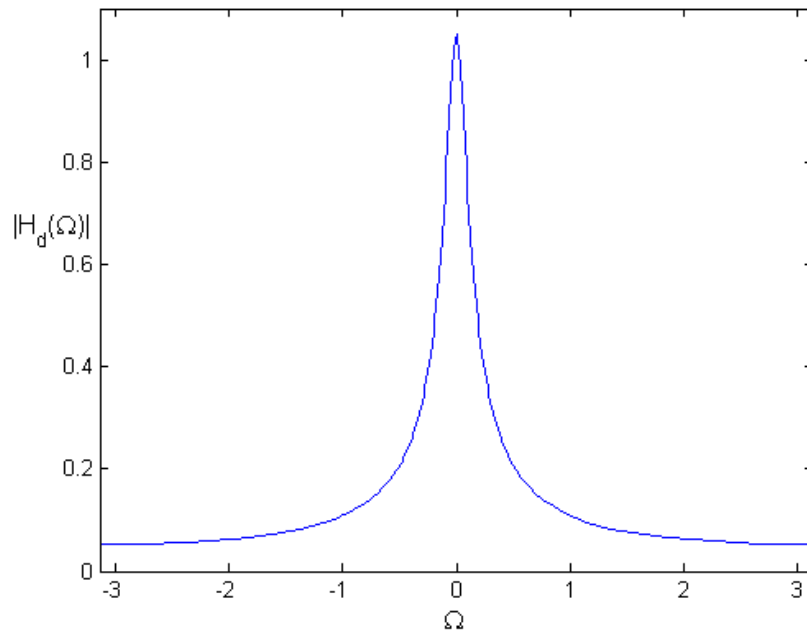
Pentru ca spectrul sa fie aproximativ identic pentru $\Omega \in (-\pi, \pi)$ respectiv $\omega \in (-\pi/T, \pi/T)$ (se stie $\Omega = \omega T$) :

$$h_d[n] = Th_c(nT) = Te^{-nT} \sigma[n] \Rightarrow H_d(z) = \frac{T}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$

$$H_d(\Omega) = \frac{T}{1 - e^{-T} \cdot e^{-j\Omega}} \Rightarrow |H_d(\Omega)| = \frac{T}{\sqrt{1 + e^{-2T} - 2e^{-T} \cos \Omega}}$$

Pentru $T=0.1$:

$$|H_d(0)| = 1,05; \quad |H_d(\pi/2)| = 1/\sqrt{1 + e^{-0,2}} \cong 0,074; \quad |H_d(\pi)| = 1/(1 + e^{-0,1}) = 0,052$$



Problema 4 Se consideră sistemul analogic liniar și invariant în timp descris de ecuația:

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

- Să se determine răspunsul la impuls al unui sistem discret ce simulează sistemul dat prin metoda invarianței răspunsului la impuls, precum și funcția sa de sistem ;
- Să se determine aceleași funcții ca la punctul a) pentru un sistem discret echivalent, obținut prin metoda aproximării numerice a ecuației diferențiale ;
- Să se repete punctul a) pentru un sistem discret obținut prin metoda transformării biliniare.
- Schițați formele de implementare pentru sistemele de la punctele a), b) și c) ;
- Pentru $x(t) = \sin t$ și o perioadă de esantionare $T = 0,1$ să se determine amplitudinile semnalelor de ieșire ale sistemului analogic dat și ale celor trei sisteme numerice.

Rezolvare

Punctul a)

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t) \Rightarrow sY(s) + 2Y(s) = X(s) \Rightarrow H_a(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2}$$

$$h_a(t) = e^{-2t} \sigma(t) \Rightarrow h_d[n] = e^{-2nT} \sigma[n] \Rightarrow H_d(z) = \frac{1}{1 - e^{-2T} z^{-1}}$$

Punctul b)

Aproximarea numerica a ecuației diferențiale se face prin aproximarea derivatei:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{y[n] - y[n-1]}{T} \Rightarrow s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{y[n] - y[n-1]}{T} + 2y[n] = x[n] \leftrightarrow \frac{1 + 2T - z^{-1}}{T} Y_d(z) = X_d(z)$$

$$\Rightarrow H_d(z) = \frac{T}{1 + 2T - z^{-1}}$$

Sau se înlocuiește direct în transformata Laplace:

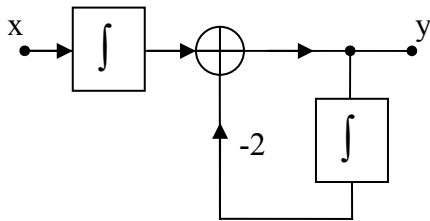
$$H_d(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{1}{2 + \frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T}{1 + 2T - z^{-1}} = \frac{T}{1 - \frac{1}{1+2T} \cdot z^{-1}}$$

$$h_d[n] = \frac{T}{1+2T} \left(\frac{1}{1+2T} \right)^n \sigma[n]$$

Punctul c) Aproximarea biliniara:

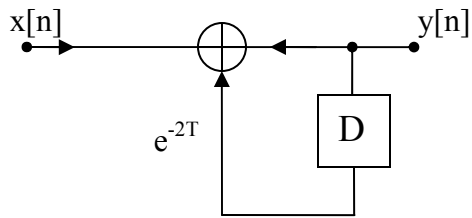
$$\begin{aligned}
 H_d(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{\frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} + 2} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1} + T(1+z^{-1}))} \\
 &= \frac{T(1+z^{-1})}{2(1+T) - 2(1-T)z^{-1}} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1+T - (1-T)z^{-1}} \\
 &= \frac{T}{2} \cdot \frac{(1-T) \left[\left(z^{-1} - \frac{1+T}{1-T} \right) + 1 + \frac{1+T}{1-T} \right]}{(1-T) [1+T - (1-T)z^{-1}]} \\
 &= \frac{T}{2(1-T)} \cdot \frac{\left(z^{-1} - \frac{1+T}{1-T} \right) (1-T)}{(1-T) \left(\frac{1+T}{1-T} - z^{-1} \right)} + \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1+T}{1-T}}{1+T - (1-T)z^{-1}} \\
 &= \frac{-T}{2(1-T)} + \frac{T}{2} \cdot \frac{2}{1-T} \cdot \frac{1}{1+T - (1-T)z^{-1}} \\
 &= -\frac{T}{2(1-T)} + \frac{T}{1-T} \cdot \frac{1}{1+T - (1-T)z^{-1}} \\
 &= -\frac{T}{2(1-T)} + \frac{T}{(1-T)(1+T)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-T}{1+T} z^{-1}} \\
 h_d[n] &= -\frac{T}{2(1-T)} \delta[n] + \frac{T}{(1-T)^2} \cdot \left(\frac{1-T}{1+T} \right)^n \sigma[n]
 \end{aligned}$$

Punctul d)



Pentru sistemul analogic

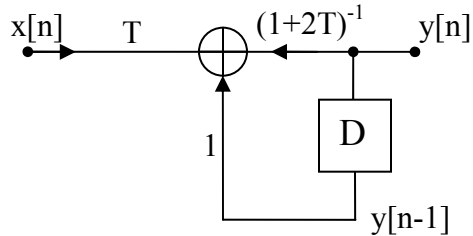
$$y + 2 \int y = \int x$$



Pentru sistemul numeric de la a)

$$b_0 = 1; a_0 = 1; a_1 = -e^{-2T}$$

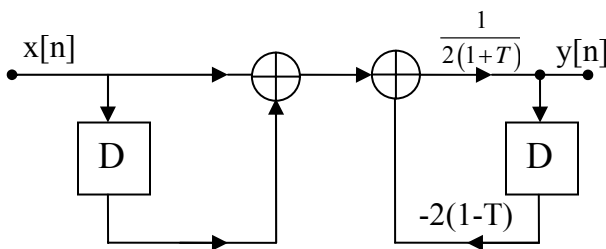
$$y[n] - e^{-2T} y[n-1] = x[n]$$



Pentru sistemul numeric de la b)

$$b_0 = T; a_0 = 1 + 2T; a_1 = -1$$

$$(1 + 2T)y[n] - y[n-1] = Tx[n]$$



Pentru sistemul numeric de la c)

$$b_0 = 1; b_1 = 1;$$

$$a_0 = 2(1+T); a_1 = 2(1-T)$$

$$2(1+T)y[n] + 2(1-T)y[n-1] = x[n] + x[n-1]$$

Punctul e)

$$x(t) = \sin t; y(t) = |H(1)| \sin(t + \arg\{H(1)\})$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow H(1) = \frac{1}{2+j} \Rightarrow |H(1)| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\arg\{H(1)\} = -\arg\{2+j\} = -\arctg \frac{1}{2} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(t - \arctg \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A_y = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Pentru sistemele numerice:

$$x[n] = \sin(0,1n) = \sin\left(\frac{n}{10}\right) \Rightarrow y[n] = \left|H_d\left(\frac{1}{10}\right)\right| \sin\left(\frac{n}{10} + \arg\left\{H_d\left(\frac{1}{10}\right)\right\}\right)$$

Pentru sistemul numeric de la a)

$$H_d(z) = \frac{1}{1 - e^{-2T} \cdot z^{-1}} \Rightarrow H_d(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-2T} \cdot e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - e^{-2T} \cos \Omega + j \cdot e^{-2T} \sin \Omega}$$

$$\Rightarrow |H_d(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - e^{-2T} \cos \Omega)^2 + e^{-4T} \sin^2 \Omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-4T} - 2e^{-2T} \cos \Omega}}$$

$$\left| H_d\left(\frac{1}{10}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-0,4} - 2e^{-0,2} \cos \frac{1}{10}}} \cong \frac{1}{(1 - e^{-0,2})^2}$$

Pentru sistemul numeric de la b)

$$H_d(z) = \frac{T}{1 + 2T \cdot z^{-1}} \Rightarrow H_d(\Omega) = \frac{T}{1 + 2T \cdot e^{-j\Omega}} = \frac{T}{1 + 2T \cos \Omega - j \sin \Omega}$$

$$\Rightarrow |H_d(\Omega)| = \frac{T}{\sqrt{(1 + 2T \cos \Omega)^2 + (2T \sin \Omega)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 + 4T^2 + 4T \cos \Omega}}$$

$$\Rightarrow \left| H_d\left(\frac{1}{10}\right) \right| \cong \frac{0,1}{\sqrt{1,44}} = \frac{0,1}{1,2} = 0,083$$

Pentru sistemul numeric de la c)

$$H_d(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 + T - (1 - T)z^{-1}} \Rightarrow H_d(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1,1 - 0,9e^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow |H_d(\Omega)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 + \cos \Omega)^2 + \sin^2 \Omega}{(1,1 - 0,9 \cos \Omega)^2 + (0,9 \sin \Omega)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 + 2 \cos \Omega}{1,21 + 0,81 - 1,98 \cos \Omega}}$$

Se dă lui Ω valoarea 0,1 și se calculează.

Problema 5. Fie un sistem în timp continuu cu răspunsul la impuls $h_c(t)$ și funcția de transfer $H_c(s)$. Ecuația diferențială care descrie acest sistem este:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x}{dt^k}$$

Se aproximează acest sistem cu unul în timp discret folosind aproximarea:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=nT} \cong \frac{x[n+1] - x[n]}{T}$$

Se definesc diferențele de ordinul 0 : $\nabla^{(0)} \{x[n]\} = x[n]$

$$\text{de ordinul 1 : } \nabla^{(1)} \{x[n]\} = \frac{x[n+1] - x[n]}{T}$$

$$\text{și de ordinul } k : \nabla^{(k)} \{x[n]\} = \nabla^{(k-1)} \{ \nabla^{(1)} \{x[n]\} \}$$

a) Fie $H_c(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$. Să se determine funcția de transfer a sistemului discret

echivalent $H_d(z)$;

b) Care este legătura dintre $H_c(s)$ și $H_d(z)$?

Rezolvare

$$\nabla^{(1)} \{x[n]\} = \frac{x[n+1] - x[n]}{T}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \{x[n]\} &= \nabla^{(1)} \left\{ \frac{x[n+1] - x[n]}{T} \right\} \\ &= \frac{1}{T} \left[\nabla^{(1)} \{x[n+1]\} - \nabla^{(1)} \{x[n]\} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{x[n+2] - x[n+1]}{T} - \frac{x[n+1] - x[n]}{T} \right] \\ &= \frac{1}{T^2} [x[n+2] - 2x[n+1] + x[n]] \end{aligned}$$

Se observă că:

$$\nabla^k \{x[n]\} = \frac{1}{T^k} \sum_{l=0}^k C_k^l x[n+l] (-1)^l$$

Punctul a)

$$H_c(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

$$\Rightarrow b_0 = 0; b_1 = 1; a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = 1$$

Ecuatia diferențială corespunzătoare este :

$$y(t) + 2 \frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Ecuatia cu diferențe finite corespunzătoare este :

$$y[n] + 2\nabla^{(1)} \{y[n]\} + \nabla^{(2)} \{y[n]\} = \nabla^{(1)} \{x[n]\}$$

Adică :

$$y[n] + 2 \frac{y[n+1] - y[n]}{T} + \frac{1}{T^2} [y[n+2] - 2y[n+1] + y[n]] = \frac{x[n+1] - x[n]}{T}$$

Sau :

$$T^2 y[n] + 2T(y[n+1] - y[n]) + y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = Tx[n+1] - Tx[n]$$

Luând în ambii membrii ai ultimei relații transformata Z, se obține:

$$T^2Y(z) + 2T(z-1)Y(z) + z^2Y(z) - 2zY(z) + Y(z) = TzX(z) - TX(z)$$

Sau :

$$Y(z) \left[T^2 + 2Tz - 2T + z^2 - 2z + 1 \right] = X(z)(Tz - T)$$

$$\Rightarrow H_d(z) = \frac{Tz - T}{z^2 + 2(T-1)z + T^2 - 2T + 1}$$

Punctul b)

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \frac{Tz - T}{(z + T - 1)^2} = \frac{T(z-1)}{(z + T - 1)^2} \\ &= \frac{T(z-1)}{T^2 \left(\frac{z-1}{T} + 1 \right)^2} = \frac{1}{T} \cdot T \frac{\frac{z-1}{T}}{\left(\frac{z-1}{T} + 1 \right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Deci : } H_d(z) = \frac{\frac{z-1}{T}}{\left(\frac{z-1}{T} + 1 \right)^2}$$

Se constată că : $H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$