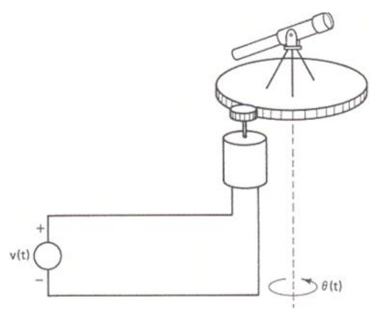
Stabilitatea sistemelor liniare si invariante in timp

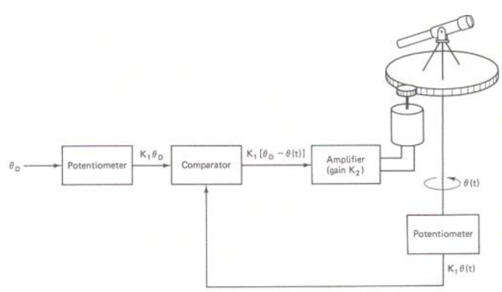
In continuare ne vom referi la sisteme liniare si invariante in timp cauzale.

http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap14_Stabilitate.pdf

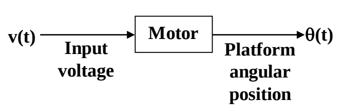
Analiza stabilitatii sistemelor cu reactie negativa



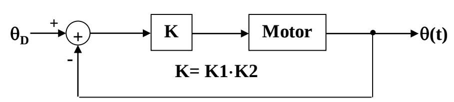
Motorul de curent continuu actioneaza platforma



Sistem cu reactie pentru fixarea telescopului.



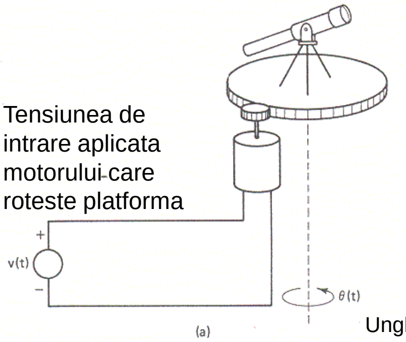
Schema sistemului in bucla deschisa.



Schema sistemului in bucla inchisa.

Sistem ce mentine pozitia unghiulara a telescopului prin reactie (feedback)

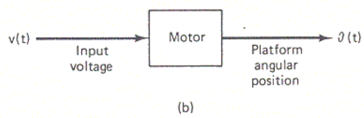
Tensiunea de intrare aplicata motorului care roteste platforma



Unghiul platformei

- Motorul actioneaza platforma
- Unghiul ei este $\theta(t)$
- Schema sistemului in bucla deschisa

Reglajul fin este dificil de obtinut



Perturbatii (miscari ale platformei) $\Rightarrow$ nici o reactie

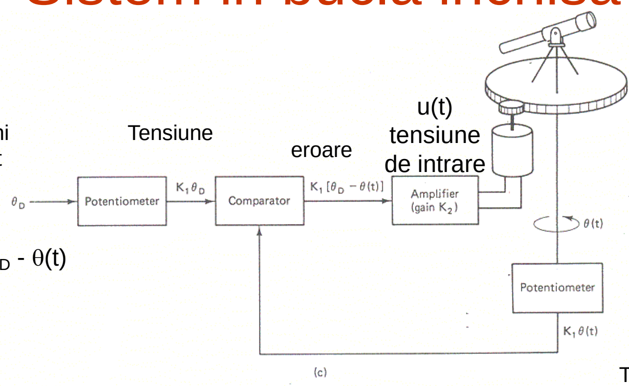
Sistem in bucla inchisa

Unghi dorit

Tensiune

eroare

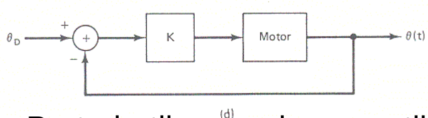
u(t) tensiune de intrare



Unghiul platformei

$u(t) \sim \theta_D - \theta(t)$

Tensiune



$K = K_1 \cdot K_2$

Perturbatii $\Rightarrow$ erori $\Rightarrow$ corectii

Se cunoaste doar unghiul dorit θ_D dar nu si structura sistemului cu reactie

Avantajele sistemelor in bucla inchisa

Insensibilitate la perturbatii,

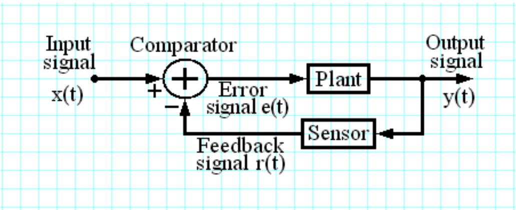
Nu e necesar sa avem cunostinte amanuntite despre sistem.

Aplicatii ale sistemelor in bucla inchisa

Controlul proceselor chimice,

Controlul temperaturii,

Sisteme aerospatiale.



Exemplu de sistem instabil, ce poate fi stabilizat prin reactie negativa.

5

Sisteme analogice

- ***stabilitate stricta***
  - Functia de transfer : gradul numaratorului mai mic decat cel al numitorului
  - Polii functiei de transfer situati in semiplanul stang
- ***Stabilitate in sens larg***
  - Poli simpli pe axa imaginara $j\omega$, $Re\{s\}=0$

Sisteme digitale

- ***stabilitate stricta***
  - Functia de transfer : gradul numaratorului mai mic sau egal decat cel al numitorului
  - Polii functiei de transfer situati in interiorului cercului unitar
- ***Stabilitate in sens larg***
  - Poli simpli pe cercul unitar

6

Alte criterii pentru stabilitate BIBO

- Numitorul Q(s) al functiei de transfer H(s)=P(s)/Q(s) sa fie polinom Hurwitz

Polinomul $Q(s)$ cu coeficienti reali care are toate **radacinile in semiplanul stang** al planului complex.
se numeste **polinom strict Hurwitz**,
Daca are radacini **simple pe axa imaginara**, atunci este un **polinom Hurwitz in sens larg**.

Toti coeficientii unui polinom strict Hurwitz sunt strict pozitivi.
Toti coeficientii unui polinom Hurwitz in sens larg sunt pozitivi.

Aceste conditii nu sunt si suficiente.

7

Criteriul de stabilitate al lui Hurwitz

Conditia necesara si suficienta ca toate radacinile ecuatiei :

$$Q(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad a_0 > 0$$

sa aiba partea reala strict negativa este toti determinantii minori principali in diagonala ai determinantului Δ_n sa fie strict pozitivi.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & . & . & . & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Determinantul Δ_n are *n* linii si *n* coloane. Stricta pozitivitate a minorilor asigura stricta stabilitate a sistemului care are la numitorul functiei de transfer polinomul $Q(s)$.

Daca unul dintre minori este nul atunci sistemul este stabil in sens larg.

Daca unul dintre minori este negativ atunci sistemul este instabil.

Exemplu

Se analizeaza stabilitatea sistemului descris de ecuatia diferentiala:

$$\frac{d^5y(t)}{dt^5}+\frac{d^4y(t)}{dt^4}+7\frac{d^3y(t)}{dt^3}+4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+10\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2x(t)$$

cu conditii initiale nule. Functia de transfer a sistemului

$$H(s)=\frac{2}{s^5+s^4+7s^3+4s^2+10s+3}.$$

Coeficientii polinomului $Q(s)$ sunt:

$a_0=1,\ a_1=1,\ a_2=7,\ a_3=4,\ a_4=10$ si $a_5=3,$ strict pozitivi.

Sistemul s-ar putea sa fie stabil.

Se aplica criteriul lui Hurwitz, $n=5$.

10

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$. Minorii principali in diagonala :

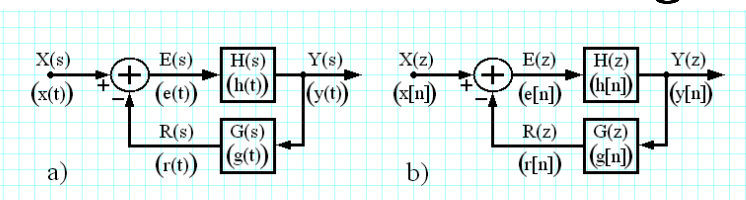
$$\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \ldots = 5 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \ldots = 8 > 0.\ \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 24 > 0.$$

$\Delta_k > 0,\ k = \overline{1,5} \Rightarrow$ sistem strict stabil

11

Sisteme liniare cu reactie negativa



•Functii sistem ale caii directe (Forward-path): H(s) sau H(z)

•Functii sistem ale caii inverse (Negative feedback, feedback path): G(s) sau G(z)

•Functii sistem in bucla deschisa (open loop): H(s)G(s) sau H(z)G(z)

•Functii sistem in bluca inchisa (Closed loop) :

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)} \qquad Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)G(z)}$$

Sistemul in bucla inchisa este strict stabil daca :

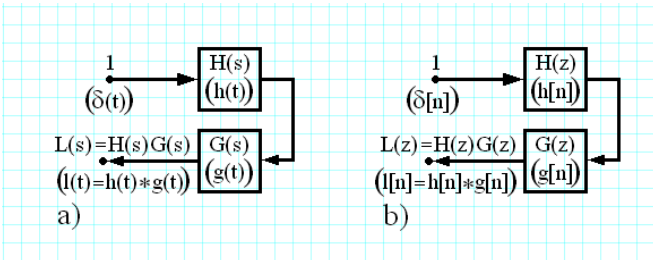
- polii sunt in semi-planul stang (sisteme analogice)
- polii sunt in interiroul cercului unitar (sisteme digitale)

12

$$Q(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+H(s)G(s)}\ ;\ \frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H(z)}{1+H(z)G(z)}$$

- Produsul $H(s)G(s)$: functia de transfer in bucla deschisa.
- Sistemul in bucla inchisa este strict stabil daca radacinile ecuatiei $1+W(s)=0$ au partea reala strict negativa.

- Sistem in bucla deschisa:



- Functia de transfer in bucla deschisa

$$L(s)=H(s)G(s) \qquad\qquad L(z)=H(z)G(z)$$

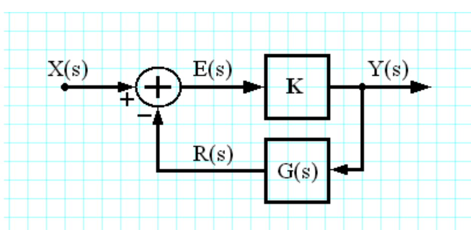
Cateva aplicatii si consecinte ale reactiei

Sistem Invers: Cunoscand sistemul direct $P(s)$; se doreste sintetizarea sistemului invers $1/P(s)$.

-sistem cu reactie in care: $H(s)=K$ (castigul) si $G(s)=P(s)$.

Functia de transfer in bucla inchisa :

$$Q(s)=\frac{K}{1+KP(s)} \overset{|KP(s)|>>1}{\cong} \frac{1}{P(s)}$$



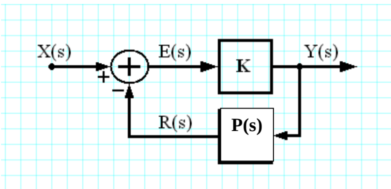
Sistemul in bucla inchisa este chiar sistemul invers al P(s), pentru o valoare suficient de mare a castigului K

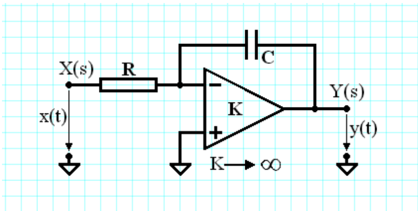
Exemplu

O valoare mare a castigului K poate fi obtinuta cu ajutorul unui amplificator operational. Exemplu.

Sistemul direct: derivator implementat cu ajutorul unui condensator (curentul prin condensator este proportional cu derivata caderii de tensiune de pe condensator $P(s)=sC$).

Sistemul invers: trebuie sa fie un integrator, $Q(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=-\dfrac{1}{sRC}$.





Compensarea unor caracteristici neideale ale unor elemente de circuit

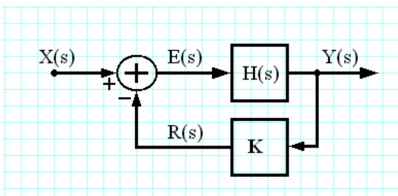
Castig constant intr-o banda de frecvente pornind de la un amplificator cu $|H(\omega)|$ variabil in acea banda.

Pentru $G(s)=K \Rightarrow Q(s)=\dfrac{H(s)}{1+KH(s)} \overset{s=j\omega}{\Rightarrow} Q(j\omega)=\dfrac{H(j\omega)}{1+KH(j\omega)}$

Castigul in bucla deschisa: $KH(\omega)$

Daca in banda de frecvente de interes : $|KH(j\omega)| \gg 1$ atunci

castigul in bucla inchisa: $Q(j\omega)\equiv Q(\omega)\cong \dfrac{1}{K}=cst$



De obicei K<1 (deoarece castig constant este obtinut numai la atenuatoare) $\Rightarrow$ Q(ω)>1.

Rezulta ca

$|H(\omega)| \gg \dfrac{1}{K} \cong Q(\omega)$, deci se cere

castigul in bucla deschisa $\gg$ castigul in bucla inchisa

Stabilizarea sistemelor instabile, Exemple

- Sistemele instabile pot fi incluse in bucla inchisa pentru stabilizare (ex: zborul unei rachete pe o traiectorie)
- **Exemplul #1 Sistem cu reactie proportionala**

$$H(s)=\frac{b}{s-a}, a>0 \quad \text{si} \quad G(s)=K$$

$$\Rightarrow Q(s)=\frac{H(s)}{1+KH(s)}=\frac{b}{s-(a-Kb)}$$

Pol: $s_p=a-Kb \in$ semiplanul stang, daca $Kb>a$

$\Rightarrow$sistem stabil. Marimea de reactie este proportionala cu marimea de iesire ($G(s)=K$)

Al doilea exemplu

Functia de transfer a oscilatorului are poli simpli pe axa imaginara: $H(s)=\frac{b}{s^2+a}$.

in cazul unei reactii proportionale $G(s)=K$, sistem in bucla inchisa

$$Q(s)=\frac{b}{s^2+(a+Kb)}.$$

sistemele de ordinul 2, $Q_t(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$ sunt stabile daca $\omega_0>0$ si daca $\xi>0$,

adica daca exista atenuare.

Analizand comparativ $Q(s)$ si $Q_t(s)$ rezulta ca nu putem influenta prin reactie proportionala decat ω_0^2 deoarece $\xi=0$.

Nu vom putea deci stabiliza oscilatorul numai prin reactie proportionala.

De aceea includem in bucla de reactie si o componenta derivativa.

$$G(s)=K_1+K_2 s.$$

$$Q(s)=\frac{b}{s^2+bK_2 s+(a+K_1 b)}.$$

Sistemul in bucla inchisa este stabil daca $a+K_1 b>0$ si $bK_2>0$.

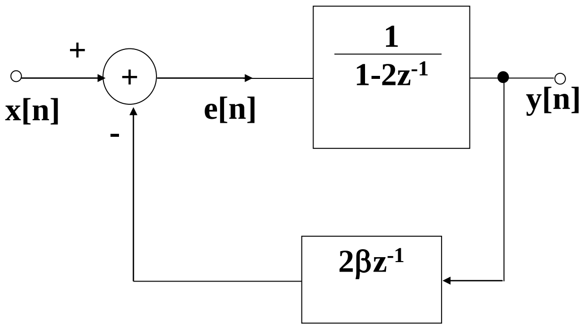
Al treilea exemplu

$$H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}\ ;G(z)=2\beta z^{-1}.$$

$$Q(z)=\frac{H(z)}{1+G(z)H(z)}=\frac{1}{1-2(1-\beta)z^{-1}}$$

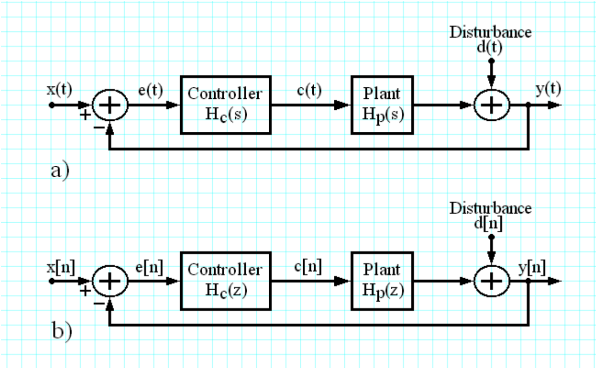
$$z_p=2(1-\beta).$$

Stabilitatea se obtine daca $\left|z_p\right|<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\beta<1.$

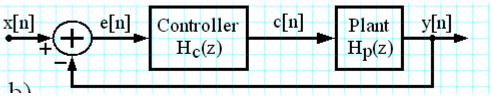


Sisteme cu urmarire (tracking)

- Pilotul automat: intrarea este ruta dorita. Iesirea este ruta reala a avionului.



20



Fara perturbari.

Pentru: $H(z)=H_c(z)H_p(z)$

$$Y(z)=\frac{H(z)}{1+H(z)}X(z);\ \text{ cu }\ E(z)H(z)=Y(z)$$

$$\Rightarrow E(z)=\frac{X(z)}{1+H(z)}$$

Pe cercul unitar: $E\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{X\left(e^{j\Omega}\right)}{1+H\left(e^{j\Omega}\right)}$

Eroarea trebuie sa fie neglijabila:

$$e[n]\cong 0, E\left(e^{j\Omega}\right)\cong 0\Rightarrow \left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| \text{ mare}$$

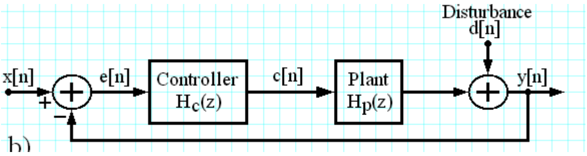
O performanta buna de urmarire se obtine la un castig global foarte mare.

21

- Erorile modelate prin perturbatia *d*[*n*]

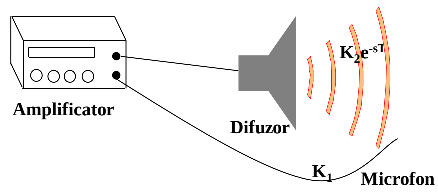
$$Y(z)=\frac{H(z)}{1+H(z)}X(z)-\frac{H(z)}{1+H(z)}D(z)$$

- Erori mici inseamna castig mic: $\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|$
- Castigul trebuie sa fie mare (la frecvente joase) si mic (la frecvente inalte)



22

Instabilitati cauzate de reactie

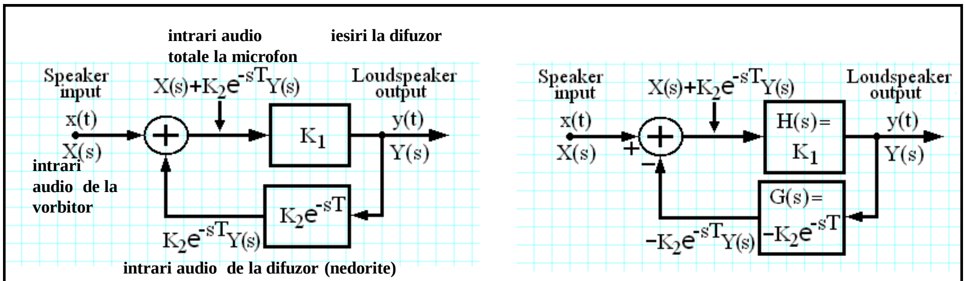


La microfon nu ajunge numai semnalul vocal ce provine de la vorbitor ci si un semnal nedorit de la difuzor. Apare astfel o bucla de reactie. Daca faza celor doua semnale este potrivita se produce intarirea sunetului generat de difuzor, pana la saturatia acestuia.

K_1 – *amplificarea*,

K_2 – atenuarea datorata propagarii sunetului prin aer.

T - durata propagarii semnalului de la difuzor la microfon.



$$Q(s)=\frac{K_1}{1-K_1K_2e^{-sT}} \Rightarrow 1-K_1K_2e^{-sT}=0 \Leftrightarrow e^{sT}=K_1K_2$$

$\Leftrightarrow$ $\left(s>0 \Rightarrow K_1K_2>1\text{- conditie de instabilitate}\right)$.

Pe masura ce distanta dintre difuzor si microfon creste, atenuarea datorata aerului creste si deci K_2 scade, sistemul putand deveni stabil.

24

Metoda locului radacinilor (Root-locus method)

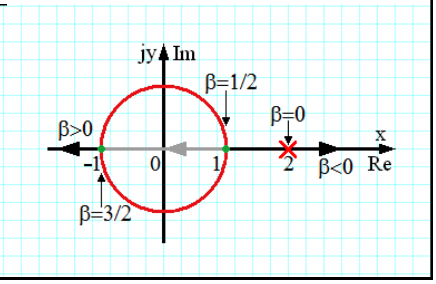
- Polii sistemului cu reactie se reprezinta in functie de castigul K.
- *cazul simplu: polii sunt cunoscuti*
- Exemplu #1, sistem digital

$$H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{z}{z-2};\quad G(z)=2\beta z^{-1}=\frac{2\beta}{z}$$

$$\Rightarrow Q(z)=\frac{1}{1-2(1-\beta)z^{-1}}=\frac{z}{z-2(1-\beta)}$$

$$\Rightarrow z_p=2(1-\beta)$$

Sistem stabil daca $|z_p|<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\beta<\frac{3}{2}$



- Exemplu #2, sistem analogic

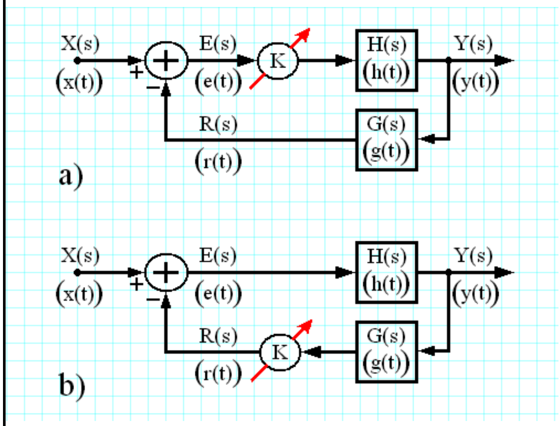
$$H(s)=\frac{s}{s-2};\quad G(s)=\frac{2\beta}{s}$$

$$\Rightarrow Q(s)=\frac{s}{s-2(1-\beta)};s_p=2(1-\beta)$$

Sistem stabil daca $\mathrm{Re}\{s_p\}<0 \Leftrightarrow \beta>1$

Cazul in care polii nu sunt cunoscuti

- Sisteme cu reactie cu castig *variabil*



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{KH(s)}{1+KH(s)G(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+KH(s)G(s)}$$

27

Punctele de capat ale locului radacinilor: polii sistemului in bucla inchisa pentru *K*=0 si |K|=∞

Polii sunt dati de $1+KH(s)G(s)=0$

Pentru sistemul in bucla inchisa, polii depind de *K*:

$$H(s)G(s)=-\frac{1}{K}$$

Pentru *K*→0: H(s)G(s)→±∞, solutia ecuatiei data de polii lui H(s)G(s)

pentru: $H(s)=\frac{s}{s-2};\quad G(s)=\frac{2\beta}{s}\Rightarrow H(s)G(s)=\frac{2\beta}{s-2}$

$$\frac{2}{s-2}=-\frac{1}{\beta}$$

$$\beta=0\Rightarrow s=2$$

Pentru K→±∞, 1/K→0, solutia data de zerourile lui H(s)G(s)

28

Criteriul variatiei argumentului

- K-real, s_0 – pol al sistemului cu reactie, atunci

$$G(s_0)H(s_0) = \left|G(s_0)H(s_0)\right| e^{jArg\{G(s_0)H(s_0)\}} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{jArg\{G(s_0)H(s_0)\}} = \pm 1$$

$$\Rightarrow Arg\{G(s_0)H(s_0)\} \text{ multiplu de } \pi$$

$$-\text{multiplu impar de } \pi \Rightarrow K = \frac{1}{\left|G(s_0)H(s_0)\right|} > 0$$

$$-\text{multiplu par de } \pi \Rightarrow K = -\frac{1}{\left|G(s_0)H(s_0)\right|} < 0$$

29

Pentru: $H(s)G(s) = \dfrac{2\beta}{s-2} \Rightarrow \dfrac{2}{s-2} = -\dfrac{1}{\beta}$

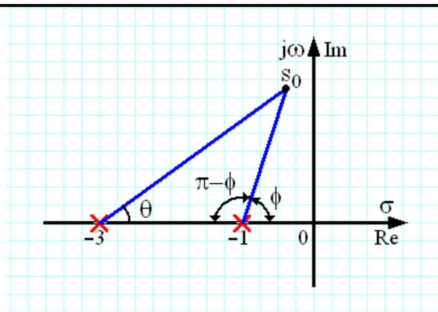
$$s_0 < 2 \Rightarrow Arg\left\{\frac{2}{s_0 - 2}\right\} = \text{-}\ \pi$$

$$\Rightarrow \text{castig } \beta = \frac{1}{\left|\dfrac{2}{s_0 - 2}\right|} = \frac{2 - s_0}{2} \quad \Rightarrow s_0 = 2(1-\beta)$$

- Locul radacinilor: s_0 pentru care argumentul functiei de transfer in bucla deschisa este
- -multiplu impar de π pentru castig pozitiv K>0
- -multiplu par de π pentru castig negativ K<0

30

$$H(s)=\frac{1}{s+1};G(s)=\frac{1}{s+3}$$

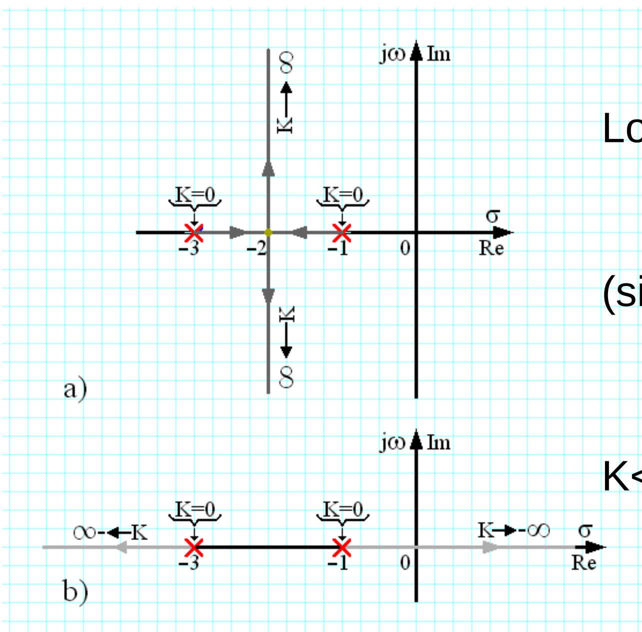


- Poli reali:

$$s_0 \in \mathbb{R}, s_0 > -1: Arg\{G(s_0)H(s_0)\} = 0 \Rightarrow K < 0$$
$$s_0 \in \mathbb{R}, -3 < s_0 < -1: Arg\{G(s_0)H(s_0)\} \;= -\,\pi \Rightarrow K > 0$$
$$s_0 \in \mathbb{R}, s_0 < -3: Arg\{G(s_0)H(s_0)\} \;= -\,2\pi \Rightarrow K < 0$$

- Poli complecsi. Pt ω pozitiv: K>0, pt ω negativ: la fel

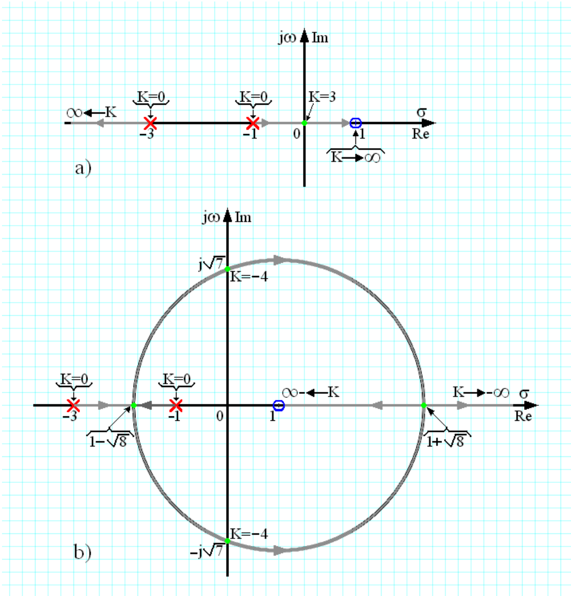
$$\omega > 0: -2\pi < Arg\{G(s_0)H(s_0)\} < 0 \Rightarrow Arg\{G(s_0)H(s_0)\} = -\pi \Rightarrow K > 0$$
$$\omega < 0: K > 0$$



Locul radacinilor pt K>0

(sistem stabil)

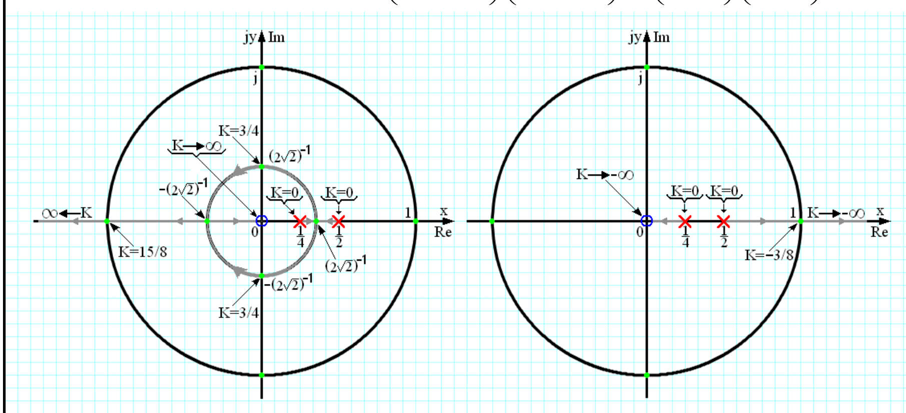
K<0 (s-ar putea sa fie instabil)



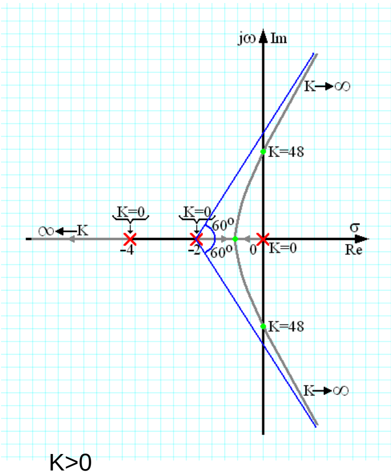
$$G(s)H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s+3)}$$

33

$$G(z)H(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$



$$G(s)H(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$



- Sistem stabil pentru K∈(0,48)

Criteriul de stabilitate Nyquist

Utilizarea criteriului de stabilitate Hurwitz presupune cunoasterea expresiei functiei de transfer in bucla inchisa a sistemului cu reactie. Exista situatii cand aceasta functie de transfer nu este cunoscuta: in cazul identificarii experimentale a unui sistem cu reactie, cand pot fi identificate doar raspunsurile in frecventa *H* si *G*. In aceste cazuri poate fi folosit criteriul lui Nyquist.

Solutiile ecuatiei $H(s)\cdot G(s)=-\frac{1}{K}$ depind de valoarea lui K.

Pot fi determinate valori ale lui K pentru care sistemul cu reactie sa fie stabil. Pe baza criteriului lui Nyquist pot fi determinate aceste valori prin examinarea functiei $G(j\omega)H(j\omega)$. Reprezentarea grafica in planul s a acestei functii poarta numele de hodograf al lui $W(s)$.

In scopul formularii criteriului lui Nyquist se enunta in prealabil principiul variatiei argumentului, care da informatii despre hodograful unei functii complexe de variabila complexa.

$G(j\omega)\cdot H(j\omega)$ cu ω modificandu-se de la -∞ la ∞ - hodograf Nyquist al sistemului in bucla deschisa.

hodograful Nyquist trebuie sa inconjoare punctul de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$ in sens anti-orar de un numar de ori egal cu $n_i+\frac{n_C}{2}$.

n_i - numarul polilor din semiplanul drept ai lui $H(s)G(s)$,

n_C - numarul polilor de pe axa imaginara ai lui $H(s)G(s)$.

Criteriul de stabilitate Nyquist pentru sisteme analogice

Conditia necesara si suficienta ca sistemul in bucla inchisa considerat sa fie strict stabil este ca numarul de incercuiri ale punctului de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$ de catre hodograful Nyquist al sistemului in bucla deschisa $H(j\omega)G(j\omega)$ in sens antiorar cand ω se modifica de la -∞ la ∞, sa fie egal cu numarul polilor lui $H(s)G(s)$ din semiplanul drept si de pe axa imaginara, adica cu $n_i+\frac{n_C}{2}$.

Sistemul in bucla inchisa este strict stabil daca si numai daca ***numarul de incercuiri*** ale punctului de coordonate (-1/K,0) de catre hodograful Nyquist H(jω)G(jω) al sistemului in bucla deschisa in sens trigonometric, pentru ω ∈(-∞, ∞) , este egal cu ***numarul polilor*** lui *H*(s)*G*(s) localizat ***in semiplanul drept***.

Observatii

1. Daca sistemul in bucla deschisa este stabil atunci $H(s)G(s)$ nu are poli in semiplanul drept si nici pe axa imaginara. Deci hodograful Nyquist al sistemului in bucla deschisa nu trebuie sa incercuiasca punctul de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$.

2. Deoarece $h(t)$ si $g(t)$ sunt functii reale $H(-j\omega)G(-j\omega)=H(j\omega)^{*}G(j\omega)^{*}$ si deci $\left|H(-j\omega)G(-j\omega)\right|=\left|H(j\omega)^{*}G(j\omega)^{*}\right|=\left|H(j\omega)^{*}\right|\left|G(j\omega)^{*}\right|=\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|$

si $arg\{H(-j\omega)G(-j\omega)\}=arg\left\{H(j\omega)^{*}G(j\omega)^{*}\right\}=arg\left\{\left(H(j\omega)G(j\omega)\right)^{*}\right\}=$
$=-arg\{H(j\omega)G(j\omega)\}$

Hodograful Nyquist pentru domeniul de variatie a lui ω intervalul $(-\infty,0)$ se obtine prin simetrie fata de axa reala a planului complex $H(s)G(s)$ din hodograful Nyquist pentru domeniul de variatie a lui ω cuprins in intervalul $(0,\infty)$.

Exemplul #1

$$G(s)=\frac{1}{s+1};\ H(s)=\frac{1}{0.5s+1}\Rightarrow H(s)G(s)=\frac{1}{0.5s^2+1.5s+1}$$

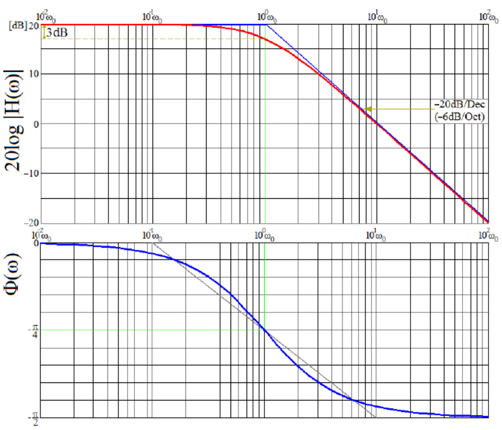
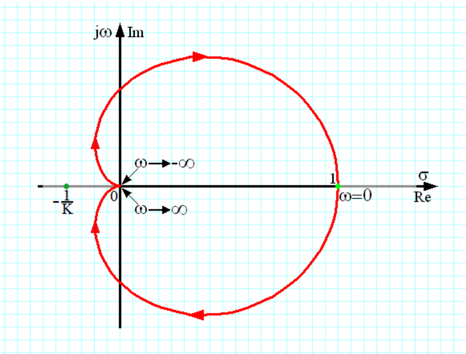


Fig. 13.21 Bode plots $G(j\omega)H(j\omega)=2/\left[(j\omega+1)(j\omega+2)\right]$.

Exista doua modalitati de constructie a hodografului sistemului in bucla deschisa. Prima se bazeaza pe caracteristicile Bode (valorile $\left|H(\omega)G(\omega)\right|$ si $arg\{H(\omega)G(\omega)\}$) ale sistemului in bucla deschisa sau valorile $Re\{H(\omega)G(\omega)\}$ si $Im\{H(\omega)G(\omega)\}$.

40



Deoarece sistemul in bucla deschisa este stabil pentru ca si sistemul in bucla inchisa sa fie stabil este necesar ca sa nu fie incercuit punctul de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$.

$-\frac{1}{K}<0$ sau $-\frac{1}{K}>1$

$K>0$ sau $K>-1$ adica $K>-1$.

Pentru reactia negativa, K > 0, stabilitatea este asigurata intotdeauna.

Pentru reactia pozitiva, K < 0, avem din a doua conditie: -1 < K < 0

41

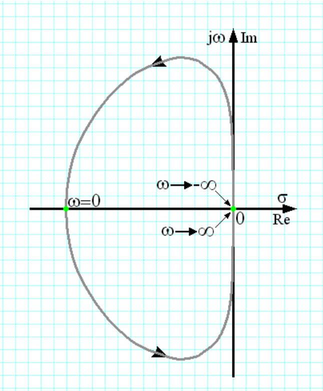
Exemplul #2

- Sistemul in bucla deschisa este instabil, avand un pol in semiplanul drept:

$$G(s)H(s)=\frac{2(s+1)}{(s-1)(s+2)}$$

- Sistemul in bucla inchisa stabil: daca punctul critic σ = -1/K este inconjurat de hodograf o singura data in sens trigonometric.

$$-1<-\frac{1}{K}<0 \ \Rightarrow K>1$$



42

Exemplul #3 sistem acustic

$$K = K_1 K_2,\ G(s)H(s) = -e^{-sT} = e^{-(sT+j\pi)}$$

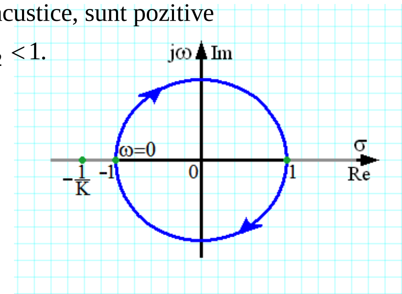
$G(j\omega)H(j\omega) = e^{-j(\omega T+\pi)}$.

Modulul este unitar, argumentul are expresia $-(\omega T+\pi)$.

Deoarece sistemul in bucla deschisa este stabil, hodograful Nyquist nu are voie sa incercuiasca punctul critic $-1/K$, sau $|K|<1$.

Deoarece K_1 si K_2 au semnificatia de atenuari acustice, sunt pozitive

Sistemul in bucla deschisa este stabil daca $K_1K_2<1$.

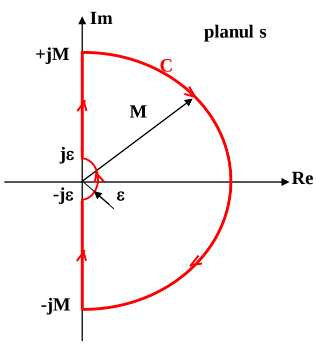


43

Cazul polilor sistemului in bucla deschisa situati pe axa imaginara

Consideram cazul unui pol pe axa imaginara. $G(s)H(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$.

Pentru a aplica criteriul variatiei argumentului la fel ca in cazurile anterioare se considera conturul C, modificat, in asa fel incat sa fie ocolit polul de pe axa imaginara, printr - un semicerc de raza $\varepsilon \to 0$, in acelasi timp cu $M \to \infty$.

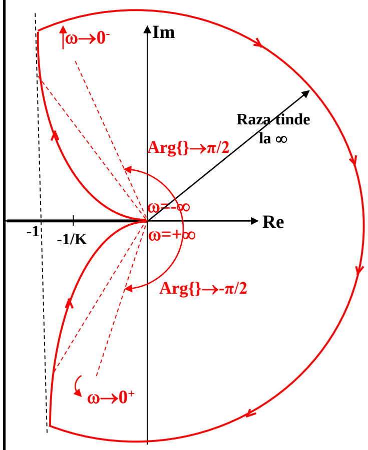


Valoarea produsului GH pe cercul de raza M este o constanta si deci nu apare nici o variatie a argumentului cand ω trece de la ∞ la -∞. Trebuie deci sa trasam hodograful Nyquist numai pentru axa imaginara si pentru semicercul de raza ε. Avem:

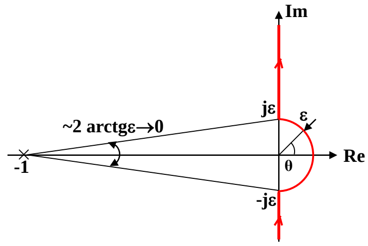
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+1)}=\frac{1}{|\omega|\sqrt{\omega^2+1}}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega+arctg\omega\right)}$$

si $\lim\limits_{j\omega\to 0} Re\{G(j\omega)H(j\omega)\}=-1$, adica $\sigma=-1$ este asimptota verticala a hodografului Nyquist.

Ramane sa determinam comportarea produsului pe semicercul de raza ε.



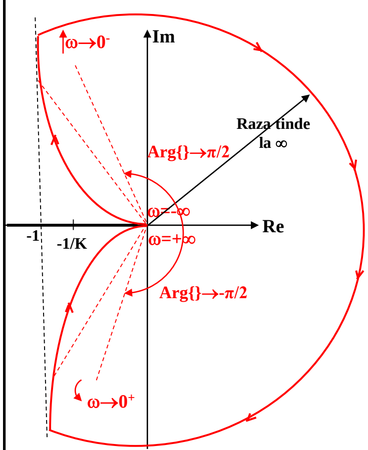
Deoarece raza ε tinde spre zero, variatia unghiului cauzata de polul -1 este nula.



In schimb pe semicerc $Arg\{G(j\omega)H(j\omega)\} = -\theta$ si deci

$$\Delta Arg\{G(j\omega)H(j\omega)\} = -(\theta_{\omega=0_+} - \theta_{\omega=0_-}) = -\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

sau $\Delta Arg\{G(j\omega)H(j\omega)\} = -\pi$. Aceasta inseamna o rasucire a hodogrfului cu 180° in sens orar atunci cand se trece de la $\omega = 0^-$ la $\omega = 0^+$ pe semicercul de raza ε.



Pentru a determina valorile admise pentru castigul K, vom face mentiunea ca in interiorul conturului C considerat nu se afla nici macar polul din origine, deoarece l-am lasat in afara, ocolindu-l prin dreapta cu semicercul de raza ε. In consecinta punctul critic nu trebuie sa fie inconjurat de hodograf, pentru a avea stabilitatea sistemului in bucla inchisa.

Rezulta ca trebuie sa avem $-\frac{1}{K} < 0$ sau $K > 0$.

Cazul sistemelor in timp discret

Pentru ca sistemul in timp discret in bucla inchisa sa fie stabil este necesar ca nici un zero al ecuatiei : $R(z)=\frac{1}{K}+G(z)H(z)=0$ sa nu fie in afara cercului unitate.

Fie : $\hat{R}(z)=R\left(\frac{1}{z}\right)$.

Daca z_0 este un zero (pol) al lui $R(z)$ atunci $\frac{1}{z_0}$ este un zero (pol) al lui $\hat{R}(z)$.

Daca $|z_0|>1$ atunci $\frac{1}{|z_0|}<1$. Orice zero (pol) al lui $R(z)$ din exteriorul cercului unitate este un zero (pol) al lui $\hat{R}(z)$ situat in interiorul cercului unitate.

Conform principiului variatiei argumentului daca z parcurge odata cercul unitate in sens orar atunci $\hat{R}(z)$ incercuieste originea planului $\left(Re\{\hat{R}(z)\},Im\{\hat{R}(z)\}\right)$ in sens orar de un numar de ori egal cu diferenta dintre numarul de zerouri si de poli ai lui $\hat{R}(z)$ situati in interiorul cercului unitate.

Pe cercul unitate $z=e^{j\Omega}$ si $\frac{1}{z}=e^{-j\Omega}$. De aceea $\hat{R}\left(e^{j\Omega}\right)=R\left(e^{-j\Omega}\right)$.

Evaluarea lui $\hat{R}(z)$, cand z parcurge odata cercul unitar in sens orar, este identica cu evaluarea lui $R(z)$,cand z parcurge odata cercul unitar in sens antiorar.

Enuntul criteriului lui Nyquist pentru sisteme in timp discret

Conditia necesara si suficienta pentru ca sistemul in bucla inchisa sa fie stabil este ca numarul de incercuiri in sens antiorar ale punctului de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$ de catre hodograful Nyquist al lui $G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)$ cand Ω se modifica de la 0 la 2π trebuie sa fie egal cu numarul polilor lui $H(z)G(z)$ care se gasesc in exteriorul cercului unitate.

Exemplul #1

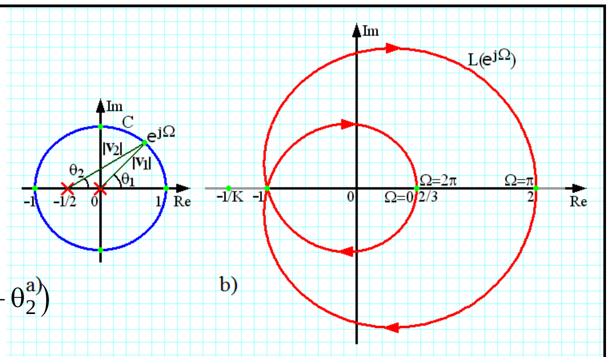
$$G(z)H(z)=\frac{z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{e^{j\Omega}\left(e^{j\Omega}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{v_1 v_2}e^{-j(\theta_1+\theta_2)}=\frac{1}{v_2}e^{-j(\theta_1+\theta_2)}$$

- Valorile maxime si minime pentru ν_2

$$\Omega=0,2\pi:\ \left|G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)\right|=2/3$$

$$\Omega=\pi:\ \left|G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)\right|=2$$



$$Arg\left\{G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)\right\}=-(\theta_1+\theta_2)$$

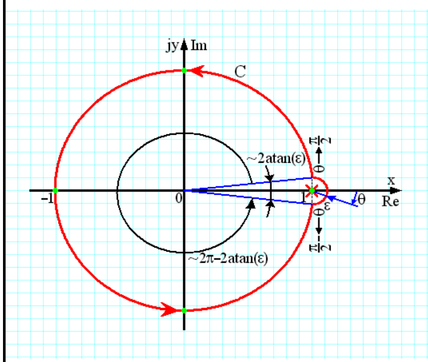
$$\Delta Arg\left\{G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)\right\}=-4\pi$$

- Sensul de parcurgere al hodografului este orar
- Se fac 2 rotatii complete in jurul (0,0).
- Sistemul in bucla deschisa este stabil $\Rightarrow$ **punctul critic nu trebuie** sa fie inconjurat de hodograful lui Nyquist
- Sistemul in bucla inchisa este stabil pentru:

$$-1/K<-1 \text{ or } -1/K>2 \ \Rightarrow\ 0<K<1 \text{ sau } -1/2<K<0$$

$$K\in(-1/2,0)\cup(0,1)$$

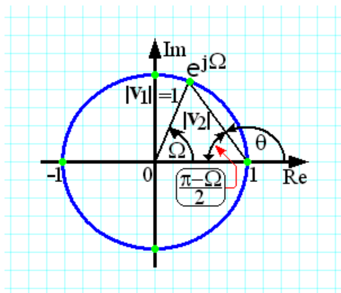
Exemplul #2



conturul cercului unitar *C* se modifica prin adaugarea unui semicerc de raza $\varepsilon \to 0$, care pastreaza polii in interiorul conturului.

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$: pol pe cercul unitar

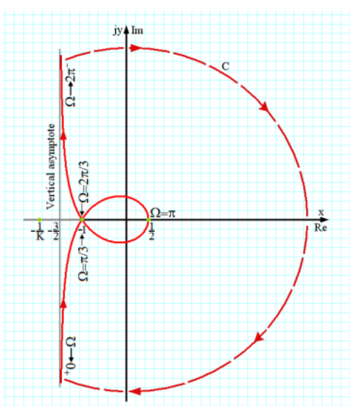
$$\Rightarrow G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{v_1 v_2} e^{-j(\Omega+\theta)} = \frac{1}{v_2} e^{-j(\Omega+\theta)}$$

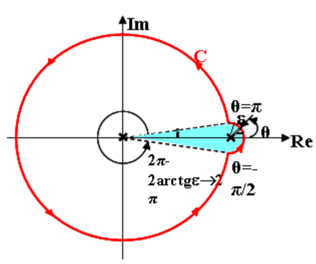


partea noului contur corespunzand cercului unitar

Ω	θ	Modul	Faza	Observatii
π/3	2π/3	1	-π	
π	π	1/2	-2π	*x*=-3/2 asimptota verticala

$$\Delta Arg\left\{G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)\right\} = -(\pi/2 + \pi/2) = -\pi$$



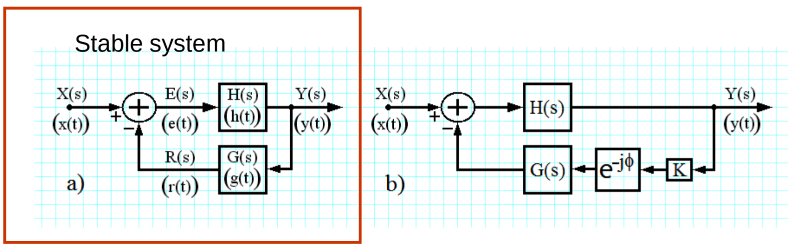


Sistemul in bucla inchisa stabil daca:

-1/*K*<1 sau 0<*K*<1.

Rezerva de amplificare si de faza

Uneori este interesant sa se stie, pentru un sistem stabil, in ce masura poate fi modificata amplificarea sistemului si ce defazaj suplimentar poate fi introdus in sistem in asa fel incat el sa ramana stabil.



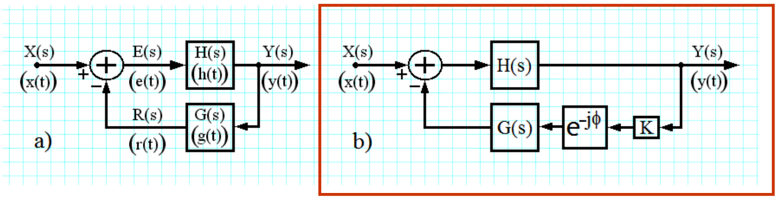
Se numeste margine de amplificare a sistemului din stanga, valoarea minima a lui K pentru care sistemul din dreapta, pentru $\varphi = 0$ devine instabil.

Se numeste margine de faza a sistemului din stanga, valoarea minima a lui φ, pentru $K = 1$, pentru care sistemul din dreapta devine instabil.

$$1 + H\left(e^{j\omega}\right) \cdot G\left(e^{j\omega}\right) \cdot K \cdot e^{-j\varphi} = 0$$

Prin modificarea lui K sau a lui φ unul dintre polii functiei de transfer in bucla inchisa poate ajunge pe axa imaginara, in punctul $j\omega_0$:

$$Ke^{-j\varphi} H\left(j\omega_0\right) G\left(j\omega_0\right) = -1$$



Conditia de instabilitate pentru al doilea sistem:

$$1+H\left(e^{j\omega}\right)G\left(e^{j\omega}\right)\cdot K\cdot e^{-j\varphi}=0$$

Modificand K sau $\varphi \Rightarrow$ unul dintre polii sistemului in bucla inchisa se duce pe axa imaginara, in pozitia $j\omega_0$.

55

Exemplu. $G(s)H(s)=\dfrac{4\left(1+\dfrac{1}{2}s\right)}{s(1+2s)\left[1+0{,}05s+(0{,}125s)^2\right]}.$

Deoarece sistemul in bucla deschisa este stabil,pentru ca sistemul in bucla inchisa sa ramana stabil este necesar ca punctul critic sa ramana in exteriorul hodografului. Rezerva de amplificare va fi distanta, pe axa reala, de la puctul critic la intersectia hodografului cu axa reala negativa. Pentru $\varphi=0$, ecuatia devine:

$K\left|G(j\omega_0)H(j\omega_0)\right|e^{jArg\{G(j\omega_0)H(j\omega_0)\}}=-1.$

Deoarece primii 2 factori din membrul stang sunt pozitivi este necesar ca exponentiala complexa sa fie negativa.

Fie ω_1 frecventa la care: $e^{jArg\{G(j\omega_1)H(j\omega_1)\}}=-1\Leftrightarrow Arg\{G(j\omega_1)H(j\omega_1)\}=-\pi.$

La frecventa ω_1 are loc intersectia hodografului cu axa reala negativa.

Rezerva de amplificare este $K=\dfrac{1}{\left|G(j\omega_1)H(j\omega_1)\right|}.$

Fie ω_2 frecventa la care $\left|G(j\omega_2)H(j\omega_2)\right|=1.$

Rezerva de faza va fi: $\varphi=\pi-Arg\{G(j\omega_2)H(j\omega_2)\}.$

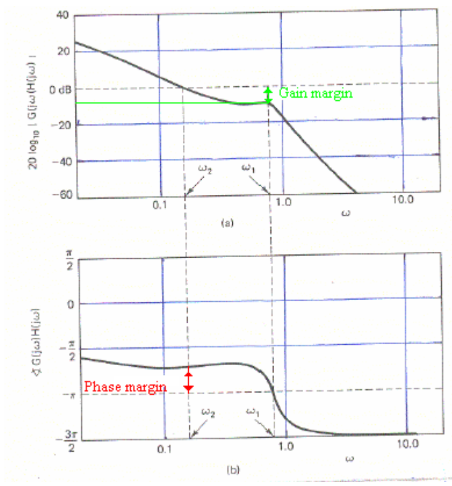
Rezerva de amplificare:

$$K = \frac{1}{\left| G(j\omega_1) H(j\omega_1) \right|}$$

$$\omega_2 \; : \; \left| G(j\omega_2) H(j\omega_2) \right| = 1.$$

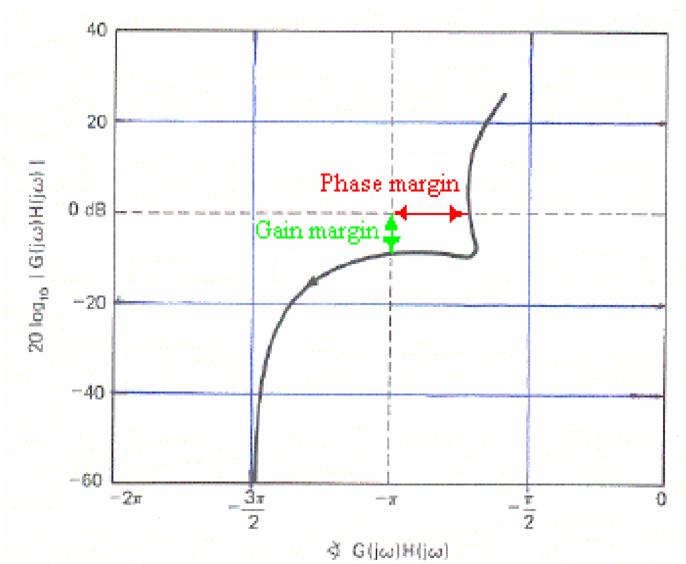
Rezerva de faza:

$$\varphi = \pi - Arg\left\{ G(j\omega_2) H(j\omega_2) \right\}.$$



57

hodograful lui Nyquist pentru sistemul in bucla deschisa



58