

**UNIVERSITATEA “POLITEHNICA” TIMISOARA**  
**FACULTATEA DE ELECTRONICA SI TELECOMUNICATII**

**UTILIZAREA UNDISOARELOR IN TRANSMISIA DE DATE**

- referat nr. 3 în cadrul pregătirii pentru doctorat -

**Coordonator științific:**

**Prof. Dr. Ing. Miranda Naforniță**

**Candidat:**

**Marius Oltean**

**Timișoara, septembrie 2008**

## Cuprins:

Cap.1: Modulația multipurtătoare cu purtătoare sinusoidale	3
1.1 Conceptul de modulație multipurtătoare	3
1.2 Multiplexul ortogonal cu diviziune de frecvență (OFDM)	5
1.2.1 Schema bloc a unui sistem OFDM	6
1.2.2 Necesitatea transmisiei paralele multipurtătoare	8
1.2.3 Descrierea modulatorului OFDM	9
1.2.4 Legătura dintre tehnica OFDM și Transformarea Fourier Discretă	11
1.2.5 Utilizarea prefixului circular în OFDM	15
1.2.5.1 Egalizarea canalului cu ajutorul prefixului circular	17
Cap. 2: Transmisia multipurtătoare cu ajutorul undișoarelor	20
2.1 Introducere	20
2.2 O privire generală asupra funcțiilor wavelet	21
2.3 Transformarea wavelet discretă	24
2.4 Criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol și funcțiile wavelet	28
2.4.1 Baze Riesz	31
2.4.2 Formarea impulsurilor cu ajutorul funcțiilor wavelet	32
2.5 Transmisia multipurtătoare cu ajutorul funcțiilor wavelet	34
Cap. 3: O comparație experimentală între OFDM și WOFDM	39
3.1 Dezavantajele principale ale tehnicii OFDM	39
3.2 Avantajele implementării modulației multipurtătoare bazată pe funcții wavelet	44
3.2.1 Analiza comparativă a performanței BER în cazul OFDM și WOFDM	51
3.2.1.1 Simularea comportamentului canalelor radio	52
3.2.1.2 Performanțele transmisiilor multipurtătoare în canale cu fading plat	57
Cap. 4: Investigarea detaliată a performanțelor WOFDM	61
4.1 Alegerea undișoarelor folosite drept purtătoare în WOFDM	62
4.1.1 Explicație rezultatului superior al undișoarei Haar	64
4.1.2 Influența numărului de momente nule	67
4.2 Influența numărului de iterații ale IDWT asupra performanțelor transmisiei	68
4.3 Asocierea transmisiei WOFDM cu coduri corectoare de erori	74
Bibliografie	79
Anexa	83

# CAP I: MODULAȚIA MULTIPURTĂTOARE CU PURTĂTOARE SINUSOIDALE

## 1.1 Conceptul de modulație multipurtătoare

Originile tehnicii de multiplexare cu diviziune în frecvență se regăsesc departe în timp, acum mai bine de un secol. Este vorba despre transmiterea mai multor semnale de debit joase (de exemplu semnale de telegrafie) printr-un canal de bandă largă utilizând o frecvență purtătoare diferită pentru fiecare semnal. Pentru a se facilita demultiplexarea transmisiilor la receptor, frecvențele purtătoare folosite au fost separate astfel încât să se evite suprapunerea spectrelor ocupate de fiecare dintre semnalele transmise. S-au folosit în acest scop intervale frecvențiale "de gardă", care să permită separarea fiecărui spectru cu ajutorul unor filtre simple de implementat. Din cauza acestor intervale de gardă, eficiența spectrală a unui astfel de sistem este redusă (fig. 1).

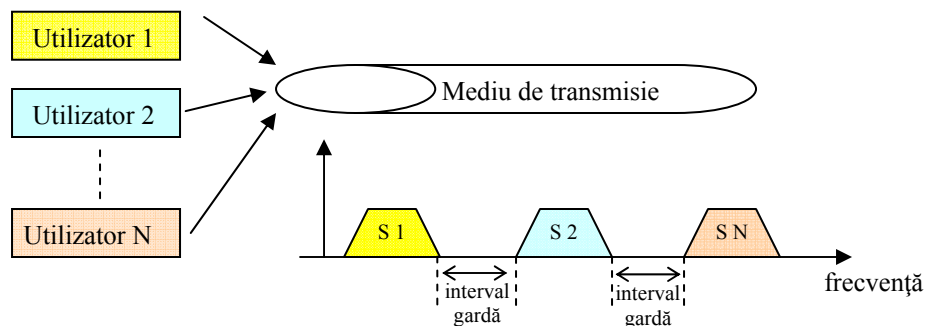


Fig. 1: Principiul accesului multiplu cu diviziune în frecvență

Îndepărtată încă de conceptul de modulație multi-purtătoare, multiplexarea cu diviziune în frecvență reprezintă mai degrabă o tehnică de acces multiplu, care rezolvă problema partajării unui mediu de transmisie unic de către mai mulți utilizatori.

Pasul înspre ceea ce înseamnă modulația multi-purtătoare poate fi făcut dacă avansăm ipoteza că, în loc de a transporta semnale diferite (provenite de la utilizatori distincți), purtătoarele utilizate vor transporta simboluri care aparțin unui singur utilizator de debit ridicat. Sursa de informație ar putea genera date direct într-un format paralel, sau date secvențiale (seriale) aduse la intrarea unui convertor serial-paralel. După conversia în paralel a șirului de date inițial, fiecare flux paralel va fi transmis pe câte o subpurtătoare distinctă. O asemenea transmisie paralelă, sau "simultană" poate fi comparată din punct de vedere al debitului total generat, cu o transmisie serială de debit înalt care utilizează același canal (aceeași bandă de frecvențe totală), însă modularea are loc pe o singură purtătoare. Este evident că implementarea sistemului paralel cu ajutorul unor emițătoare și receptoare multiple ar fi mai costisitoare decât implementarea sistemului serial, care

cere un singur modulator și un singur demodulator. La o primă vedere, în cazul tehnicii multipurtătoare, fiecare sub-canal transportă debite joase, iar suma ratelor de transmisie pe subcanale este inferioară debitului pe care l-ar permite transmisia serială, din cauza intervalelor de gardă, care nu sunt utilizate pentru transmisia de date, deci consumă din resursele dedicate transmisiei. Pe de altă parte, semnalul transmis serial, cu debit înalt, ar fi mult mai sensibil la fenomenul de interferență inter-simbol (IIS). În acest caz, durata scurtă a simbolurilor transmise face ca ele să ocupe întreaga lățime de bandă disponibilă, spre deosebire de lățimea de bandă redusă a fiecărui simbol transmis în paralel. Este de presupus că, în acest ultim caz, răspunsul în frecvență al canalului poate fi considerat aproximativ plat pentru fiecare sub-canal în parte, reducându-se astfel efectul negativ indus de selectivitatea în frecvență a canalului. Astfel, anterior dezvoltării unor tehnici de egalizare fiabile, transmisia paralelă oferea o posibilitate reală de atingere a unor debite înalte în canale dispersive, fiind folosită în ciuda costului său ridicat și a eficienței spectrale reduse.

Una dintre primele soluții care a fost avansată pentru rezolvarea problemei eficienței spectrale vine din partea unei companii americane (Collins Radio), care propune în deceniul 6 sistemul Kineplex, menit a transmite date printr-un canal de înaltă frecvență afectat de fading selectiv în frecvență [Bah,Sal'02]. Rata de date vizată era de 2400bps. Într-un asemenea sistem se utilizau 20 de tonuri modulate prin DQPSK, fără filtrare. Spectrul fiecărui ton are forma  $\sin(kf)/f$ , conducând la interferență între spectrele ce corespund diverselor purtătoare. Spectrul de tip sinus cardinal rezultă din forma de poartă dreptunghiulară pe care o au simbolurile de transmis (în timp), care translatată în frecvență prin transformarea Fourier, conduce înspre de oscilația atenuată caracteristică sinusului cardinal. Similar sistemului OFDM din zilele noastre, subpurtătoarele erau separate între ele prin intervale de frecvență care sunt egale cu inversul duratei unui simbol multipurtătoare transmis (sau, echivalent, cu inversul duratei "de observare" a demodulatorului).

Schema demodulatorului este ilustrată în figura 2. Fiecare purtătoare este detectată utilizând o pereche de circuite calate pe frecvența purtătoarei. Semnalul este transmis pe două ramuri, pe una dintre ele introducându-se o întârziere de fază egală cu durata de transmisie a unui simbol, făcând astfel posibilă calcularea diferenței de fază dintre două simboluri consecutive și detectarea informației transmise. Performanțele obținute cu acest sistem au fost relativ bune, dar cu un cost de implementare ridicat. Tehnica descrisă garantează ortogonalitatea purtătoarelor, ortogonalitate necesară pentru a separa semnalele transmise pe fiecare subpurtătoare în parte. Totuși, spectrul de tipul sinus cardinal ( $\sin(kf)/f$ ) al fiecărei subpurtătoare are câteva proprietăți care sunt indezirabile. Fiindcă o asemenea funcție se întinde pe întreaga axă a frecvențelor, toate subpurtătoarele folosite în transmisie se vor suprapune pe axa frecvențelor. Mai mult decât atât, transmisia multipurtătoare

trebuie să asigure un interval de gardă la stânga și la dreapta benzii dedicate, care să elimine interferențele cu sisteme ce lucrează în benzi adiacente. Ori, energia lobilor laterali din spectrul  $(\sin(kf)/f)$  este suficient de mare încât să producă interferențe în benzile adiacente. Se preferă din acest motiv utilizarea unor semnale de bandă limitată care să moduleze fiecare subpurtătoare (în locul impulsurilor rectangulare), care pot fi obținute prin intermediul unor filtre Nyquist formatoare de impulsuri. Rezultatul unei asemenea abordări va fi că fiecare subpurtătoare modulată va afecta doar canalele adiacente (nivelul de interferență fiind mai mic), fără a fi afectată ortogonalitatea subpurtătoarelor.

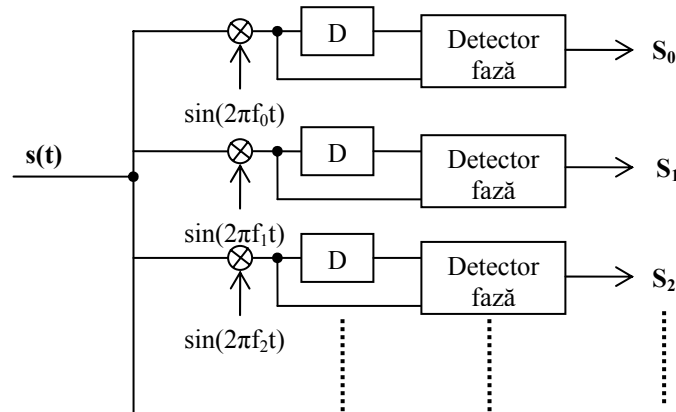


Fig 2: Schema de principiu a receptorului Kineplex.

## 1.2 Multiplexul ortogonal cu diviziune de frecvență (OFDM)

Așa cum rezultă din paragraful precedent, ideea care stă la baza modulației OFDM s-a născut cu mult timp în urmă. Introducerea ei în sisteme folosite pe scară largă a trenat însă pentru mult timp, din pricina complexității de implementare, care în sistemele pe bază de circuite analogice conducea la dificultăți și costuri de implementare prohibitive.

Expansiunea modulației OFDM a apărut de fapt odată cu maturizarea tehnicilor de procesare numerică de semnal și a algoritmilor asociați. În acest caz, o importanță particulară o prezintă algoritmul rapid de calcul al Transformării Fourier Discrete (TFD), care este punctul cheie al modulatorului și demodulatorului OFDM, așa cum se va vedea în cele ce urmează [Bin'90, Cim'85]. Utilizarea acestei tehnici a cunoscut o dezvoltare rapidă mai ales în sisteme care folosesc transmisia prin unde radio. Astfel, o gamă largă de standarde și soluții proprietar folosesc OFDM la nivelul fizic pentru a transmite informația prin canalul radio. Între acestea se pot aminti DAVB (Digital Audio & Video Broadcasting) [ETSI'00], WiFi (IEEE 802.11) [IEEE'02], WiMAX (IEEE

802.16)[IEEE'04] sau Flash OFDM (soluție Flarion) [Fla'04]. Mai mult decât atât, versiuni de transmisii multipurtătoare s-au adoptat și în transmisii cu fir, cu rezultate remarcabile. La acest capitol se poate aminti tehnologia ADSL (transmisii de debite impresionante de date prin cablurile telefonice de cupru folosite în telefonia analogică clasică- PSTN) sau sisteme de transmisie de date prin rețeaua publică de alimentare cu tensiune electrică (de ex. PLUG) [Lam, Hub'00].

În cele ce urmează, se vor prezenta conceptele de bază ale modulației OFDM. Astfel, după exemplificarea conceptului de modulație multipurtătoare, se va argumenta și explicita importanța ortogonalității pentru demodularea corectă a transmisiei efectuate. În continuare se va prezenta o descriere matematică a modulatorului OFDM, și se va explica importanța conceptului de „prefix circular”, strâns legat de modulația OFDM. Capitolul se va încheia cu o secțiune dedicată expunerii „punctelor slabe” și a dezavantajelor tehnicii discutate.

### 1.2.1. Schema bloc a unui sistem OFDM

În figura de mai jos se prezintă schema bloc a unui lanț de transmisie folosind multiplexul ortogonal cu diviziune de frecvență.

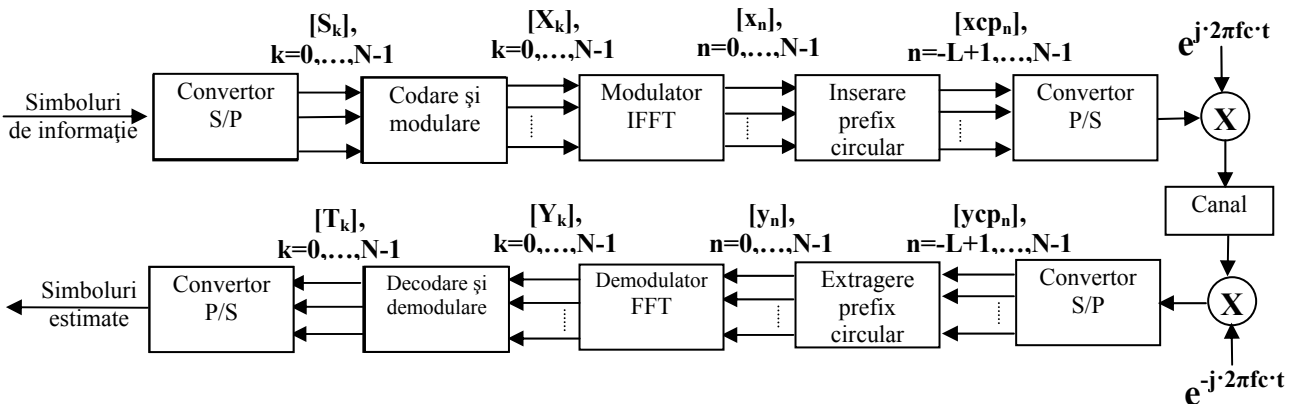


Fig.3: Schema bloc a unui sistem de transmisie bazat pe OFDM.

Simbolurile de informație sunt o secvență de biți rezultată eventual în urma unei codări de canal a șirului inițial de date. Succesiunea astfel obținută este convertită în format paralel (pe  $N$  ramuri) și supusă unei „modulări în banda de bază”. Practic, în funcție de constelația de modulare aleasă pe fiecare ramură, grupurile de biți sunt convertite în simboluri complexe. Pentru exemplificare, să alegem cazul modulației QPSK, pentru care fiecare dibit este convertit într-un număr complex (notat cu  $s_k$  în figura 3) din mulțimea  $\{\sqrt{2} + j\sqrt{2}, \sqrt{2} - j\sqrt{2}, -\sqrt{2} - j\sqrt{2}, -\sqrt{2} + j\sqrt{2}\}$ . Pe fiecare ramură în paralel, simbolurile de modulație vor modula o purtătoare complexă. Tot acest proces este

implementat prin intermediul algoritmului Inverse Fast Fourier Transform (IFFT) care reprezintă punctul cheie al modulatorului OFDM. Faptul că modularea este realizată prin aplicarea unei transformate Fourier inverse ne poate conduce spre interpretarea simbolurilor de intrare în modulator ca fiind „eșantioane” definite în frecvență. Aceasta reprezintă însă doar un detaliu de modelare al lanțului de transmisie fără importanță practică. În ceea ce privește constelația de modulare folosită, ea poate fi aceeași sau diferită pe fiecare ramură în parte, ca rezultat al unui mecanism inteligent de optimizare a transmisiei care se bazează pe estimarea canalului. Spre exemplu, sistemul de modulație Discrete Multi Tone (DMT) [Fis,Hub'96] folosit în ADSL testează canalul cu un semnal pilot, urmând să „încarce” fiecare subpurtătoare în funcție de „gradul de încredere” al acesteia. Mecanisme asemănătoare, dar mai complexe se utilizează și în sistemele radio de tipul WiFi sau WiMAX. În fața simbolului OFDM obținut de către modulatorul IFFT se inserează un prefix circular care are menirea de a separa între ele două blocuri OFDM succesive și de a facilita egalizarea canalului la receptor. În practică, toate aceste operații se implementează prin procesare numerică de semnal, astfel încât ceea ce înțelegem prin simbol OFDM la acest nivel este de fapt o secvență de  $N+L$  numere complexe. Pentru a se obține semnalul ce corespunde modulației OFDM, este nevoie de conversia semnalului digital într-un semnal analogic (folosind un convertor numeric analogic și un formator de impulsuri). Semnalul analogic astfel obținut va fi la rândul lui translatat la frecvența radio de transmisie de către un convertor de radio frecvență.

Receptorul implementează operațiile complementare: semnalul este translatat în banda de bază și convertit în semnal digital. După înlăturarea prefixului circular se poate folosi un egalizor de canal (nereprezentat în figură). Dacă se fac câteva ipoteze simplificatoare (adeseori neacoperite însă în practică), și anume: canal estimat perfect, liniar și invariant în timp și durată a prefixului circular mai mare decât durata răspunsului la impuls al canalului, atunci acest egalizor de canal este unul foarte simplu, constând într-o multiplicare cu o constantă a semnalului recepționat pe fiecare subpurtătoare, care să compenseze coeficientul complex al răspunsului în frecvență al canalului [Olt'04]. Secvența astfel obținută este adusă la intrarea blocului Fast Fourier Transform (FFT) care joacă rolul de demodulator. Simbolurile complexe de ieșire sunt transformate în grupuri de biți în conformitate cu constelația de modulare folosită pe fiecare dintre subpurtătoare. În urma aplicării unui detector de prag rezultă valoarea biților codați, din care se extrag cei utili prin decodare.

### 1.2.2 Necesitatea transmisiei paralele multipurtătoare

Într-un mediu de comunicație radio-mobil, semnalul transmis se propagă pe un număr mare de trasee, care ajung la receptor cu întârzieri și energii diferite. Acest fenomen este cunoscut sub numele de propagare multicală și conduce la apariția interferenței inter-simbol (IIS) la recepție. Simplificând lucrurile (considerând canalul ca fiind un Sistem Liniar și Invariant în Timp), propagarea multicală produce același efect ca și un filtru electronic, care „împrăștie” în timp semnalul de la intrare (fenomenul fiind modelat matematic printr-o operație de convoluție) [Skl'97-1]. Efectele propagării multi-cale într-un canal radio pot fi descrise atât în domeniul frecvențial, cât și în cel temporal. În primul caz se folosește termenul de fading selectiv în frecvență, iar în al doilea caz se pune în evidență tocmai dispersia temporală a semnalului. Consecința practică a propagării multicală o constituie limitarea superioară a ratei de transmisie a semnalelor digitale prin canalul radio. Pentru a combate acest fenomen, caracterul selectiv al canalului se compensează prin implementarea unor procedee de egalizare complexe la nivelul receptorului [Skl'97-2]. Acestea se bazează pe estimarea și urmărirea în timp a comportamentului canalului și conduc la complexitate de calcul și dificultate de implementare crescute. De fapt, așa cum se va arăta printr-un exemplu numeric în cadrul acestei secțiuni, este important de menționat că fenomenul este cu atât mai pronunțat cu cât ratele de transmisie dorite sunt mai mari.

Pentru a ameliora problemele ridicate de către selectivitatea în frecvență a canalului, elementul de noutate pe care îl aduce conceptul de modulație multipurtătoare este înlocuirea transmisiei seriale pe o singură purtătoare, cu un debit înalt, cu mai multe transmisii paralele de debit redus. Generând  $N$  transmisii paralele, vom fi capabili să limităm lățimea de bandă a fiecărei transmisii cu factorul  $N$ , pentru că durata simbolurilor transmise pe fiecare purtătoare va crește la rândul ei de  $N$  ori. Suma ratelor de pe fiecare subcanal va conduce în final la rata de transmisie dorită, dar cu avantajul că selectivitatea frecvențială va afecta mult mai puțin fiecare subcanal în parte decât în cazul canalului unic de la transmisia serială. Două exemple (unul numeric și unul grafic) vor încerca să întărească această motivație. Să considerăm o transmisie de 10Mbps printr-un canal radio. În acest caz durata de transmisie a fiecărui bit în parte va fi inversa debitului, adică  $0.1 \mu\text{s}$ . Pe de altă parte, fenomenul de propagare multicală produce efecte de împrăștiere temporală a semnalului care sunt măsurabile și depind de topologia mediului considerat (forme de relief, clădiri, densitate de populație etc). Cu titlul de exemplu, să considerăm o împrăștiere de propagare multicală de cca.  $10 \mu\text{s}$ , valoare tipică pentru mediul urban. Rezultă că efectul produs de transmisia unui singur bit de informație va afecta semnalul (și implicit detecția la receptor) pe durata a 100 de biți



consecutivi. Dacă se consideră acum o transmisie OFDM pe 1024 subpurtătoare, atunci lățimea de bandă a fiecărui subcanal este de cca. 10 KHz, adică durata simbolurilor transmise pe fiecare subpurtătoare va fi de 100  $\mu$ s, de 10 ori mai mare decât împrăștierea de propagare multicanal. Dacă în primul caz comportarea canalului va avea efecte dramatice, dificil de combătut, în cel de-al doilea exemplu, doar o mică parte din fiecare simbol va fi interferată de către simboluri precedent transmise.

În exemplul grafic din figura 4, se ilustrează o transmisie paralelă pe 3 purtătoare, ale căror spectre se suprapun reciproc, dar pot fi totuși separate datorită ortogonalității, proprietate care va fi explicată mai târziu. Se observă durata mai mare a simbolurilor paralele transmise, așa cum s-a menționat în paragraful anterior.

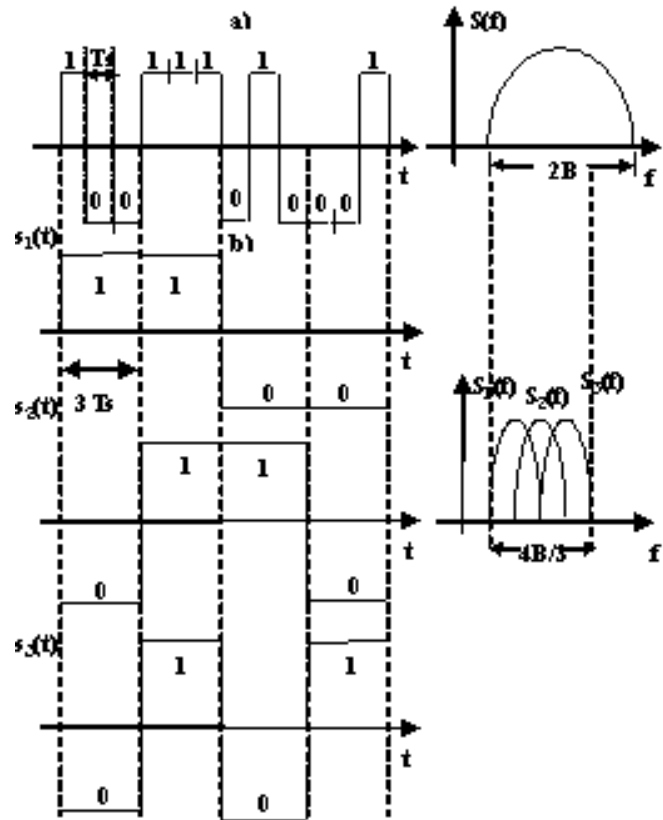


Fig.4: Principiul unei transmisii paralele multi-purtătoare.

### 1.2.3 Descrierea modulatorului OFDM

Așa cum rezultă din cele prezentate până acum, ideea de bază a modulației OFDM este transmisia simultană multi-purtătoare, pe mai multe subcanale de bandă relativ îngustă. Din punct de vedere matematic, fiecare purtătoare modulată poate fi descrisă ca fiind o exponențială complexă:

$$s_c(t) = A_c(t)e^{j[\omega_c t + \varphi_c(t)]} \quad (1)$$

Atât amplitudinea semnalului,  $A_c(t)$ , cât și faza acestuia,  $\varphi_c(t)$  pot varia în timp, după o lege dată de către forma semnalului modulator. Totuși, putem considera că acești parametri sunt constanți pe durata de transmisie a fiecărui simbol,  $T$ .

Într-o transmisie serială clasică se utilizează un singur semnal purtător. În consecință, dacă dorim să alegem o rată de transmisie egală cu  $R$ , atunci fiecare simbol de transmis va avea durată  $T_S = 1/R$ , timp în care valoarea amplitudinii și a fazei semnalului transmis în canal vor fi constante.

Pe de altă parte, modulația OFDM folosește pentru transmisie  $N$  subpurtătoare. În acest caz se vor transmite simultan  $N$  fluxuri, fiecare cu o rată de simbol  $R/N$ . Semnalul care este transmis în canal rezultă ca o sumă a tuturor acestor fluxuri, așa cum rezultă din ecuația (2):

$$s_s(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n(t) e^{j[\omega_n t + \varphi_n(t)]} \quad (2)$$

unde :

$$\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega \quad (3)$$

Relația precedentă ne arată că purtătoarele sunt spațiate între ele cu un interval notat  $\Delta\omega$ . Durata simbolurilor transmise pe fiecare purtătoare (timp în care putem considera amplitudinea  $A_n$  și faza  $\varphi_n$  ca fiind constante) este  $N/R$ , durată egală cu aceea a simbolului OFDM ( $T$ ). În acest caz, ecuația (2) poate fi reformulată după cum rezultă mai jos:

$$s_s(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{j(\omega_n t + \varphi_n)}, \text{ pentru } t \in [kT, (k+1)T] \quad (4)$$

Pentru că fiecare simbol OFDM înglobează informația corespunzătoare a  $N$  simboluri seriale consecutive, informație conținută în  $A_n$  și  $\varphi_n$ , este nevoie să eșantionăm cu frecvența  $1/T_S$  pentru a obține o versiune discretizată a simbolului. Rezultatul este generarea a  $N$  eșantioane pe durata  $T$  a unui simbol OFDM. Expresia eșantionului cu indexul  $k$  va fi:

$$s_s(kT_S) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{j[(\omega_0 + n\Delta\omega)kT_S + \varphi_n]}, k = 0, \dots, N-1 \quad (5)$$

Dacă simplificăm ipotezele considerând  $\omega_0 = 0$ , valoarea eșantionului devine :

$$s_s(kT_S) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Delta\omega kT_S}, k = 0, \dots, N-1 \quad (6)$$

În acest punct, relația 6 poate fi comparată cu expresia transformării Fourier rapide inverse:

$$g(kT_S) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT_S}\right) e^{jn2\pi k/N} \quad (7)$$

În ecuația (6)  $A_n e^{j\varphi_n}$  poate fi interpretat ca spectrul eșantionat (cu pasul frecvențial  $\Omega_0=1/T$ ) a unui semnal de intrare, ale cărui eșantioane în domeniul timp sunt  $s(kT_S)$ . Ecuațiile (6) și (7) sunt echivalente dacă:

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{NT_S} = \frac{1}{T} \quad (8)$$

#### 1.2.4 Legătura dintre tehnica OFDM și Transformarea Fourier Discretă

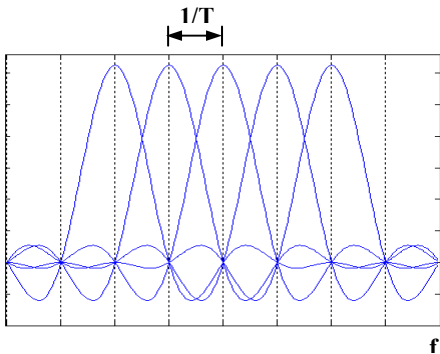


Fig. 5: Spectrul purtătoarelor folosite în OFDM.

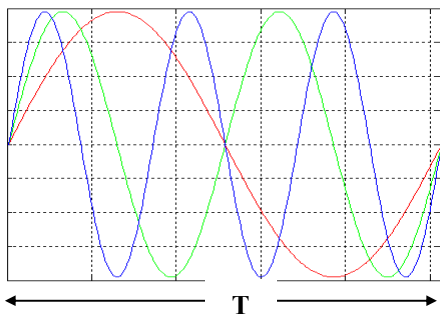


Fig.6: Subpurtătoarele ortogonale.

Ultima relație dedusă în paragraful precedent este similară celeia pe care o cere ortogonalitatea. Astfel, impunerea ortogonalității stabilește o legătură fericită cu transformarea Fourier discretă inversă, legătură care va fi studiată în profunzime în această secțiune. În acest caz, transformarea fiind inversabilă, recuperarea semnalului la demodulator poate fi făcută prin intermediul transformării directe, care permite implementarea demodulatorului OFDM.

Dacă se consideră, în cele ce urmează, că subpurtătoarele folosite în transmise sunt separate prin intervalul frecvențial indicat de relația 8, atunci spectrele acestor subpurtătoare sunt ilustrate în figura 5. Fiecare sinus cardinal din acest spectru corespunde unei purtătoare sinusoidale modulate cu un simbol de

informație reprezentat printr-un semnal dreptunghiular de durată egală cu aceea a unui simbol serial (de ex. ca în codarea de tip NRZ). Se poate remarca faptul că fiecare purtătoare trece prin 0 la frecvențele centrale corespunzătoare celorlalte subpurtătoare. La aceste frecvențe, interferența inter-purtătoare este nulă, fapt care permite separarea subpurtătoarelor la receptor. Situația este perfect identică aceleia descrise de teorema lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol, în care interferența se referă însă la domeniul timpului.

Forma subpurtătoarelor ortogonale sinusoidale este arătată în fig. 6. Se observă că pe durata de transmisie a unui simbol OFDM fiecare subpurtătoare parcurge un număr întreg de cicluri, condiție care derivă din ortogonalitatea necesară pentru subpurtătoare.

Dacă se consideră acum construcția receptorului, el poate fi privit ca un banc de corelatoare, care folosesc aceleași sinusoidale ca și acelea de la emisie. Semnalul recepționat (o sumă de sinusoidale ponderate cu valoarea simbolurilor de informație) este trecut prin acest banc de corelatoare. Pe fiecare ramură a corelatorului, o singură sinusoidă din semnalul recepționat va conduce la o corelație semnificativă, și anume acea sinusoidă care este similară (aceeași frecvență) cu cea folosită în corelator, toate celelalte producând un efect nesemnificativ. Din punct de vedere matematic, afirmația precedentă se bazează pe binecunoscuta proprietate conform căreia sinusoidalele aflate în raport armonic sunt ortogonale între ele:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \sin(mf_0t) \cdot \sin(nf_0t) \cdot dt = \begin{cases} T, & \text{daca } m = n \\ 0, & \text{daca } m \neq n \end{cases} \quad (9)$$

O reprezentare a etapelor demodulării este dată în figura 7. Astfel, în figura 7a) se reprezintă un simbol OFDM obținut modulând cu simboluri bipolare echiprobabile 20 de purtătoare cu frecvențe cuprinse între 510 și 700 KHz. Purtătoarele sunt separate printr-un interval  $\Delta f = 1/T = 10\text{KHz}$ , durata unui simbol fiind astfel de  $T=100\mu\text{s}$ . Pentru două dintre ieșirile multiplicatoarelor ce compun demodulatorul, rezultatul este afișat în figura 7b, corespunzând unui simbol transmis de +1, respectiv de -1. Semnalul astfel rezultat este integrat pe durata a  $100\mu\text{s}$ , corespunzătoare simbolului OFDM transmis. Evoluția în timp a semnalului de la ieșirea integratoarelor este ilustrată în figura 7c. În fiecare caz, corelația cu celelalte purtătoare (în afară de aceea corespunzând ramurii “curente”) nu contribuie semnificativ la semnalul de ieșire. În consecință, o operație simplă de eșantionare și comparare cu pragul ne conduce la luarea unei decizii corecte.

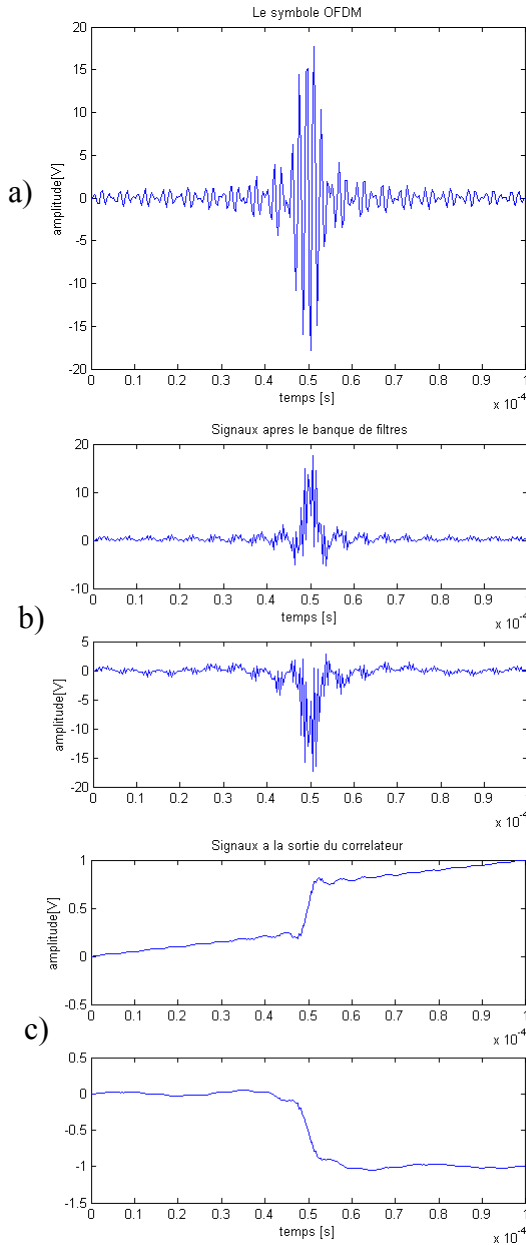


Fig.7: Simbolul OFDM (a), semnalul după multiplicatoare (b) și acela de la ieșirea integratoarelor (c).

Cel mai dificil obstacol presupus de demodulare îl constituie dificultatea de implementare practică bazată pe hardware a bancului de oscilatoare sinusoidale, care să genereze semnale ortogonale între ele și perfect sincronizate cu acelea de la emisie. Acesta este de fapt și motivul care a stat în calea dezvoltării expansive mai timpurii a tehnicilor multi-purtătoare. Soluția acestei probleme a fost găsită odată cu progresul și expansiunea tehnicilor de prelucrare numerică a semnalului. Mai concret, așa cum s-a arătat mai devreme, există legături evidente între strategia de modulare/demodulare din OFDM și tehnicile numerice de calcul a transformării Fourier discrete. Pentru a surprinde mai bine natura acestei legături, se va arunca în cele ce urmează o privire mai detaliată asupra Transformării Fourier Discrete Inverse. Mai precis, se va studia implementarea numerică a acestei transformate, ce presupune „eșantionarea frecvențială” a unui spectru care, prin natura sa, este continuu după variabila  $\Omega$ . Formula care descrie această transformare reprezintă o sumă de exponențiale complexe discrete. Suma poate fi descompusă în sinusoidale și cosinusoidale, ponderate de secvența complexă

$X[k]$  (vezi fig. 8). Rezultatul indicat în (10) este un semnal discret în timp, notat cu  $x[n]$ .

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left( \cos\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) + j \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) \right), \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (10)$$

Ceea ce este foarte important în relația (10) este că exponențialele complexe sunt ortogonale între ele și că separarea acestora în domeniul frecvenței discrete este  $\Delta\Omega = 2\pi/N$ . Acest ecart frecvențial exprimat pentru semnalul în timp discret  $x[n]$  poate fi echivalat cu acela al unui semnal în timp continuu  $x(t)$  (simbolul OFDM analogic) care a fost eșantionat cu pasul  $T_e = T_s$ . Această echivalare se poate face cu relația:

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\Omega/T_e}{2\pi} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T} \quad (11)$$

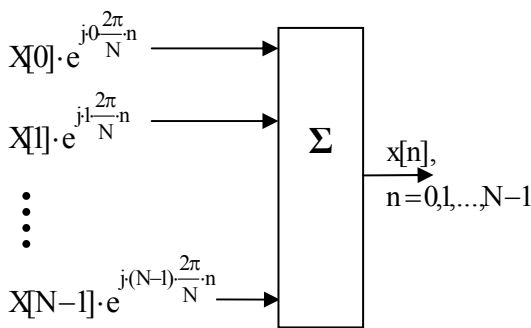


Fig.8: Implementarea modulatorului OFDM prin intermediul IFFT.

Schema ilustrată în figura 8 se bazează pe un algoritm clasic de sinteză: cele  $N$  eșantioane ale semnalului de ieșire  $x[n]$  sunt “sintetizate” din  $N$  sinusoidale și cosinusoidale de frecvențe  $k \frac{2\pi}{N}$ , ponderea fiecărei armonici fiind determinată de către simbolul modulator  $X[k]$ . Privind lucrurile prin prisma transformării Fourier inverse

implicate (algoritmul IFFT), eșantioanele de transmis pot fi interpretate ca fiind definite în domeniul frecvențial. Astfel, în forma cea mai simplă posibilă, transmisia unui bit de 1 sau 0 pe purtătoarea  $k$  se va regăsi prin prezența, respectiv absența purtătoarei în cauză din compoziția semnalului  $x[n]$ . Simplificând și mai mult lucrurile, dacă presupunem că într-un bloc de biți de transmis un singur bit este 1 iar toți ceilalți sunt 0, simbolul OFDM care rezultă va fi pur și simplu o exponențială complexă (adică o sinusoidă – partea imaginară și o cosinusoidă – partea reală) de frecvență dată de indexul bitului de 1 (adică de poziția acestuia în blocul de date).

Întrucât transformarea Fourier este inversabilă, receptorul se bazează pe aplicarea transformării directe asupra blocului de date recepționat. Astfel, semnalul în domeniul timp recepționat este demodulat prin trecerea sa printr-un bloc de „analiză” bazat pe transformarea Fourier Discretă implementată prin intermediul Fast Fourier Transform (FFT). Demodulatorul prelucrează cele  $N$  eșantioane temporale („observate” pe durata unui simbol sosit la recepție) și determină amplitudinea și faza cu care fiecare purtătoare contribuie la compoziția semnalului recepționat. Descrierea matematică a acestei operații este dată în relația (12).

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \cdot n \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left( \cos\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) - j \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

### 1.2.5 Utilizarea prefixului circular în OFDM

Așa cum rezultă din cele prezentate, tehnica OFDM transmite datele în blocuri, denumite uzual „simboluri OFDM”. Toate canalele utilizate în aplicații practice, fie că este vorba de canale dispersive cu fir, fie că avem de-a face cu canale radio, vor „împrăștia” în timp simbolurile OFDM, conducând la nivelul receptorului la apariția unei interferențe între două blocuri consecutive. Acest tip de interferență este denumit interferență inter-bloc sau interferență inter-simboluri OFDM și este ilustrată în figura 9.

Trebuie notat aici că, așa cum se prezintă în paragraful 1.2.2, transmisia paralelă multipurtătoare este, prin natura sa, rezistentă la interferența inter-simbol. Într-adevăr, cum se observă și din figura 9, doar o mică parte din simbolul  $i+1$  este afectată de către simbolul precedent transmis, cu indexul  $i$ . Acest lucru se întâmplă datorită duratei mari a simbolurilor OFDM, care face uz de transmisia paralelă pentru a atinge debitele înalte cerute de către aplicațiile moderne. Totuși, și această interferență care afectează doar începutul simbolului este supărătoare și trebuie eliminată. O abordare simplă pentru a contracara acest tip de interferență este utilizarea unei pauze („interval de liniște”) între două simboluri consecutive. Metoda este cunoscută în literatură și sub numele „zero

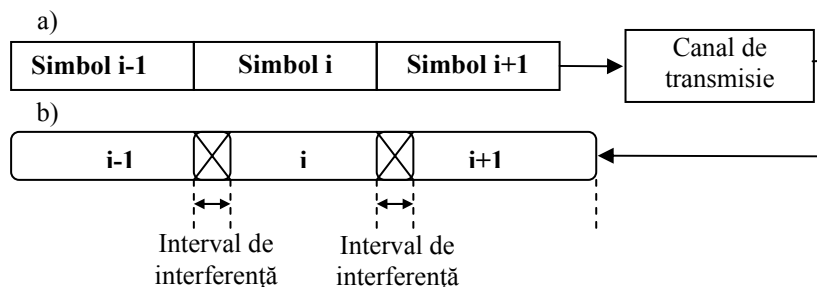


Fig.9: Transmisia unor blocuri succesive (a) și interferența la receptor (b)

padding” [Muq,Cou’00]. Dacă se consideră o transmisie printr-un canal liniar, și dacă perioada de liniște este suficient de mare, atunci efectul rezidual provenit de la simbolul precedent va fi „absorbit” de către acest interval de gardă. Eșantioanele provenite din efectul rezidual nu vor fi luate în calcul la demodulator, care „observă” mediul de transmisie doar pe durata simbolului util, ignorând semnalele sosite în perioada intervalului de gardă.

Totuși, deși facilă, utilizarea pauzei de transmisie între simboluri prezintă dezavantaje importante. Este vorba în primul rând despre faptul că lipsa semnalului în anumite porțiuni va duce la dificultăți de sincronizare la receptor. Această problemă este de exact aceeași natură cu aceea ridicată la codarea digitală a semnalului în banda de bază: perioade lungi de semnal neschimbat înseamnă dificultate de sincronizare. Prin urmare, din punctul de vedere al receptorului, este preferabil ca el să primească permanent semnal, pentru că aceasta îl ajută la stabilirea începutului și sfârșitului fiecărui simbol OFDM. O a doua problemă pe care perioada de pauză în transmisie ridică este aceea a egalizării. Într-adevăr, chiar dacă între două blocuri OFDM succesive nu vor mai exista interferențe, ele vor continua să existe în interiorul fiecărui bloc (între biții care compun un bloc OFDM). Dacă se consideră un canal liniar, atunci efectul său asupra semnalului transmis prin el poate fi modelat prin operația de convoluție. În cazul realist al unui canal neideal, eșantioanele recepționate la un moment de timp  $t_k$  nu vor fi identice cu acelea emise, ci vor putea fi calculate ca o sumă ponderată de eșantioane anterior emise, ponderile fiind date de coeficienții răspunsului la impuls al canalului. Acest tip de efect se combate de obicei printr-un procedeu care se numește egalizare. Folosirea pauzei de transmisie nu facilitează efectuarea egalizării, de aceea este nevoie de metode destul de complexe pentru a contracara interferența în interiorul blocurilor OFDM.

Alternativa a fost oferită de o idee simplă și ingenioasă: aceea a prefixului circular [Hen, Tau'02]. Astfel, fiecare simbol OFDM „original” va fi extins cu o anumită durată prin copierea ultimei porțiuni a simbolului la începutul acestuia. Aceasta nu doar facilitează sincronizarea, dar și conferă un aspect de periodicitate semnalului, care va fi folosit pentru simplificarea egalizării. Ideea de prefix circular este ilustrată în figura 10. Astfel, se consideră un exemplu simplu, de transmisie a două simboluri OFDM consecutive constituite din unde cosinoidale defazate între ele, printr-un canal radio cu două căi de propagare. Așa cum se observă (fig. 10a), la receptor semnalul ajunge nu doar pe calea directă ci și pe o cale întârziată (copia atenuată trasată cu roșu). Există, la începutul celui de-al doilea simbol, un interval pe durata căruia acesta este interferat de copia întârziată a precedentului simbol. În figura 10 b), simbolurile sunt extinse cu un prefix care are o durată egală cu un sfert din durata utilă a simbolului. Se observă că acest prefix circular este suficient pentru a absorbi propagarea multicale, evitându-se astfel interferența inter-bloc.



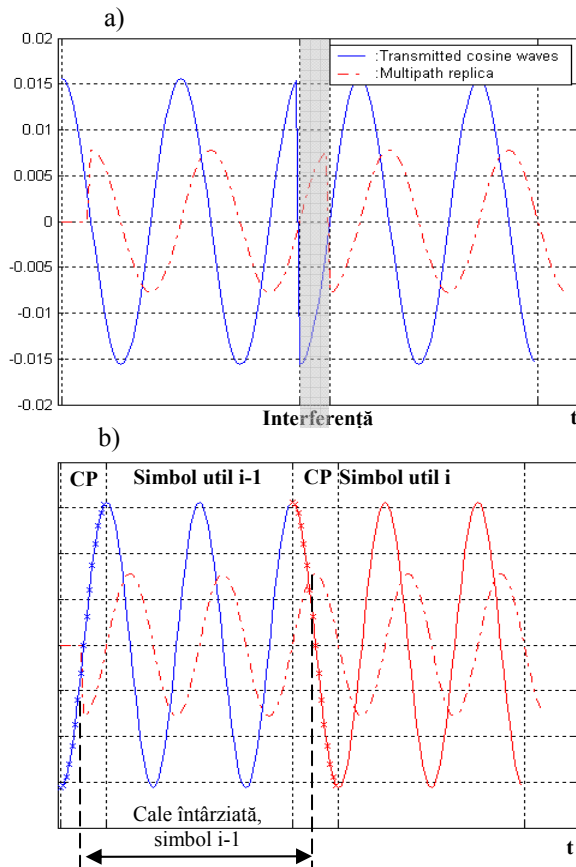


Fig. 10: Interferență inter-bloc din cauza propagării multicale(a), prefixul circular elimină această interferență (b).

ultimele  $L$  eșantioane compunând simbolul de transmis se copiază în fața acestuia, compunând prefixul circular. Vectorul de transmis devine astfel  $[x_{cp}] = (x_{N-L+1}, x_{N-L+2}, \dots, x_{N-1}, x_0, \dots, x_{N-1})$ . Aceste eșantioane sunt convertite în semnal analogic, care, la rândul său este translatat la frecvența radio de transmisie de către un convertor de radio frecvență. Dacă se consideră modelul discret echivalent al canalului ca fiind un filtru FIR de ordinul  $L$ , atunci răspunsul canalului în domeniul transformatei  $Z$  va fi:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n] \cdot z^{-n} \quad (13)$$

În cazul în care mediul de transmisie este cel radio, este cunoscut caracterul său variabil în timp, răspunsul la impuls al acestuia depinzând de momentul în care impulsul este aplicat. Pentru a simplifica demonstrația care urmează, se poate face totuși supoziția că răspunsul la impuls al canalului este constant pe durata transmisiei unui simbol OFDM. Această ipoteză este realistă pentru cazul acelor canale cunoscute în literatură sub numele de "canale cu fading plat" [Skl'97-1]. Pentru

În paragraful următor se va explica modul în care folosirea prefixului circular influențează procedura de egalizare a canalului.

### 1.2.5.1 Egalizarea canalului cu ajutorul prefixului circular

Să considerăm în cele ce urmează o secvență de date de transmis  $[X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-1}]$ , în care fiecare simbol  $X_k$  este un număr complex, obținut prin maparea biților inițiali pe constelația de modulație utilizată. Cele  $N$  simboluri din domeniul timp, corespunzătoare simbolului OFDM sunt calculate prin aplicarea Transformării Fourier Rapide Inverse, după cum ne indică relația 10. Informația este conținută în amplitudinea, respectiv faza simbolurilor complexe  $X_k$ . În continuare,

situația considerată, semnalul de la ieșirea canalului poate fi calculat folosind operatorul de convoluție:

$$y_{cp}[n] = x_{cp}[n] * h[n] \quad (14)$$

Suprimând cele  $L$  eșantioane ale prefixului circular, semnalul "util" (adică eșantioanele folosite în procedura de demodulare), semnalul obținut poate fi rescris sub forma:

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] \quad (15)$$

unde " $\circledast$ " este simbolul corespunzător operației de convoluție circulară (periodică). Relația (15) este extrem de importantă, deoarece convoluția circulară conservă suportul temporal al semnalului. În cazul nostru, cele  $N$  eșantioane ale semnalului transmis, trecute prin canal (convoluție cu răspunsul la impuls al canalului) vor genera la ieșirea canalului (după eliminarea prefixului circular) un bloc ("simbol OFDM") de aceeași lungime. Aceasta are drept rezultat posibilitatea de a separa, bloc-cu-bloc simbolurile OFDM recepționate, ele putând fi tratate independent de către demodulator.

Mai mult decât atât, și de o mai mare importanță, caracterul periodic al convoluției, asociat cu folosirea Transformatei Fourier Discrete facilitează egalizarea canalului. Acest procedeu este necesar deoarece, pentru orice canal real, se poate pune în evidență caracterul său selectiv în frecvență. Selectivitatea în frecvență înseamnă că diverse componente frecvențiale ale semnalului de intrare sunt afectate într-un mod diferit de canal, ceea ce conduce la distorsionarea semnalului sosit la recepție. Este adevărat că, datorită naturii transmisiei paralele multipurtătoare, acest fenomen se manifestă mult mai puțin supărător decât în cazul unei transmisii seriale clasice, dar el va continua să existe și să producă un oarecare nivel de distorsiune. Astfel, acest efect se poate aproxima printr-un coeficient complex de multiplicare al fiecărei purtătoare, coeficient determinat de amplificarea și defazajul pe care canalul le introduce pentru fiecare subpurtătoare în parte. Pentru a compensa acest lucru, este foarte utilă proprietatea de circularitate a convoluției, rezultată în urma inserării prefixului circular. Astfel, dacă se ține cont că  $x[n] = IDFT\{X[k]\}$  și că modulatorul implementează algoritmul invers (DFT), se va putea scrie:

$$Y[k] = DFT\{ IDFT\{X[k]\} \circledast h[n]\} \quad (16)$$

Proprietatea importantă aici este aceea că TFD aplicată unei convoluții circulare din domeniul timp conduce la multiplicare spectrelor semnalelor implicate.

$$Y[k] = DFT\{IDFT\{X[k]\}\} \cdot DFT\{h[n]\} = X[k] \cdot H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (17)$$

unde  $H[k]$  este versiunea eșantionată a răspunsului în frecvență al canalului, eșantioane prelevate în punctele  $\Omega_k = k(2\pi/N)$ . Semnificația relației precedente este că este posibilă recuperarea simbolurilor transmise  $X[k]$  la receptor, cu excepția unui coeficient de multiplicare caracteristic canalului, notat  $H[k]$ , și care diferă pentru valori  $k$  diferite. Astfel, egalizarea în domeniul frecvență constă într-o simplă înmulțire a semnalului recepționat, cu inversul răspunsului în frecvență al canalului, corespunzător fiecărei subpurtătoare în parte:

$$\hat{X}[k] = Y[k] \cdot H^{-1}[k], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (18)$$

Acest tip de egalizare se numește egalizare în domeniul frecvență, deoarece ea se aplică după "retranslatarea" semnalului din domeniul timp în domeniul frecvență, în urma aplicării TFD la demodulator. De aici rezultă unul dintre motivele pentru care se preferă folosirea prefixului circular în locul unei perioade de pauză între blocuri. Această din urmă soluție nu ar conduce, din punct de vedere matematic la o convoluție circulară, prin urmare relația (18) nu ar mai fi valabilă, și în consecință egalizarea ar fi mai complicată.

Evident că explicația precedentă privind egalizarea se bazează pe un model simplificat. Astfel, egalizarea este "perfectă" doar dacă se cunoaște cu exactitate răspunsul în frecvență al canalului. În practică acest lucru se întâmplă arareori și trebuie ținut cont și de faptul că, având un caracter variant, canalul își modifică comportamentul (și deci răspunsul în frecvență) de-a lungul timpului. Dificultatea aici este de a obține "în timp real" informații despre starea canalului, fapt ce implică metode elaborate de estimare și urmărire a acestui comportament.

Concluzia care poate fi trasă în urma celor prezentate este aceea că utilizarea unui prefix circular pentru transmisie (și suprimarea acestuia la recepție) elimină atât interferența inter-bloc (sau, echivalent, interferența între două simboluri OFDM) cât și interferența inter-canal, deoarece valoarea simbolului recepționat pe o purtătoare nu depinde decât de simbolul transmis pe purtătoarea respectivă și de coeficientul complex al canalului la acea frecvență. Și în privința acestei ultime afirmații, lucrurile trebuiesc nuanțate deoarece în canalele radio mobile se manifestă

fenomenul de deplasare Doppler, care poate conduce la pierderea ortogonalității purtătoarelor și drept consecință la apariția interferenței inter-canal.

Modelul matematic corespunzător transmisiei a  $M$  simboluri OFDM pe câte  $N$  subpurtătoare este descris de relația de mai jos:

$$x(t) = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_{l,k} \cdot e^{j2\pi f_k t} \cdot e^{j2\pi f_c t} \cdot p(t-lT) \quad (19)$$

unde  $X_k$  reprezintă simbolul de informație cu indexul  $k$  aparținând blocului OFDM cu indexul  $l$ ,  $f_c$  este frecvența semnalului purtător și  $f_k = f_0 + k\Delta f$  este frecvența subpurtătoarei cu indexul  $k$ .  $p(t)$  reprezintă funcția formatoare de impulsuri. Ea poate să fie, așa cum s-a mai discutat, una rectangulară, sau poate să corespundă unui filtru formator de impulsuri de tip Nyquist.

## CAP. II: TRANSMISIA MULTIPURTĂTOARE CU AJUTORUL UNDIȘOARELOR

### 2.1 Introducere

Aplicațiile teoriei funcțiilor wavelet ("undișoare") au devenit populare în ultimii ani în multe domenii specifice legate de prelucrarea semnalelor. Ne referim aici la algoritmi de "denoising" (termen introdus chiar în legătură cu folosirea funcțiilor wavelet), compresie, segmentare a semnalelor uni-dimensionale sau a diverselor tipuri de imagini (sonar, iris etc) sau clasificare. Recent, unele proprietăți specifice familiilor de funcții wavelet, cum ar fi ortogonalitatea membrilor acestor familii sau capacitatea lor de a împărți planul timp-frecvență într-o manieră flexibilă au fost folosite în contextul transmisiilor de date [Ahm'00]. Astfel, autorul din [Jon,Dil'01] a pus în evidență relația dintre undișoara mamă a lui Meyer și familia de filtre rădăcină din cosinus ridicat. În [Lau'03] se arată că familiile de funcții wavelet întrunesc întâiul criteriu a lui Nyquist de interferență nulă inter-simboluri într-un sistem de transmisie de date. Astfel, aceste undișoare pot fi folosite ca și formatoare de impulsuri, în locul filtrelor Nyquist clasice. Mai mult decât atât, lucrări ale ultimilor ani focalizate pe transmisiile multi-purtătoare [Olt,Naf'07, Rai'01, Kog,Kod'03, Lak,Nik'06] au pus în evidență faptul că unele dezavantaje ale tehnologiei OFDM pot fi contracarate folosind drept purtătoare funcții wavelet, în locul celor sinusoidale. Datorită faptului că aceste undișoare formează o familie ortogonală pe durata unui simbol de transmis, ele pot fi separate la recepție. În plus, față de purtătoarele sinusoidale din OFDM, undișoarele prezintă o serie de avantaje în ceea ce privește

complexitatea redusă a implementării, flexibilitate și eficiență spectrală [Olt,Naf'07]. Pe parcursul acestui capitol se vor analiza beneficiile pe care folosirea undișoarelor le poate aduce în diverse poziții ale unui lanț de transmisie. Ne vom referi aici la folosirea undișoarelor în locul filtrelor Nyquist, și, în contextul modulațiilor multi-purtătoare, la folosirea undișoarelor într-o transmisie multi-purtătoare bazată pe aceleași principii ca și OFDM.

## 2.2 O privire generală asupra funcțiilor wavelet

O abordare modernă a comunicațiilor de date privește canalul de transmisie ca fiind un plan timp-frecvență. În planul frecvență se poate identifica lățimea de bandă alocată unei transmisii, iar în planul timp modalitatea în care resursele de transmisie (temporale) sunt alocate pentru transmisie. În conformitate cu principiul de incertitudine al lui Heisenberg, aplicat în teoria semnalelor, niciun semnal nu poate fi perfect localizat atât în domeniul timp, cât și în domeniul frecvență [Naf,Gor'05]. În acest context, o undișoară mamă are capacitatea de a genera o familie ortonormală [Isa,Naf'98]. Această familie se obține prin translatarea și dilatarea unei undișoare mamă ("wavelets mother"). Pentru exemplificare este ilustrată undișoara mamă Symmlet la diverse scări (cu diverse grade de "dilatare") și cu diverse poziții pe axa timpului (fig. 11).

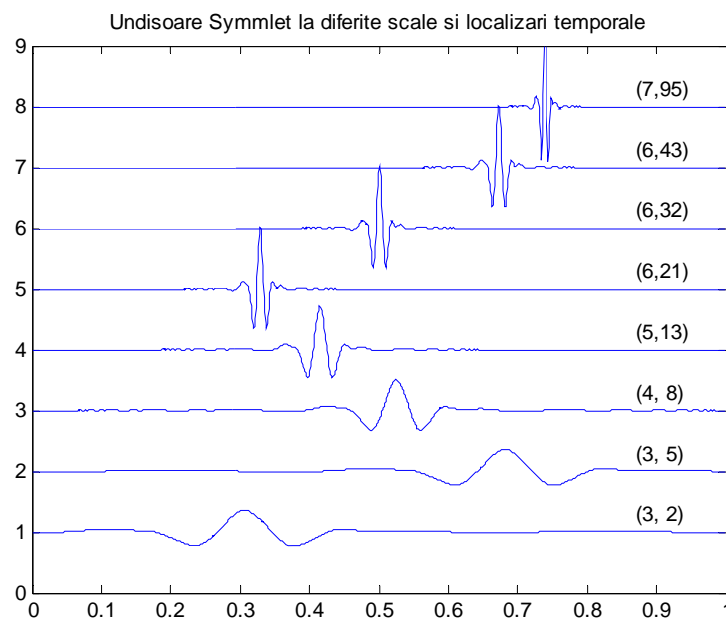


Fig.11: Undișoara mamă Symmlet la diverse scale și locații pe axa timpului.

Undișoarele din partea de jos a figurii corespund unei scări de decompoziție inferioare, ele fiind dilatate în timp, și deci mai concentrate în frecvență. Pe măsură ce se "urcă" în scală, undișoarele sunt din ce în ce mai concentrate în timp și deci cu un conținut frecvențial din ce în ce mai bogat.

Folosind o asemenea bază ortonormală, planul timp-frecvență poate fi partajat într-o manieră flexibilă. În figura 12c este ilustrată modalitatea în care "atomii" timp-frecvență sunt definiți cu ajutorul funcțiilor wavelet. Se face în același timp o comparație cu modul în care planul timp-frecvență este "partajat" prin intermediul altor abordări, devenite deja clasice, în teoria semnalelor.

În primul caz (figura 12a), planul timp-frecvență este descompus în benzi verticale, situație care ar corespunde eșantionării ideale a unui semnal. În acest caz, eșantioanele au o localizare perfectă în domeniul timp, dar fiecare eșantion în parte are un

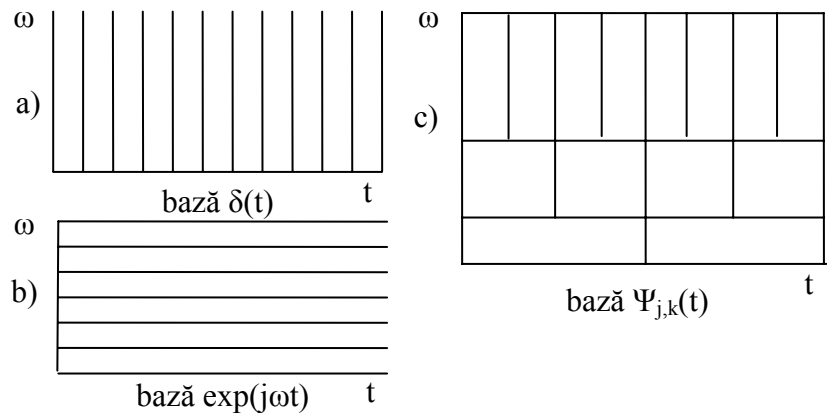


Fig. 12: Canalul de comunicație văzut ca un plan timp frecvență.

spectru de frecvențe infinit. Baza de descompunere folosită în acest caz este constituită dintr-o familie de impulsuri Dirac deplasate  $\{\delta(t - kT)\}$ . O analogie cu ceea ce se întâmplă în comunicațiile de date ne poate conduce la o asemănare cu furnizarea accesului multiplu cu diviziune în timp (TDMA): fiecărui utilizator  $i$  se alocă din totalitatea timpului de transmisie disponibil o anumită "fracțiune" (o bandă verticală a planului din fig. 12a). La polul opus (fig. 12b), avem familia de exponențiale complexe folosite în descompunerea în serie Fourier  $\{\exp(jk\omega_0 t)\}$ . Semnalele care compun această bază au o localizare frecvențială perfectă (un impuls Dirac pe axa frecvențelor), dar durata semnalelor se întinde pe întreaga perioadă de timp disponibilă. Figura 12b) ilustrează de fapt principiul accesului multiplu cu diviziune în frecvență (FDMA), în care, la un moment dat, mai mulți utilizatori pot transmite (recepționa) simultan, însă pe frecvențe diferite. Spre deosebire de cazurile amintite mai sus, undișoarele pot furniza o rezoluție temporală bună la frecvențele înalte, și o rezoluție frecvențială bună pentru frecvențele joase. Acest lucru este dezirabil pentru analiza semnalelor, deoarece frecvențele joase presupun o evoluție lentă a semnalului (deci nu se cere o acuratețe deosebită în domeniul timp), în timp ce acelea înalte se regăsesc în tranziții bruște în semnal, a căror "captare" este favorizată de o rezoluție temporală bună.

Aşa cum s-a discutat mai devreme, această modalitate de partajare a planului timp-frecvență poate fi obținută prin translatarea și scalarea pe axa timpului a unei funcții unice care se numește undișoară mamă,  $\psi(t)$ :

$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (20)$$

În relația de mai sus, variabilele de scară ( $s$ ) și cea de poziționare pe axa timpului ( $\tau$ ) sunt variabile continue. Dacă se discretizează aceste variabile, se poate obține o versiune discretă de undișoară mamă,  $\psi_{j,k}(t)$  (21). De remarcat aici că nu variabila timp este cea care conduce la versiunea discretizată a undișoarei, ci ceilalți doi parametri ai acesteia.

$$\Psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} \cdot t - k\tau_0) \quad (21)$$

Pentru a se obține versiunea discretizată a familiei de undișoare,  $\{\psi_{j,k}(t)\}$ , relațiile folosite au fost:  $s = s_0^j$  și  $\tau = ks_0^j \tau_0$ . O alegere des întâlnită pentru  $s_0$  este  $s_0=2$ , care conduce la undișoarele folosite în așa numita Transformare Wavelet Diadică (Dyadic Wavelet Transform). Dacă ne referim acum la un semnal în timp continuu  $x(t)$ , versiunea discretizată a transformării wavelet continue va fi:

$$DWT_x(j,k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \psi_{j,k}^*(t) \cdot dt \quad (22)$$

Relația de mai sus definește de fapt un produs scalar între semnalul  $x(t)$  și o funcție din familia  $\{\psi_{j,k}(t)\}$ . Ea se aseamănă cu relația ce permite calculul coeficienților Fourier ai unui semnal periodic. Acesta este motivul pentru care relația (22) este uneori denumită “Wavelet Series Transform” [Pol’01]. Daubechies [Dau’92] a arătat că pentru ca să existe o funcție undișoară  $\{\psi(t)\}$ , este nevoie să existe o altă funcție, denumită funcție de scară și notată cu  $\varphi(t)$ . Versiunile scalate ale acestei funcții sunt  $\varphi_j(t) = \varphi(2^{-j}t)$ . Orice funcție wavelet de la scara  $j$  poate fi generată ca și o combinație liniară a funcțiilor de scară de la scara  $j-1$ . De exemplu, o undișoară mamă de la scara 0 poate fi scrisă astfel:

$$\psi_0(t) = \sum_k a_k \varphi(2t - k) \quad (23)$$

Un asemenea exemplu, dat pentru undișoara Haar este ilustrat în figura 13. Se observă cum undișoara mamă este o sumare ponderată a două funcții de scară "comprimate".

### 2.3 Transformarea wavelet discretă

Pentru implementarea pe calculator a transformării

wavelet indicată în relația (22) există o serie de constrângeri specifice. Principala reticență manifestată față de versiunea continuă a transformării wavelet o constituie redundanța sa ridicată. Ca un exemplu concret, dacă dorim să aplicăm o transformare wavelet continuă în Matlab asupra unui semnal de intrare de  $N$  eșantioane, pe un număr de  $S$  scări, rezultatul final va fi o matrice de  $N \times S$  numere (coeficienți wavelet), ceea ce face această transformare dificil de aplicat în multe situații practice. Transformarea Wavelet Discretă (DWT), pe de altă parte, oferă suficientă informație pentru analiza, respectiv sinteza semnalelor, și, în contextul acestui referat poate fi folosită în procedura de modulația multi-purtătoare.

Termenul de transformare wavelet discretă este în strânsă legătură cu acela de analiză multi-rezoluție [Mal'99]. Ideea este aceeași care stă la baza transformării wavelet continue, respectiv obținerea unei reprezentări timp-scară a semnalului, de data aceasta însă folosind tehnici de filtrare digitală. În cazul transformării discrete este vorba de filtre cu diverse caracteristici care sunt folosite pentru a examina semnalul la diverse scări de decompoziție. Astfel, semnalul este trecut printr-o serie de filtre trece-sus, care permit analizarea frecvențelor înalte din semnal, și, pe de altă parte, printr-o serie de filtre trece-jos care permit analiza frecvențelor joase din semnal. Rezoluția semnalului (care este o măsură a nivelului de detaliu care poate fi observat în semnalul respectiv) este schimbată prin aceste operații de filtrare. Pe de altă parte, scara este modificată prin operații de sub-eșantionare (la analiză) respectiv supra-eșantionare (la sinteză). Subeșantionarea unui semnal

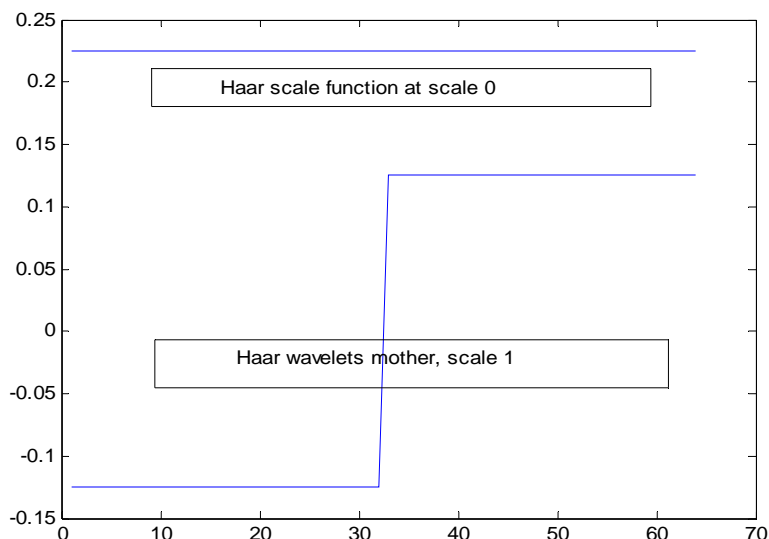


Fig. 13: Obținerea undișoarei mamă Haar din funcția de scară corespunzătoare.



corespunde reducerii ratei de eșantionare (coeficienții sunt localizați mai "rar" pe axa timpului) și se face prin înlăturarea unor eșantioane din semnalul de la o anumită rezoluție. Supraeșantionarea, pe de altă parte, corespunde creșterii ratei semnalului prin adăugarea unor eșantioane în acesta. Coeficienții DWT corespund unei eșantionări a transformării continue, eșantionare care se produce atât pentru variabila de scară cât și pentru cea de poziție, așa cum s-a arătat în secțiunea anterioară. Spre deosebire de ceea ce avem în relația (22), trebuie notat că într-o implementare pe calculator și semnalul de analizat va fi unul discretizat. Schema de implementare a DWT directe este ilustrată în figura 14, ea corespunzând implementării cu bancuri de filtre propusă de Mallat [Mal'99]. Procedura începe prin filtrarea semnalului cu ajutorul unui filtru digital trece-jos,  $g[n]$  care are lățimea de bandă  $\pi/2$ . Reamintim în acest context că frecvența maximă din spectrul unui semnal în timp discret este  $\pi$ , frecvență care ar corespunde jumătății frecvenței de eșantionare a unui semnal analogic. Dacă semnalul este de bandă limitată și eșantionarea respectă condițiile de reconstrucție, atunci întreg spectrul semnalului se va putea regăsi în banda  $[0, f_s/2]$ . Fitrarea efectuată corespunde efectuării unei operații de convoluție a semnalului cu răspunsul la impuls al acestui filtru. După trecerea semnalului prin filtru are loc o decimare a ieșirii filtrului cu factorul 2, care nu duce la o pierdere de informație semnificativă, deoarece în acest moment banda semnalului discret este de doar  $\pi/2$ , jumătate din banda originală. Scara semnalului este acum dublul celei originale, sau, în termeni mai

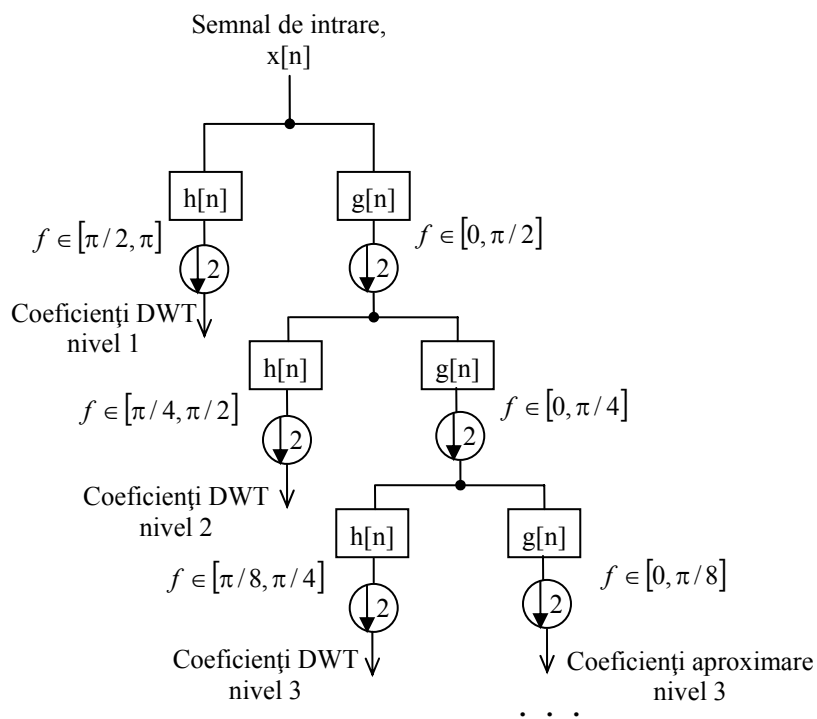


Fig. 14: Implementarea DWT folosind bancuri de filtre.

aproșiți de analiza multirezoluție, se poate spune că s-a obținut un anumit nivel de aproximare a semnalului.

De remarcat aici că filtrarea elimină doar conținutul de înaltă frecvență, fără a duce la o modificare propriu-zisă a scării, care este realizată prin procesul de subeșantionare (decimare). Pe de altă parte, rezoluția semnalului este legată de cantitatea de informație pe care aceste o conține și este prin urmare afectată de către operația de filtrare. Simplificând lucrurile,

se poate afirma că eliminându-se jumătate de bandă, s-a pierdut jumătate din informația pe care semnalul o conținea, deci că rezoluția s-a înjumătățit [Pol'01]. Pentru a avea o imagine completă trebuie notat că subeșantionarea nu diminuează rezoluția, deoarece operația anterioară de filtrare a condus la un semnal "supra-eșantionat", în care jumătate dintre eșantioane sunt redundante.

Procedura de filtrare și decimare poate fi exprimată de relația:

$$y[n] = \sum_k h[k]x[2n - k] \quad (23)$$

Odată acestea precizate, se va urmări în continuare, pas cu pas, modalitatea în care este calculată DWT. Trebuie ținut cont aici de faptul că DWT analizează semnalul în diverse benzi de frecvență cu diverse rezoluții, prin descompunerea acestuia în informație (coeficienți) de aproximare, respectiv de detaliu. În acest scop, DWT utilizează două seturi de funcții despre care s-a mai vorbit (funcții de scară și undișoare), care sunt asociate cu filtrele trece jos, respectiv trece sus. Răspunsurile la impuls ale acestor filtre sunt  $g[n]$ , respectiv  $h[n]$ . Descompunerea semnalului în diverse subbenzi este obținută prin aceste operații succesive de filtrare trece jos și trece sus, ilustrate în relațiile de mai jos:

$$\begin{aligned} y_{TS}[k] &= \sum_n x[n]h[2k - n] \\ y_{TJ}[k] &= \sum_n x[n]g[2k - n] \end{aligned} \quad (24)$$

La fiecare iterație, rezoluția temporală devine mai proastă, iar cea frecvențială mai bună, așa cum ne arată procedura deja comentată ilustrată din fig. 14.

O proprietate importantă a DWT este că răspunsurile la impuls ale filtrelor folosite nu sunt independente, ele fiind legate prin relația:

$$h[L - 1 - n] = (-1)^n g[n] \quad (25)$$

unde  $L$  reprezintă lungimea în eșantioane a răspunsului la impuls al filtrelor. Conversia de la caracteristica trece-jos la aceea trece-sus este furnizată de către factorul  $(-1)^n$ . Filtrele care satisfac relația (25) sunt denumite "filtre oglindite în cuadratură" (quadrature mirror filters).

Reconstrucția în acest caz este facilă, deoarece folosirea acestor filtre duce la formarea unor baze ortonormale. Astfel, fiecare semnal poate fi văzut ca o combinație liniară a componentei sale

trece-sus, respectiv trece-jos. La fiecare iterație a transformării inverse folosite în reconstrucție, semnalul este supraeșantionat și trecut prin filtrele de sinteză. Formula de reconstrucție, pentru fiecare nivel în parte este următoarea:

$$x[n] = \sum_k (y_{TS}[k]h[2k - n] + y_{TJ}[k]g[2k - n]) \quad (26)$$

O privire atentă asupra relației precedente ne arată că filtrele de reconstrucție folosite sunt asemănătoare celor de descompunere, fiind de fapt o versiune reflectată în timp a acestora:

$$\begin{aligned} h_l[n] &= h^*[-n] \\ g_l[n] &= g^*[-n] \end{aligned} \quad (27)$$

De notat aici că, date fiind operațiile de supra sau sub-eșantionare cu 2, o implementare facilă a transformării se poate face atunci când semnalul asupra căruia se aplică transformarea are un număr de eșantioane de  $2^m$ . În această situație se pot aplica maxim  $m$  iterații ale transformării, deoarece la fiecare nivel de descompunere numărul coeficienților obținuți este de două ori mai mic decât la scara precedentă, ajungându-se în situația ca, dacă numărul de iterații este maxim, la scara cea mai brută de aproximare să avem un singur coeficient.

Implementarea reconstrucției se exemplifică în figura 15, pentru 3 nivele de descompunere. Filtrele de reconstrucție sunt notate cu  $g_l$ , respectiv  $h_l$ .

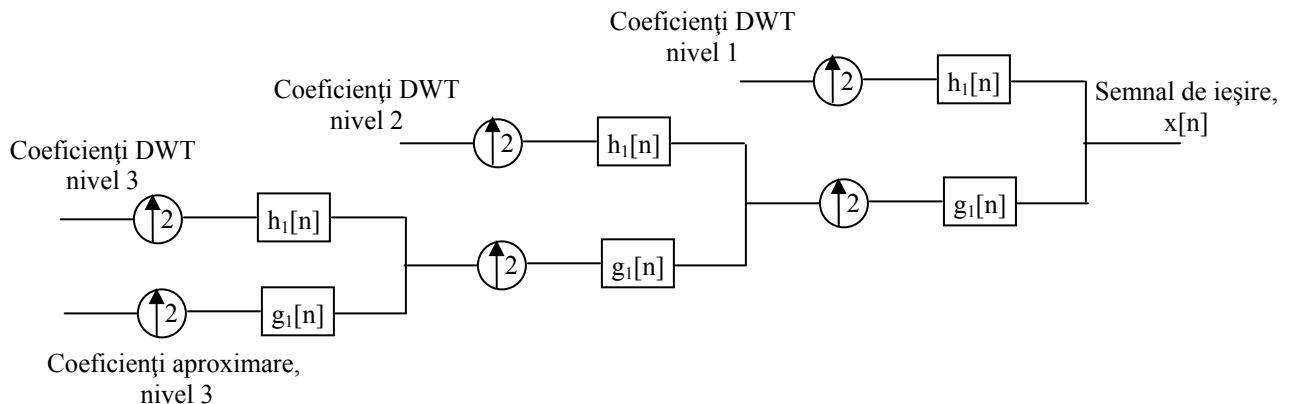


Fig. 15: Implementarea IDWT folosind bancuri de filtre.

Dacă filtrele trece jos și trece sus sunt ideale, atunci poate fi realizată reconstrucția exactă. Cu toate că nu este posibilă implementarea practică a unor filtre ideale, este posibil ca în anumite condiții să se definească filtre care să permită reconstrucția exactă a semnalului. Unele dintre cele mai cunoscute asemenea filtre au fost descoperite de către Ingrid Daubechies [Dau'92].

Interpretarea coeficienților rezultați în urma aplicării DWT poate fi uneori destul de dificilă. Vom insista însă asupra ei printr-un exemplu, datorită relevanței acestui aspect asupra subiectului principal al secțiunii curente, și anume transmisia de date cu ajutorul funcțiilor wavelet. Bazându-ne pe figurile 14 și 15, să presupunem că avem de-a face cu un semnal de 1024 eșantioane, eșantionat cu 10 MHz. Fiindcă este vorba despre această frecvență de eșantionare, cea mai mare frecvență a semnalului de analizat va fi aceea de 5 MHz. După prima iterație a transformării wavelet, se vor obține 512 eșantioane la ieșirea filtrului trece-sus, eșantioane denumite coeficienți wavelet la primul nivel. Ei reprezintă informația conținută în banda  $[2.5, 5]$  MHz. Pe de altă parte la ieșirea FTJ se obțin 512 coeficienți de aproximare, corespunzând benzii  $[0, 2.5]$  MHz, care sunt cei supuși în continuare descompunerii. Procedeu se repetă asupra acestor coeficienți, obținându-se detaliile la cea de-a doua iterație și coeficienți de aproximare, iar la cea de-a treia iterație vom obține finalmente un set de alți 128 coeficienți de detaliu, respectiv aproximare. Acești coeficienți de aproximare vor aparține benzii  $[0, 622.5]$  KHz. Rezultatul final al operației de descompunere va fi un vector de 1024 de coeficienți, concatenați astfel:  $\{a_3(128), d_3(128), d_2(256), d_1(512)\}$ . Se observă încă odată că DWT nu este redundantă, celor 1024 de eșantioane de intrare corepunzându-le 1024 de coeficienți de ieșire. Rămân valide considerațiile anterioare: la fiecare iterație se reduce numărul de eșantioane (deci scade rezoluția temporală), dar se și înjumătățește banda (deci se îmbunătățește rezoluția frecvențială). În acest fel se realizează partajarea planului timp-frecvență în "atomii" prezentați în fig. 12.

## 2.4 Criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol și funcțiile wavelet

Ca o paranteză la transmisia multi-purtătoare cu ajutorul funcțiilor wavelet, se va discuta în continuare despre folosirea undișoarelor ca și formatoare de impulsuri, în locul filtrelor clasice de tip Nyquist. Pentru a avea o înțelegere mai bună a problemei, se va face întâi o revedere a importanței pe care criteriul lui Nyquist o are în transmisiile de date. Se va pleca în acest demers de la o schemă simplificată a unui lanț de transmisie de date în banda de bază, reprezentat în figura 16.

Simbolurile de date de transmis, notate cu  $\{a_k\}$  sunt trecute printr-un modulator de impulsuri în amplitudine (PAM- Pulse Amplitude Modulator), obținându-se semnalul  $a(t)$ .

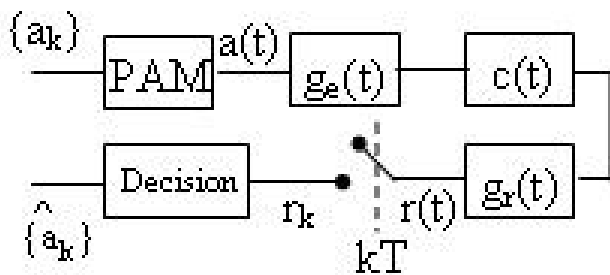


Fig. 16: Schema bloc a unui lanț de transmisie în banda de bază.

$$a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT) \quad (28)$$

Modulatorul de impulsuri în amplitudine este o construcție imaginară (nu poate fi implementat în practică), dar el este extrem de folositor pentru modelarea matematică a sistemului de transmisie, așa cum se va vedea. De notat că simbolurile transmise sunt separate pe axa

timpului cu intervalul  $T$ , denumit interval elementar alocat transmisiei unui simbol. Acest interval de timp poate fi considerat, din motive de simplitate, egal cu pasul de eșantionare folosit la receptor. Vom considera în continuare cazul cel mai simplu în care aceste simboluri vor fi secvențe bipolare echiprobabile de tipul  $\pm 1$ .

Semnalul  $a(t)$  este transmis printr-un canal cu răspunsul la impuls  $g(t)$ , care este un ansamblu format din filtrul de emisie, mediul de transmisie și filtrul de recepție. Răspunsul la impuls echivalent se poate calcula cu ajutorul convoluției:

$$g(t) = g_e(t) * c(t) * g_r(t) \quad (29)$$

Semnalul ajuns la receptor (înainte de eșantionare) va fi:

$$r(t) = a(t) * g(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \quad (30)$$

Receptorul eșantionează acest semnal cu pasul  $T$ , pentru efectuarea detecției simbolurilor transmise. Conform ecuației (30), valoarea celui de-al  $n$ -lea eșantion recepționat va fi:

$$r_n = r(nT) = \sum_k a_k g((n - k)T) = \dots + a_{n-1}g(T) + a_n g(0) + a_{n+1}g(-T) + \dots \quad (31)$$

După cum se observă din ecuația (31), semnalul ajuns la receptor este o sumă ponderată de răspunsuri la impuls ale canalului echivalent, ponderile fiind date de valoarea simbolurilor transmise.

Dintre toți termenii care compun  $r_n$ , unul singur este "util" din punct de vedere al receptorului, și anume acela care este determinat de transmisia simbolului corespondent la emisie, adică  $a_n$ . Toți ceilalți termeni sunt denumiți termeni de interferență inter-simbol (IIS), deoarece ei conduc la situația în care simboluri anterior sau ulterior emise contribuie la valoarea eșantionului curent. În practică (pentru sisteme cauzale) există doar termenii din stânga ai relației (31), până la acela care îl conține pe  $a_n$ . Pentru ca IIS să fie nulă, condiția necesară, descrisă de criteriul I a lui Nyquist [Pro'95] este:

$$g(nT) = \begin{cases} 1, & \text{daca } n = 0 \\ 0, & \text{daca } n \neq 0 \end{cases} \quad (32)$$

Condiția este una logică, pentru că, întrucât nu putem impune nici un fel de constrângeri asupra simbolurilor  $a_k$  transmise (care sunt aleator alese), singura modalitate este da a transfera această constrângere asupra răspunsului la impuls al canalului echivalent. Acesta poate fi controlat prin filtrele de emisie și de recepție, chiar dacă răspunsul la impuls al mediului fizic de transmisie este unul fixat. În practică procedura se numește egalizare.

Se poate observa că relația (32) condiționează răspunsul la impuls echivalent doar în punctele de eșantionare  $nT$ , și nu are nici într-un fel în vedere forma răspunsului  $g(t)$  în afara acelor puncte. Cu alte cuvinte, dacă în punctele  $nT$  răspunsul la impuls echivalent al canalului trece prin 0, atunci IIS va fi nulă, cu condiția ca eșantionarea la recepție să fie perfect sincronizată, adică să aibă loc exact în punctele  $t_n = nT$ .

Revenind acum la  $g(t)$ , reamintim că expresia lui este dată de filtrul de emisie, de mediul fizic de transmisie și de filtrul de recepție. Se consideră în cele ce urmează un canal ideal pentru transmisia de date, pentru care  $c(t) = \delta(t)$ . Filtrul de emisie  $g_e(t)$  va fi numit în contextul problemei filtru formator de impulsuri, iar cel de la recepție,  $g_r(t)$  filtru adaptat la forma semnalului. Ambele denumiri sunt justificate, deoarece filtrul formator de emisie este cel ce dă o anumită formă impulsurilor Dirac emise (cu referire la semnalul  $a(t)$ ), iar cel de recepție poate fi construit astfel încât să elimine pe cât posibil zgomotul introdus de către mediul de transmisie (considerat de obicei zgomot alb gaussian). Aceste denumiri sintetizează de fapt și cele două mari probleme cu care ne confruntăm în transmisiile digitale: interferența inter-simbol și zgomotul. În ipotezele făcute, filtrul adaptat la forma semnalului va avea răspunsul la impuls  $g_r(t) = g_e(T-t)$  [Pro'95], iar răspunsul echivalent al canalului va fi:

$$g(t) = g_e(t) * g_e(T-t) = \int_0^T g_e(\tau) \cdot g_e(t-T+\tau) d\tau = R_{g_e}(t+T) \quad (33)$$

Ținând cont de relațiile (32) și (33), criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol poate fi reformulat astfel:

$$R_{g_e}[n] = R_{g_e}(nT) = \delta[n] \quad (34)$$

În cele ce urmează se va furniza o demonstrație a faptului că orice funcție care generează baze ortonormale prin translație cu întregi întrunește primul criteriu a lui Nyquist. Rezultatul va fi particularizat pentru funcțiile de tip undișoară – mamă.

#### 2.4.1 Baze Riesz

O familie de funcții  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  compune o bază Riesz dacă și numai dacă există două numere întregi pozitive astfel încât:

$$A \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right|^2 dx \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \quad (35)$$

Condiția poate fi rescrisă astfel:

$$0 \leq A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(\xi + 2k\pi)|^2 \leq B \quad (36)$$

unde  $G(\xi)$  are forma unei transformate Fourier a lui  $g(x)$  [Mal'99]. Dacă se utilizează notația  $A(\xi) = |G(\xi)|^2$ , atunci termenul de mijloc din relația 36 poate fi rescris astfel:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(\xi + 2k\pi) \quad (37)$$

Termenul din dreapta din relația 37 poate fi privit ca și spectru al unui semnal  $a(x)$  eșantionat, pasul de eșantionare fiind egal cu 1. După cum se observă,  $A(\xi)$  are dimensiunea unei densități spectrale de putere și astfel, conform teoremei Wiener-Hinchin,  $a(x)$  poate fi privit ca și o funcție de intercorelație a lui  $g$ . Dacă se particularizează relația (36) pentru  $A=B=I$  [Mal'99], atunci familia  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  devine o bază ortonormală. În acest caz, relația (36) se va transforma în:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(\xi + 2k\pi)|^2 = I \quad (38)$$

Pentru că  $|G(\xi)|^2$  reprezintă spectrul funcției de autocorelație eșantionate a lui  $g(x)$ , aplicarea transformării Fourier inverse va conduce la o relație similară cu 34, referitoare la primul criteriu a lui Nyquist. Acest lucru permite o concluzie foarte importantă, și anume: orice funcție care generează baze ortonormale prin translație cu întregi satisface criteriul de interferență nulă a lui Nyquist. Observația anterioară are un grad mare de generalitate și deschide noi perspective asupra modului în care pot fi alese filtrele formatoare de impulsuri.

#### 2.4.2 Formarea impulsurilor cu ajutorul funcțiilor wavelet

O proprietate bine cunoscută a funcțiilor wavelet [Isa,Naf'98] este că ele pot genera baze ortogonale ale lui  $L^2(\mathfrak{R})$ . Pentru ca această proprietate să fie validă este nevoie ca familia  $\Psi_{j,k}(t)$  să satisfacă pe de o parte condiția de ortogonalitate, iar pe de altă parte aceea de a constitui o bază completă. Pentru această din urmă condiție este nevoie ca orice semnal din  $L^2(\mathfrak{R})$  să poată fi scris ca și combinație liniară a funcțiilor din familia de undișoare. În contextul problemei vizate, ne interesează mai cu seamă prima proprietate, care din punct de vedere matematic poate fi formulată ca și în relația de mai jos:

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{m,n} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{daca } j = m \text{ si } k = n \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad (39)$$

Ca și un caz particular, proprietatea este valabilă și dacă ne restrângem la o singură scară de descompunere (adică dacă  $j=m$  în ecuația 39). În această situație se poate afirma că familia ce se



obține prin translatarea în timp a undișoarei mamă  $\Psi(t)$  și anume  $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  reprezintă o familie ortonormală. În această situație, ținându-se cont de condiția (38), spectrul acestor funcții satisface relația:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Psi(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (40)$$

Dacă se înlocuiește în relația 33  $g_e$  cu  $\Psi$  și se ține cont de semnificația relației precedente, se poate concluziona că funcția de autocorelație eșantionată a lui  $\Psi(t)$  va conduce la un impuls Dirac, exact ca în relația (34):

$$R_{\Psi}[n] = R_{\Psi}(nT) = \delta[n] \quad (41)$$

Un exemplu grafic, generat cu ajutorul programului Matlab este dat în fig.17 pentru undișoara Daubechies-12 (care de fapt corespunde undișoarei Daubechies cu 6 momente nule):

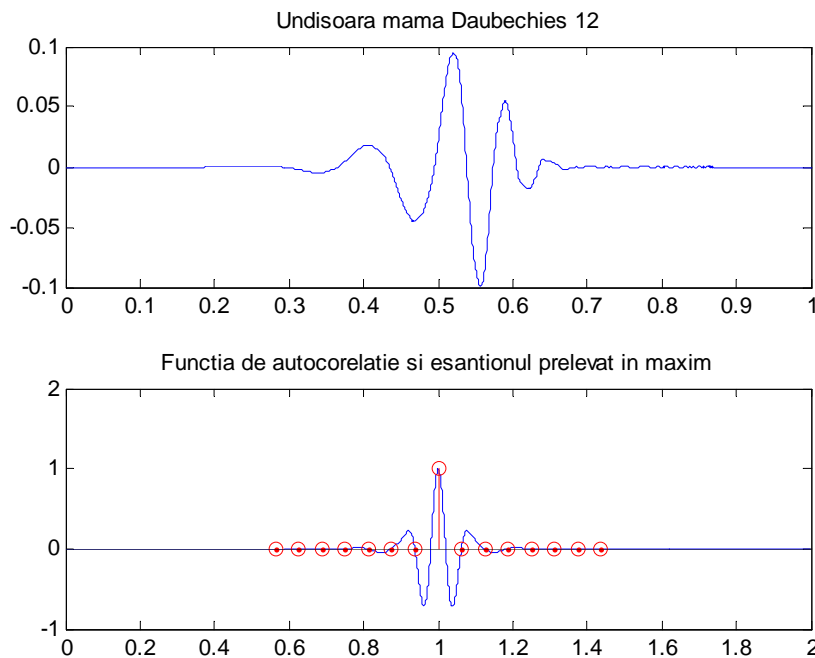


Fig.17: Eșantionarea funcției de autocorelație a unei undișoare mamă.

Această proprietate de ortogonalitate a unor versiuni traslate în timp generate de o funcție unică este specifică și funcțiilor de scară  $\varphi(x)$ , nu doar undișoarelor mamă. În consecință, în lanțul de transmisie ilustrat în figura 16, filtrul formator de impulsuri  $g_e(t)$  poate fi înlocuit prin  $\psi(t)$  sau  $\varphi(t)$ , iar receptorul poate utiliza filtrul adaptat:

$$g_r(t) = \psi(T - t) \quad (42)$$

## 2.5 Transmisia multipurtătoare cu ajutorul funcțiilor wavelet

Așa cum s-a discutat într-o secțiune anterioară, tehnica OFDM se bazează pe transmisia multipurtătoare: mai multe fluxuri de date sunt transmise în paralel, folosind subpurtătoare care sunt ortogonale între ele. Ortogonalitatea este esențială, deoarece ea este cea care permite separarea subpurtătoarelor la receptor. În cazul OFDM, condiția de ortogonalitate este cea indicată de relația (9), separarea subpurtătoarelor fiind ilustrată în figura 7. Această modulație este implementată în practică cu ajutorul algoritmului FFT, algoritm rapid de calcul a DFT.

Legătura dintre OFDM-ul clasic și acela bazat pe folosirea funcțiilor wavelet este dată de ortogonalitatea (în ambele cazuri) funcțiilor care vor fi folosite drept purtătoare. Condiția de ortogonalitate pentru familiile wavelet este dată în ecuația (39). Pentru a ne apropia de condițiile implicate de generarea pe calculator a undișoarelor, realizată în toolbox-ul Wavelab a programului Matlab, vom reformula definiția familiei de funcții wavelet dată de (21) astfel:

$$\psi_{j_m, k}(n) = 2^{j_m/2} \psi(2^{j_m} \cdot n - k \cdot 2^{-j_m} N) \quad (43)$$

Pentru conformitate, trebuie menționat că nu există în literatură referințe teoretice la familii de undișoare care să fie discrete după variabila timp, așa cum ne arată ecuația 43. În general, când se dorește calculul DWT sau al IDWT, se folosește algoritmul lui Mallat, prezentat în extenso în subcapitolul anterior. Acest algoritm nu folosește direct undișoare mamă și funcții de scară discrete, ci doar filtrele oglindite în cuadratură. Totuși, toolboxul Wavelab permite definiția, prin eșantioane, a unor undișoare mamă și funcții de scară, pentru care nu există expresii analitice. Cu scop pur explicativ, vom folosi aceste forme discretizate ale undișoarelor, și modalitățile aferente de generare a familiilor de undișoare și funcțiilor de scară, menționând că nu există demonstrații teoretice care să ne permită să stabilim o legătură între aceste undișoare discretizate și acelea continue în timp .

Astfel, în relația (42):

$N$ - numărul de eșantioane care compun undișoara, o putere întregă a lui 2

$j_m$ - factor de scară modificat. Sensul lui este invers celui dat de relația (21), deoarece, pe măsură ce  $j_m$  crește se obțin versiuni din ce în ce mai comprimate ale undișoarelor. Valoarea minimă a lui  $j_m$  este 0, reliefând rezoluția cea mai proastă în domeniul timp (și cea mai bună în frecvență), iar cea maximă este  $J=\log_2 N$ , corespunzând celei mai bune rezoluții în domeniul timp. Astfel, pe o scară a timpului normată la unitate, lățimea undișoarei va fi  $2^{j_m}$ . Legătura dintre indicele  $j_m$  și indicele  $j$  este  $j_m=J-j$ .

$n$ -indexul eșantionului generat, având valori între 0 și  $N-1$ .

$k$ - număr întreg, indicând localizarea temporală a undișoarei. Așa cum se vede, deplasarea se face în multipli de  $N/2^{j_m}$ .

Se ilustrează în continuare principiul modulării și demodulării wavelet cu ajutorul unui exemplu: se generează 4 simboluri alternante pentru a fi transmise folosind metoda Wavelet OFDM (WOFDM):  $\{+1,-1,+1,-1\}$ . Purtătoarele folosite sunt din familia Daubechies-10 cu o durată de 128 de eșantioane și se lucrează la scara  $j_m=2$ , adică factorul de "compresie temporală" a undișoarelor va fi 4. Simbolul obținut astfel, care se transmite prin canal, este arătat în figura 18. Ca și o coincidență, semnalul generat se aseamănă destul de mult cu o cosinoidă. În figura 19 se poate vedea cum acționează detectorul pentru a identifica simbolurile transmise: întâi multiplicare cu undișoara corespunzătoare, apoi integrarea semnalului pe durata de transmisie a unui simbol WOFDM. Acest mod de detecție corespunde

de fapt aplicării transformării wavelet directe descrisă în relația (22). Exemplul acesta este dat pentru o mai bună înțelegere a principiilor modulației WOFDM și a similitudinilor care există între principiile sale și acelea ale OFDM-ului clasic. În practică, atât implementarea modulatorului cât și a demodulatorului recurge la

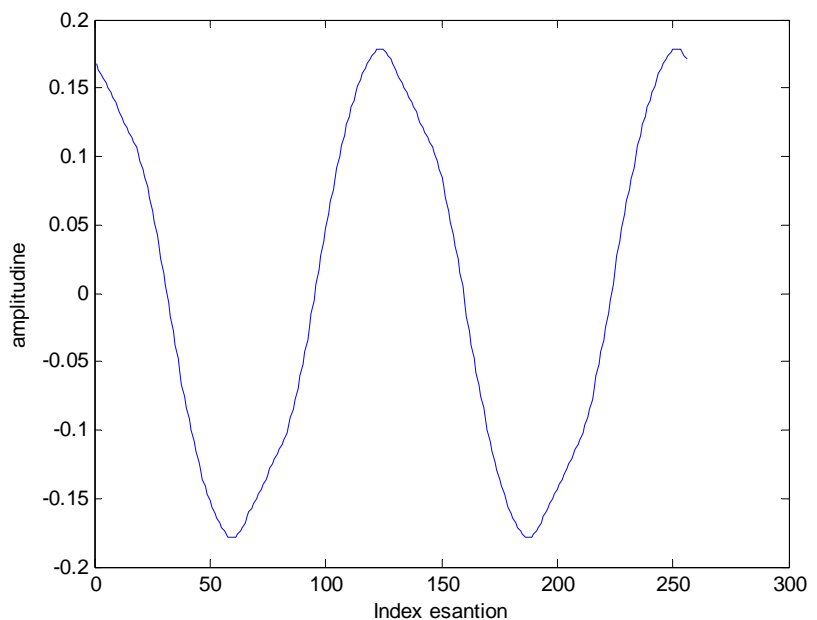


Fig. 18: Un simbol WOFDM.

bancuri de filtre, și nu la undișoare mamă sau funcții de scară.

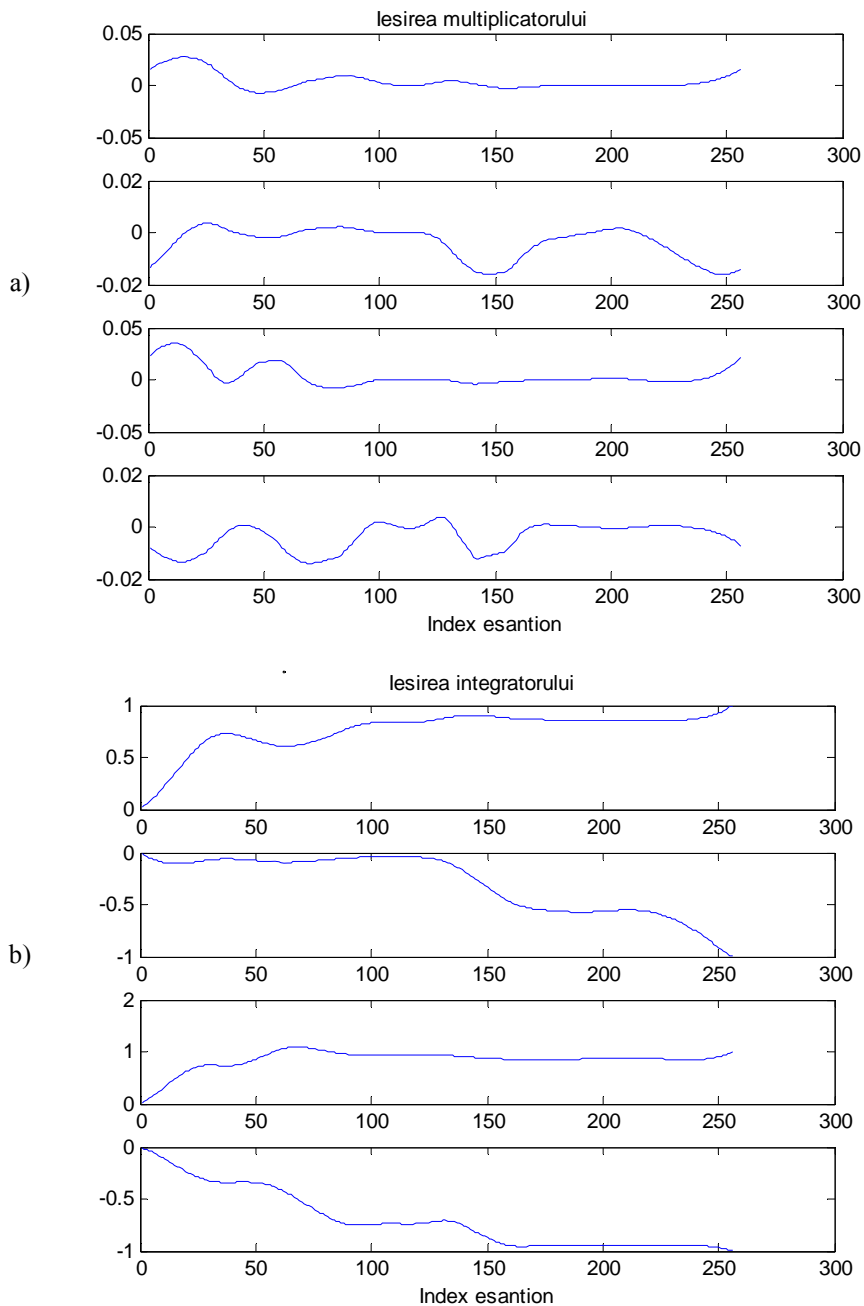


Fig.19: Demodularea simbolului WOFDM: ieșirea multiplicatorului (a) și a integratorului (b).

Se observă cum la ieșirea integratoarelor plasate pe ramurile (pe subpurtătoarele) pe care s-a transmis simbolul 1, semnalul are tendința de creștere, ajungând destul de rapid aproape de valoarea 1. Efectul este similar pentru ramurile 2 și 4, însă de data aceasta vom vorbi de valori negative. Eșantionarea va duce fără probleme la identificarea simbolurilor transmise.

Unul dintre punctele cheie ale modulației wavelet este că ea poate fi generată prin tehnici de procesare numerică de semnal, respectiv prin intermediul IDWT. În acest caz, semnalul injectat în

canal va fi "sintetizat" (exact ca în cazul OFDM) cu ajutorul unor coeficienți wavelet, respectiv de scară. Astfel, datele de transmis pot fi privite ca fiind definite într-un domeniu transformat, exact cum se întâmplă și la tehnica OFDM. Folsind teoria transformărilor ortonormale putem afirma că acești coeficienți se obțin cu ajutorul produsului scalar dintre un semnal și coeficienți wavelet de la scara  $j_m$  ( $w_{j_m,k} = \langle s(t), \Psi_{j_m,k}(t) \rangle$  ( $j_m=0, \dots, J$ ), respectiv funcții de scară de la nivelul cel mai brut de decompoziție  $j_m=0$ , adică:  $a_{0,k} = \langle s(t), \varphi_{0,k}(t) \rangle$ . Reamintim că semnificația indicelui de scară folosit în relațiile precedente este aceea dată în ecuația (42), fiind legată de implementarea pe calculator a transformării wavelet.

Pentru o mai bună înțelegere, vom da din nou un exemplu concret. Să presupunem că folosim undișoara Haar, și că semnalul  $s(t)$  generat va fi aproximat pe calculator printr-unul având  $N=16$  eșantioane. În acest caz vom avea  $J=4$  și vom fixa  $n_i=0$  (adică se va folosi și undișoara Haar de la scara de rezoluție cea mai proastă). În acest caz vom avea un coeficient wavelet ( $w_{0,1}$ ) și unul de aproximare ( $a_{0,1}$ ) pentru nivelul cel mai brut, doi coeficienți wavelet pentru  $j_m=1$  ( $w_{1,1}$  și  $w_{1,2}$ ), 4 coeficienți pentru  $j_m=2$  și 8 coeficienți pentru  $j_m=3$ . Coeficientul de aproximare va modula funcția de scară  $\varphi_0(t)$ , cel wavelet de la scara cea mai brută va modula undișoara  $\Psi_0(t)$  ș.a.m.d. Toate aceste forme de undă adunate vor da simbolul WOFDM. O ilustrare grafică este dată în fig.20 (pentru a se

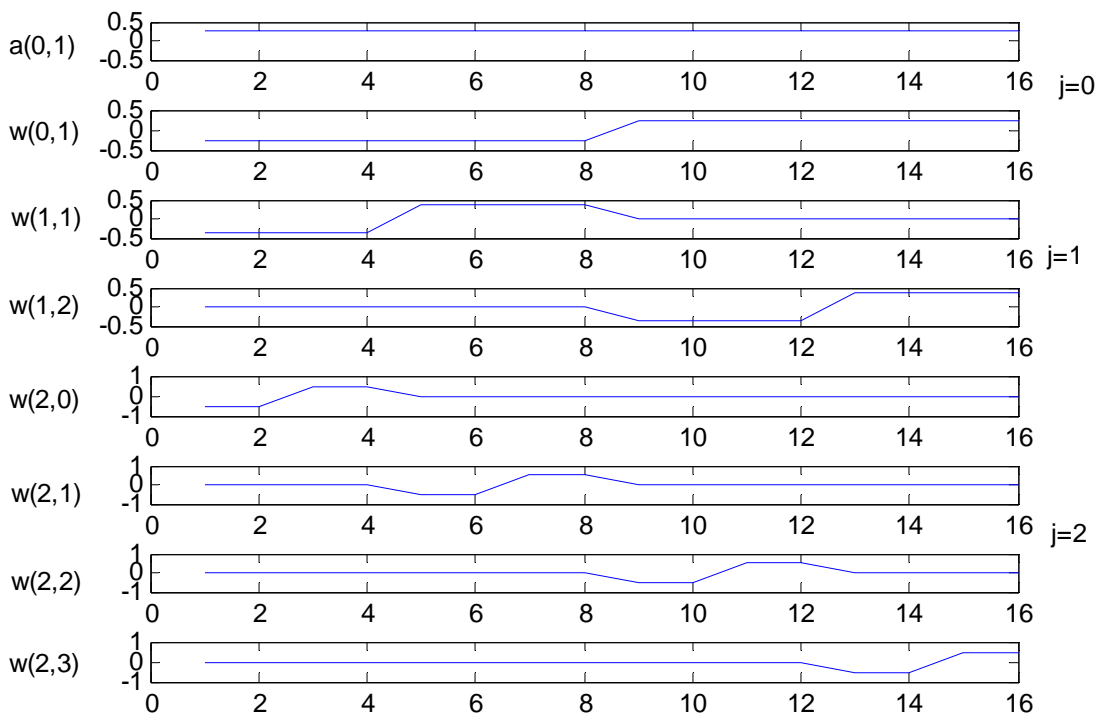


Fig. 20: Undișoarele de tip Haar folosite drept purtătoare în WOFDM.

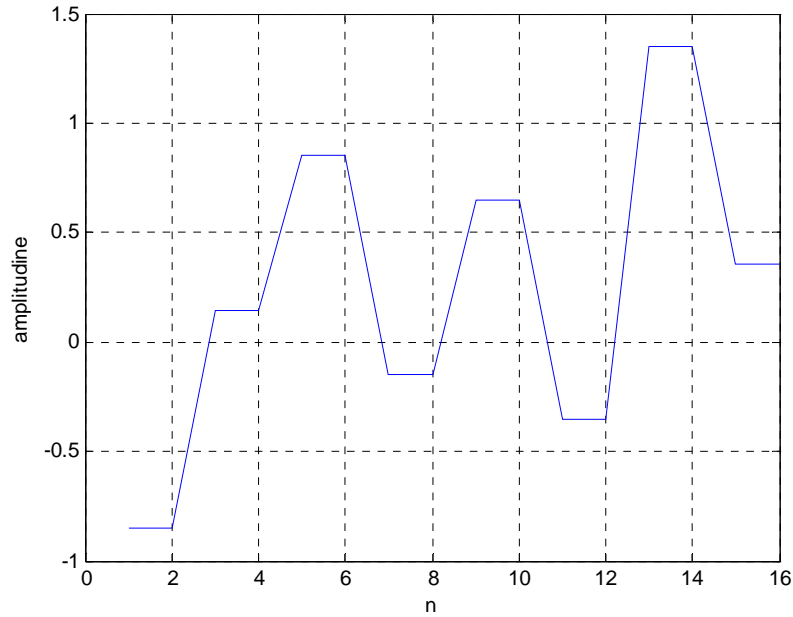


Fig. 21: Simbolul WOFDM obținut în urma modulației pe trei scări.

păstra o rezoluție acceptabilă a reprezentării, s-au arătat doar undișoarele pentru  $j_m=0,1$  și  $2$ ). La stânga figurii se poate vedea semnificația fiecărui simbol care modulează undișoara de la scara respectivă, semnificație explicată anterior. Pentru a avea o reprezentare completă a procedurii, undișoarele arătate în fig.20 vor fi modulate cu o secvență de 8 simboluri de +1, respectiv -1, aleator alese. Semnalul rezultat (de transmis în canal) este ilustrat în fig.21. Nici punerea în practică a modulatorului (ca și aceea a detectorului), nu necesită implementarea separată a pașilor menționați anterior (generarea undișoarelor la diverse scări atât la emisie cât și la recepție, modularea, sumarea). Aceasta deoarece, pe de o parte modulatorul se implementează implicit prin intermediul IDWT, iar demodulatorul prin intermediul algoritmului direct (DWT). Astfel, calculul IDWT la modulator, ținând cont de constrângerile impuse de implementarea pe calculator, conduce la următoarea "construcție" a semnalului:

$$s(t) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{2^{L-j+1}} w_{j,k} \Psi_{j,k}(t) + \sum_{k=1}^{2^{J-L}} a_{L,k} \Phi_{L,k}(t) \quad (43)$$

În relația (43)  $L$  reprezintă numărul de iterații pentru care este implementată transformarea (maxim  $J$ ). În acest caz, vectorul de date de intrare va fi  $[\{a_{L,k}\}, \{w_{L,k}\}, \{w_{L-1,k}\}, \dots, \{w_1, k\}]$ . Implementarea

este ilustrată în fig. 22. Blocul IDWT realizează operațiile de filtrare și supraeșantionare, descrise în capitolul 2.3, iar ieșirea va fi un semnal discret cu  $2^J$  eșantioane.

Toate detaliile anterioare legate de implementarea tehnicii WOFDM ne indică similaritățile conceptuale și practice cu OFDM-ul clasic. În consecință, modulația wavelet poate fi implementată folosind o schemă bloc asemănătoare cu OFDM, schemă prezentată în fig. 23:

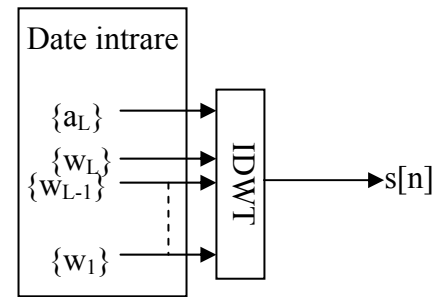


Fig. 22: Implementarea WOFDM cu ajutorul IDWT.

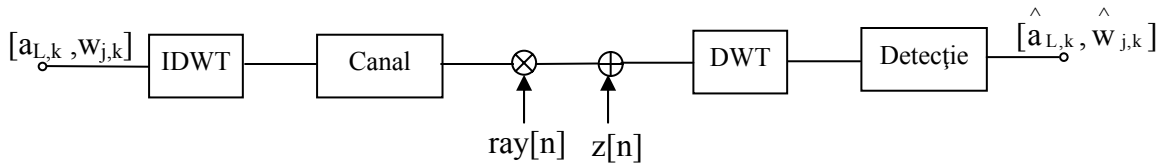


Fig. 23: Simularea transmisiei WOFDM.

De remarcat interpretarea datelor de intrare, văzute ca și coeficienți wavelet de date, respectiv de aproximare. De fapt, este vorba despre datele care trebuie transmise, care corespund schemei de modulare (constelației de semnal) folosite. Dacă este vorba despre modulații în cuadratură (QPSK, 16 QAM etc.), atunci simbolurilor de transmis le vor corespunde numere complexe (a se vedea explicațiile date la OFDM) și în acest caz, trebuie lucrat pe două ramuri (una corepunzând componentei în fază, iar cealaltă componentei în cuadratură). Aceasta, deoarece spre deosebire de DFT, DWT este o transformare reală, și, în principiu, la intrarea blocului DWT ar trebui aduse numere reale, și nu complexe.

Blocul denumit "canal" în schema din figură implementează o funcție de transfer ( $H(z)$ ). În cazul cel mai simplu,  $H(z)=1$ , răspuns care nu influențează semnalul ce trece prin acest bloc. În acest caz, influența mediului de transmisie este determinată de două tipuri de zgomote. Secvența  $z[n]$  corespunde în general situației unui zgomot alb, gaussian și de medie nulă. Secvența  $ray[n]$  este distribuită Rayleigh, și prin intermediul ei se simulează fenomenul de propagare multi-cale și variabilitatea în timp a canalului. În cazul în care  $H(z)$  este diferit de 1, atunci se poate surprinde și caracterul selectiv în frecvență al mediului de transmisie folosit.

## CAP. III: O COMPARAȚIE EXPERIMENTALĂ ÎNTRE OFDM ȘI WOFDM

Accesul ortogonal multiplu cu divizune de frecvență (OFDM) cunoaște o mare expansiune, fiind folosit actualmente într-un mare număr de tehnici de transmisie cu și fără fir, bazate pe standarde sau soluții-proprietar. Aceasta se întâmplă datorită avantajelor sale de necontestat, dintre care le reamintim pe cele mai importante: rezistență mare la fenomenul de interferență inter-simbol (datorită duratei mari a simbolurilor transmise), implementare fiabilă și puțin costisitoare bazată pe tehnici de prelucrare numerică de semnal (FFT), precum și facilitarea egalizării canalului prin utilizarea unui prefix circular. În pofida succesului său actual, tehnica OFDM prezintă totuși și o serie de dezavantaje, care rămân chestiuni încă deschise discuției și cercetării științifice, care ar permite ameliorarea aspectelor mai puțin favorabile din OFDM. Pentru a răspunde la întrebarea firească "De ce ar mai fi nevoie de o altă formă de modulație multi-purtătoare?" și a deschide o punte înspre modulația bazată pe funcții wavelet, se vor prezenta pe scurt în secțiunea următoare cele mai importante "puncte slabe" ale modulației OFDM.

### 3.1 Dezavantajele principale ale tehnicii OFDM

Vom începe aici cu problema sincronizării. Astfel, tehnica OFDM se dovedește a fi foarte sensibilă la erorile de sincronizare în timp și frecvență, care pot să apară la receptor față de emițător. Pentru a avea o vedere cât mai elocventă asupra acestor probleme, ele vor fi ilustrate prin exemple concrete (de calcul și grafice).

Să începem cu desincronizările în domeniul timp. Practic, o desincronizare în timp înseamnă că receptorul "se înșală" asupra începutului simbolului OFDM, și "citește" acest simbol cu un anumit decalaj. Dacă ne gândim acum la transmisia unui singur simbol OFDM, corespunzând șirului de date  $X[k]$ , fiecare punct de date aparținând unei constelații de semnal de tip QAM, expresia acestui simbol transmis va fi:

$$x_t(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{jk \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot t} = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]| \cdot e^{j\varphi[k]} e^{jk \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot t}, \quad t \in [0, T_{OFDM}], k = 0, \dots, N-1 \quad (44)$$

În relația de mai sus,  $\Delta f$  reprezintă separarea frecvențială dintre două frecvențe purtătoare folosite. După cum se observă, informația este conținută în modulul și faza simbolului complex transmis,  $X[k]$ . Ignorând întârzierea de propagare a semnalului dintre emițător și receptor, zgomotul din canal



precum și fenomenul de propagare multicale, vom considera că receptorul are o eroare de sincronizare temporală  $\delta_t$  față de emițător. Adică, receptorul va începe să "citească" cu  $\delta_t$  secunde mai târziu decât ar trebui acest simbol OFDM. În această situație, semnalul recepționat corespunzător simbolului OFDM transmis va fi:

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]| \cdot e^{j\varphi[k]} e^{jk \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot (t - \delta_t)} = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]| \cdot e^{j(\varphi[k] - \delta_t)} e^{jk \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot t}, \quad t \in [0, T_{OFDM}], k = 0, \dots, N - 1 \quad (45)$$

După cum se observă, această eroare are drept consecință eronarea fazei fiecărui simbol detectat cu cantitatea  $2\pi\delta_t$ , ceea ce poate conduce la interpretarea greșită a unui mare număr de simboluri  $X[k]$  transmise [Kab'03]. Situația este ilustrată grafic pentru o modulație QPSK în figura 24.

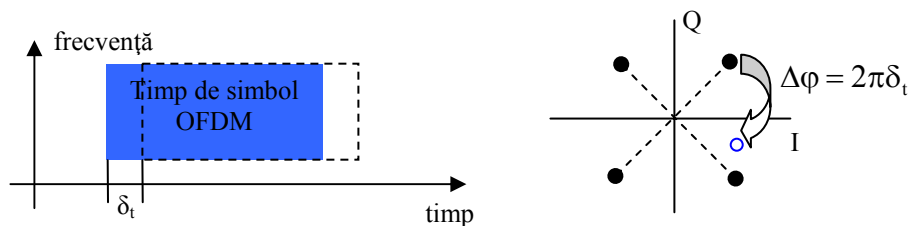


Fig. 24: Desincronizarea în timp și eroarea de detecție care apare din pricina acesteia.

Un al doilea tip de desincronizare este aceea în frecvență. Termenul folosit aici ar putea fi mai degrabă "deplasare frecvențială" decât "desincronizare". În această situație, purtătoarele folosite își pierd ortogonalitatea, conducând la fenomenul de interferență inter-purtătoare, sau interferență intercanal. Cauza principală a acestei deplasări o constituie fenomenul Doppler, care apare din pricina variabilității în timp a canalului radio. O ilustrare grafică a acestui tip de interferență este dată în fig. 25.

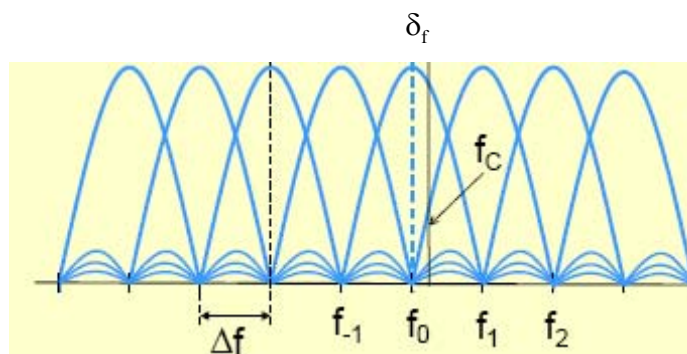


Fig.25: Deplasarea de frecvență.

Se ilustrează în figura 25 ce se întâmplă dacă subpurătoarea aflată inițial la frecvența  $f_0$  se deplasează pe axa frecvențelor cu cantitatea  $\delta_f$ . Se observă că în acest caz, nu mai este satisfăcută proprietatea de ortogonalitate, ceea ce pe grafic se regăsește prin aceea că la frecvența centrală a subpurătoareii curente ( $f_0$  în exemplul nostru), celelalte subpurătoare au valori nule (nu trec prin 0 la  $f_0 + \delta_f$ ). Fenomenul este cu atât mai nociv cu cât numărul de subpurătoare folosite în transmisie va fi mai mare. Astfel, la o lățime de bandă dată, dublând numărul de subpurătoare, se înjumătățește spațierea frecvențială dintr ele ( $\Delta f$ ), și deci deplasarea frecvenței  $f_0$  va avea un efect interferator mai pronunțat. Pentru un exemplu numeric concret, să spunem că în sistemul WiMAX, pentru 512 subpurătoare folosite la o lățime de bandă de 5MHz, separarea frecvențială a subpurătoarelor va fi de cca. 10KHz. Dacă facem ipoteza că viteza de deplasare dintre emițător și receptor este de 100 km/h și că frecvența purătoare folosită în transmisie este de 3.5GHz, atunci deplasarea Doppler va fi de 324Hz, ceea ce înseamnă relativ la spațierea purătoarelor o eroare de peste 3%.

O altă problemă a modulației OFDM o reprezintă variabilitatea pronunțată a anvelopei sale [Dar,Tra'00, Kab'03], care rezultă într-un raport putere de vârf/ putere medie ridicat. Pentru acest parametru se folosește adesea prescurtarea din limba engleză (PAPR=Peak to Average Power Ratio) PAPR se definește din punct de vedere matematic ca:

$$PAPR_x = \frac{P_{var f}}{P_{medie}} = \frac{|\max(x(t))|^2}{(RMS(x(t)))^2} \quad (46)$$

unde *RMS* este prescurtarea de la Root Mean Square, având semnificația unei valori efective a semnalului. Acest lucru îngreunează sarcina amplificatoarelor de putere folosite, care pot introduce efecte de neliniaritate. În figura 26 este dat un exemplu pentru o transmisie OFDM cu 8 purătoare, simbolurile modulatorie corepunzând unei modulații BPSK. Pentru exemplul din figură, s-a obținut o valoare PAPR de 6.77:1, ceea ce în decibeli înseamnă 8.3 dB. Pentru a avea un grad de comparație, să notăm că această valoare este aproape egală cu valoarea PAPR pentru modulația 128-QAM și este cu 5dB mai mare decât aceea a unei transmisii BPSK pe o singură purătoare (care nu folosește OFDM). Situația este explicabilă la nivel intuitiv prin aceea că semnalul OFDM este obținut prin sumarea unui mare număr de sinusoides (în practică de ordinul sutelor) care sunt ortogonale între ele și care sunt "controlate" ca și amplitudine și fază inițială de către simbolurile de transmis (corespunzător constelației utilizate). Exemplul dat în figura 26 este simplificat din cel

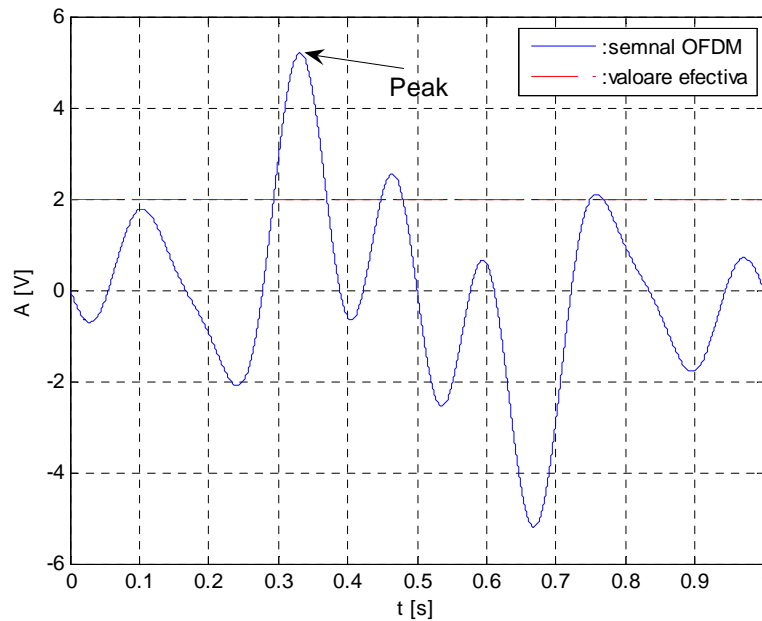


Fig. 26: Ilustrarea parametrului PAPR pentru o modulație OFDM.

puțin două motive: s-au folosit doar 8 purtătoare, și modulația folosită a fost BPSK. Pentru alți parametri, valoarea PAPR (și așa mare) ar putea crește semnificativ.

Un alt dezavantaj al modulării OFDM este, dintr-un anumit punct de vedere, folosirea prefixului circular. Într-adevăr, în practică, asociem întotdeauna transmisia OFDM cu această noțiune de prefix circular. Dacă el ușurează egalizarea și permite separarea blocurilor la receptor (fiecare simbol OFDM putând astfel fi tratat ca un bloc independent, așa cum s-a discutat în cap. 1), prefixul are și un efect negativ evident. Astfel, el introduce o redundanță în informația transmisă. Întrucât datele de transmise se interpretează ca fiind definite în domeniul frecvență, putem spune că prefixul circular consumă în mod ineficient o anumită lățime de bandă. Cu cât fenomenul de propagare multicale este mai pronunțat, cu atât durata prefixului trebuie să fie mai mare, pentru a "absorbi" copiile semnalului ce ajung la receptor cu întârziere [Olt,Naf'03]. Durata prefixului circular este prin urmare un parametru care rezultă în urma planificării radio, și ea trebuie adaptată condițiilor concrete care țin de mediul de propagare. Valorile propuse de standardul IEEE 802.16 pentru WiMAX sunt alese din mulțimea  $\{1/4, 1/8, 1/16, 1/32\}$  [IEEE'04]. Valorile indicate se referă la durata prefixului circular ( $T_g$ ) raportată la durata simbolului util ( $T$ ) (vezi fig. 27):

$$G = \frac{T_g}{T} \quad (47)$$

Introducerea prefixului circular în simbolul transmis poate fi făcută în două moduri: se păstrează durata totală a simbolului egală cu aceea când nu s-ar fi folosit prefixul circular (se "apropie" eșantioanele în timp, ceea ce corespunde creșterii frecvenței de eșantionare), sau, păstrându-se aceeași frecvență de eșantionare, se adaugă prefixul circular la începutul simbolului, ceea ce conduce la creșterea duratei totale a simbolului transmis. Ambele situații diminuează corespunzător eficiența transmisiei.

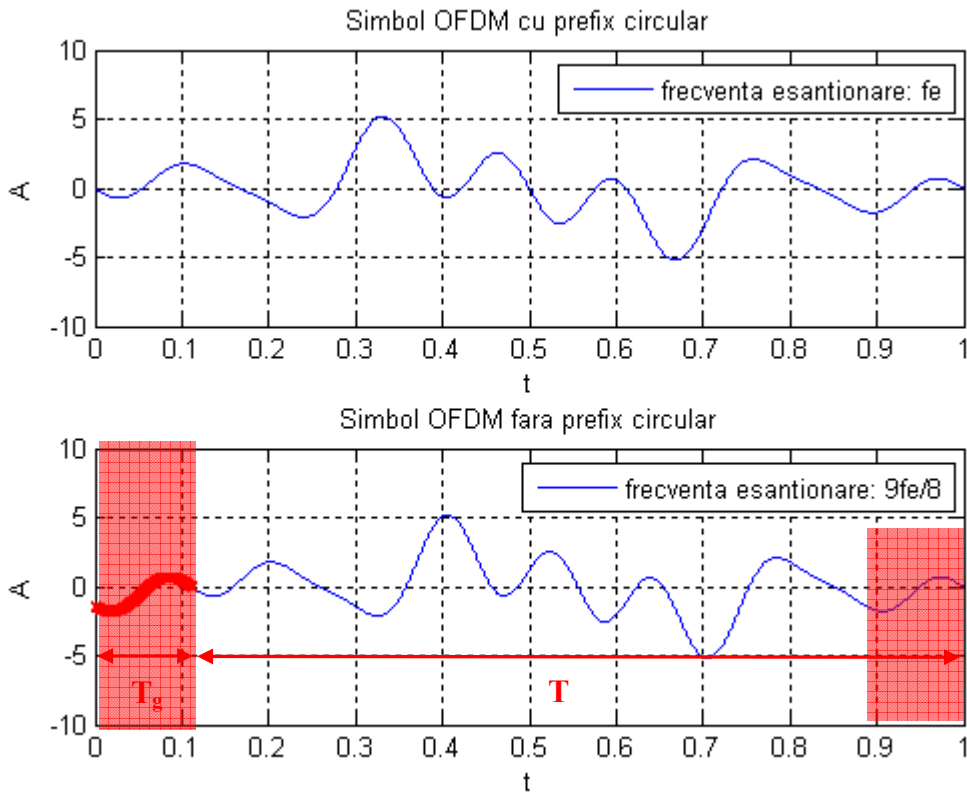


Fig.27: Diminuarea eficienței transmisiei din cauza prefixului circular.

Pentru simularea din figura 27, cu  $G=1/8$ , frecvența de eșantionare folosită a fost de 40320 Hz în cazul fără prefix circular, respectiv 45360 Hz pentru cazul în care se folosește prefixul circular, ceea ce corespunde unei creșteri cu  $1/8$  a lățimii de bandă necesare.

### 3.2 Avantajele implementării modulației multi-purtătoare bazată pe funcții wavelet

Așa cum s-a arătat în secțiunea precedentă, implementarea modulației multi-purtătoare bazată pe undișoare poate prezenta o serie de avantaje față de aceea bazată pe transformarea Fourier și implicit pe exponențiale complexe.

O să începem cu problema eficienței spectrale a celor două tipuri de transmisii. Pentru a înțelege diferența între natura transmisiei OFDM și a celei WOFDM, trebuie analizate în detaliu cele două tipuri de abordări. Să presupunem că durata simbolului multi-purtătoare transmis prin canal este  $T$ , pentru ambele tipuri de modulații. În această situație, reamintim că formula de calcul a unui simbol OFDM este de tipul:

$$x_{OFDM}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{jk2\pi f_0 t} p_T(t) \quad (48)$$

În ecuația (48),  $p_T(t)$  reprezintă o poartă rectangulară de durată  $T$ , de a cărei prezență este nevoie întrucât durată exponențialelor complexe folosite drept purtătoare în OFDM este infinită. Această poartă se deplasează pe axa timpului pe măsură ce se transmit noi simboluri OFDM, și tot ea este cea care conduce la spectrul de tip sinus cardinal specific purtătoarelor din OFDM.

Pe de altă parte, expresia unui simbol WOFDM este:

$$s(t) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{2^{L-j+1}} w_{j,k} \Psi_{j,k}(t) + \sum_{k=1}^{2^{J-L}} a_{L,k} \Phi_{L,k}(t) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{2^{L-j+1}} w_{j,k} \Psi(2^{-j}t - k\tau_0) + \sum_{k=1}^{2^{J-L}} a_{L,k} \Phi_{L,k}(t) \quad (49)$$

În relația (49),  $j=1$  reprezintă scara cea mai fină, unde se definesc undișoarele cel mai bine "localizate" pe axa timpului, iar pentru  $j=L$  undișoarele sunt mai dispersate în timp, dar mai bine localizate în frecvență. Diferența fundamentală dintre semnalele definite în ecuațiile (48), respectiv (49) este că, spre deosebire de exponențialele complexe din primul caz, undișoarele au durate finite. Mai mult decât atât, această durată a undișoarelor purtătoare pe axa timpului este reglabilă prin intermediul factorului de scară  $j$ , într-un domeniu controlabil prin numărul de iterații  $L$  ale ecuației (49). Astfel, dacă presupunem că pentru a transmite un simbol WOFDM se alocă în total  $T$ sec., atunci la fiecare scară, intervalul elementar alocat transmisiei simbolurilor de informație (notat în cele ce urmează  $T_j$ ) va fi diferit, și anume:

$$T_j = \frac{T}{2^{J-j}}, j = 0, \dots, J-1 \quad (50)$$

Astfel, dacă în cazul OFDM toate subpurtătoarele au același suport temporal, dat de către fereastra  $P_T(t)$ , în cazul undișoarelor nu e nevoie să se definească această fereastră, deoarece undișoarele se

localizează pe axa timpului "prin ele însele". În acest caz nu mai este vorba despre un spectru ce se obține prin convoluția dintre un impuls frecvențial și un sinus cardinal (ca la OFDM), ci pur și simplu de spectre ale undișoarelor și funcțiilor de scară folosite. Aceste spectre satisfac criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol, asemănându-se, din acest punct de vedere, cu spectrele filtrelor din familia cosinus ridicat [Jon,Dil'01]. În acest ultim caz, avantajul este că asemenea forme de unde au o descreștere mai bruscă a densității spectrale de putere, decât la sinus cardinal, unde lobii laterali sunt relativ importanți ca și energie. Se poate deci afirma că semnalul WOFDM se "încadrează" mai bine în banda dedicată și generează interferențe în benzile laterale mai puțin importante decât în cazul semnalului OFDM. În sistemele OFDM, pentru a suplini rejecția insuficientă a benzilor adiacente, se pot folosi formatoare de semnal  $p(t)$  care să nu corespundă unor impulsuri dreptunghiulare, ci unor filtre de tip cosinus ridicat, ceea ce implică însă o complexitate mai mare și un cost de implementare crescut al sistemului.

Pentru a ilustra avantajul eficienței spectrale la WOFDM, se dă cu titlu de exemplu forma de undă a subpurtătoarelor folosite în cele două sisteme, respectiv densitățile spectrale de putere asociate (fig. 28 și 29).

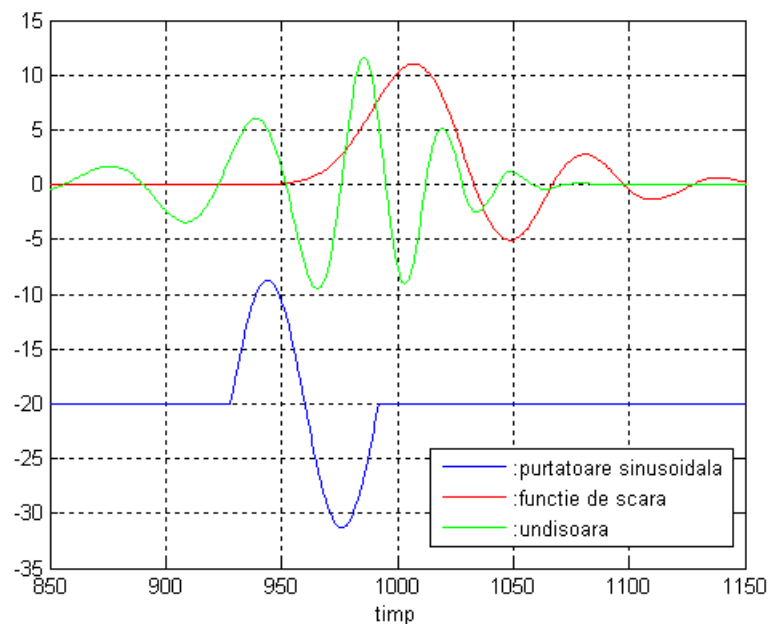


Fig. 28: Exemple de formă de undă ale purtătoarelor din WOFDM, comparativ cu OFDM.

Exemplul de mai sus este dat pentru undișoara mamă Daubechies-20 (care are 10 momente nule). Aceasta este undișoara cu cea mai mare "întindere" temporală dintre cele din familia Daubechies (la o scară de descompunere fixată). De notat aici că durata unei undișoare "purtătoare" la o anumită scară este superioară intervalului  $T_j$  alocat transmisiei unui simbol la scara respectivă. Ne găsim din

acest punct de vedere într-o situație similară aceleia în care se folosesc filtre formatoare de impulsuri de tip cosinus ridicat (formele de undă corespunzătoare transmisiei a două simboluri consecutive se suprapun în timp, fără a genera însă IIS). Reamintim că atât undișoarele cât și funcțiile de scară se supun criteriului de interferență Nyquist, și prin urmare nu introduc IIS în ciuda suprapunerii formelor de undă.

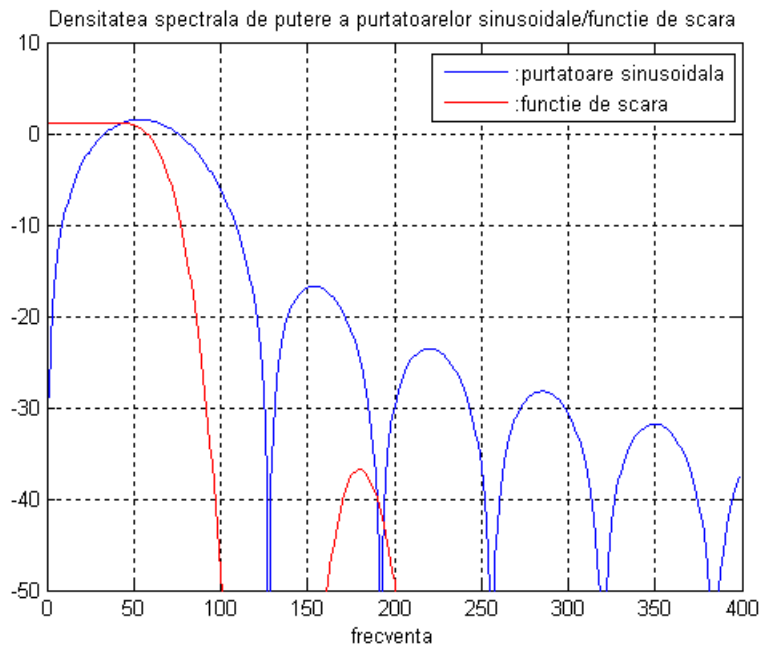


Fig. 29: Densități spectrale de putere (purtătoare sinusoidală și funcție de scară).

Mai mult decât atât, în sistemele de tip OFDM folosirea prefixului circular ridică și ea o problemă din punct de vedere al eficienței spectrale. Problema este eliminată în sistemul WOFDM, unde nu se folosește un prefix circular. O ilustrare comparativă a spectrului unui semnal OFDM, unde se folosește un prefix circular de durată 1/4 din durata simbolului util și a spectrului unui semnal WOFDM este dată în figura 30 [Olt,Naț'07]. Se folosesc în această simulare 256 de subpurtătoare și undișoara mamă Daubechies-20.

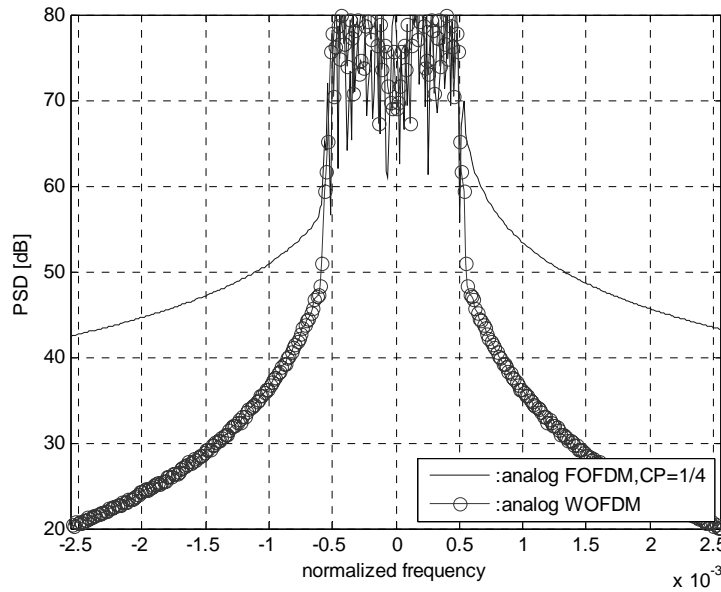


Fig.30: Analiză comparativă a Densităților Spectrale de Putere pentru tehnicile OFDM și WOFDM.

Se poate observa din exemplul precedent că, în cazul modulației WOFDM, atenuarea benzilor adiacente este mult mai pronunțată decât la modulația multi-purtătoare bazată pe transformata Fourier. Acest lucru are drept consecință o mai bună încadrare a semnalului în banda alocată și prin urmare interferența cu benzile vecine este mai mică. De notat că în cazul modulației OFDM s-a folosit și un prefix circular de durată 1/4 din durata semnalului util (valoare pe care o regăsim spre exemplu în standardul WiMAX, IEEE 802.16), fapt ce diminuează la rândul său considerabil eficiența spectrală în cazul modulației OFDM. Tocmai pentru evitarea interferenței cu benzile adiacente, în tehnologia WiMAX care folosește OFDM la nivelul fizic, un număr important de purtătoare de la marginile benzii sunt păstrate ca și subpurtătoare de gardă, ele nefiind modulate (de exemplu 91 purtătoare de gardă în transmisia WiMAX cu 512 subpurtătoare). Este în primul rând eficiența spectrală a WOFDM cea care face ca această tehnică să fie propusă pentru sisteme de transmisie fără fir [Rai'01] sau transmisie de date pe linii de alimentare cu tensiune [Aba,Tor'05, Kog,Kod'03].

Un al doilea termen de comparație între cele două tehnici se va referi la complexitatea de implementare a lanțului de transmisie. Ambele metode au avantajul că atât modulatorul cât și demodulatorul se pot implementa pe bază de software, pe procesoare numerice de semnal, utilizând algoritmi rapizi de calcul. Astfel, așa cum s-a mai menționat de-a lungul prezentei lucrări, punctul cheie al modulatoarelor OFDM este Transformata Fourier Discretă, iar cel al modulatoarelor WOFDM



este Transformarea Wavelet Discretă. În primul dintre cazuri, pentru calculul TFD se folosește algoritmul FFT. Astfel, la intrarea procesorului FFT avem  $N$  numere complexe (în cazul general), iar la ieșire vom regăsi tot  $N$  numere complexe. În acest caz, complexitatea de calcul (ca și număr de operații) este de ordinul  $N \log_2 N$  [Pro'95]. În cazul Transformării Wavelet Discrete, pentru calculul rapid al acesteia se folosește algoritmul lui Mallat [Mal'99], bazat pe folosirea unor bancuri de filtre (fig. 15). În cazul algoritmului lui Mallat, complexitatea depinde de numărul de coeficienți  $K$  ai filtrelor folosite în descompunere. Limita superioară a complexității de calcul poate fi exprimată ca și  $2KN$  în această situație. Situațiile în care complexitatea de calcul a DWT este inferioară celei a FFT sunt sintetizate în relația (51):

$$2K \leq \log_2 N \quad (51)$$

Într-o transmisie multi-purtătoare, numărul de subpurtătoare este destul de mare în mod uzual, încadrându-se de obicei între 256 și 2048. Întrucât lungimea filtrelor folosite este legată de numărul de momente nule ( $p$ ) ale undișoarelor, vom spune că în cazul DWT complexitatea de calcul este proporțională cu numărul de momente nule ale undișoarelor folosite. În această situație o serie de undișoare care satisfac relația 24, conducând la o complexitate de calcul mai mică în cazul DWT, sau comparabilă cu aceea a FFT. Este vorba despre undișoarele Haar, Daubechies-4, Daubechies-6, Symmlet-4, Symmlet-5, Symmlet-6, Coiflet-1, Coiflet-2 sau Coiflet-3. Notațiile folosite (parametrul numeric ce urmează numelui undișoarei) corespund celor din toolboxul Wavelab, bibliotecă gratuită de funcții și aplicații Matlab, dedicată undișoarelor [Buc,Don'05]. Toate acestea sunt alegeri uzuale și facile (filtrele sunt deja cunoscute) atât pentru implementarea practică cât și pentru simularea pe calculator a tehnicii WOFDM.

Mai mult decât atât, în ce privește complexitatea comparativă a celor două metode, ea mai merită a fi analizată și dintr-un alt punct de vedere. Algoritmul FFT lucrează în principiu cu numere complexe (atât intrarea cât și ieșirea sunt complexe). În simularea pe calculator a unui lanț de transmisie, munca cu numere complexe ridică dificultăți suplimentare (zgomotul ce afectează semnalul trebuie să fie la rândul său complex, detecția se complică etc.). De asemenea, există implementări practice în care se preferă ca semnalul de la ieșirea modulatorului să fie unul real, și nu complex, cum se întâmplă de exemplu în cazul Discrete Multi-Tone (DMT), metodă foarte asemănătoare cu OFDM ce se folosește în sistemele ADSL [Bin'00]. Dacă dorim ca semnalul ce se

generează în modulator să fie unul real, atunci la intrarea modulatorului IFFT valorile celor  $N$  eșantioane de intrare trebuie "formate" într-un anumit fel, și anume:

$$X[k] = X^*[N - k + 2], \quad k = 2, \dots, N/2 \quad (52)$$

Valorile  $X[1]$  și  $X[N/2+1]$  se aleg ca și numere reale. Aceste constrângeri impun efectuarea unui număr suplimentar de operații, înainte de aducerea secvenței de transmis la intrarea modulatorului. Astfel, dacă ne dorim o ieșire reală a modulatorului, este posibil să compunem secvența de date de lungime  $N$  de la intrare din  $N/2$  simboluri reale utile, ceea ce ar conduce însă la o diminuare cu 50% a eficienței de transmisie (întrucât jumătate din eșantioanele de intrare nu reprezintă date utile, ci sunt folosite doar pentru a forța o ieșire reală a algoritmului IFFT). O altă alegere este să compunem  $N/2$  numere complexe din  $N$  numere reale (simbolurile de transmis), jumătate dintre simboluri constituind partea reală a secvenței nou formate, iar cealaltă jumătate partea imaginară. Celelalte  $N/2$  numere complexe vor fi calculate apoi conform relației (52). În această ipoteză, semnalul care va fi transmis prin canal va fi unul real. Întrucât acest semnal va fi perturbat de către un zgomot, valorile eșantioanelor de la intrarea demodulatorului FFT nu vor fi identice cu acelea de la ieșirea modulatorului IFFT. Este prin urmare foarte plauzibil ca la demodulator, aplicarea FFT asupra secvenței de date recepționate să conducă la un rezultat complex, ceea ce ridică noi probleme la detecție.

În cazul DWT, avantajul este că filtrele folosite sunt reale. Prin urmare, o secvență de  $N$  eșantioane reale de la intrare va determina la ieșire tot  $N$  eșantioane reale. Toate problemele ridicate de natura complexă a FFT sunt astfel eliminate.

Sintetizând cele enumerate mai sus, din punctul de vedere strict al complexității de calcul la modulare/demodulare, cele două tehnici oferă performanțe comparabile. În schimb, în scenariul unei transmisii reale, OFDM ridică probleme suplimentare, ceea ce conduce în mod direct la o complexitate superioară celei a WOFDM. O măsură cantitativă care să sprijine afirmația anterioară este dată în figura 31. Este vorba despre timpii de simulare a unei transmisii de 10000 de blocuri a câte 1024 de simboluri fiecare (incluzând detecția simbolurilor). Simbolurile sunt numere bipolare echiprobabile (+1 și -1), iar zgomotul considerat este de tipul AWGN. În cazul transmisiei OFDM se va forța obținerea unui semnal real, după metoda descrisă anterior. Detecția se face pe baza părții reale a simbolurilor de la ieșirea modulatorului FFT. Simulările sunt executate pe un calculator cu

procesor Intel Celeron la 1.7 GHz, cu 640 MB de memorie RAM, folosind programul Matlab. În cazul transmisiei WOFDM se aplică una, respectiv 4 iterații ale transformatei în modulator.

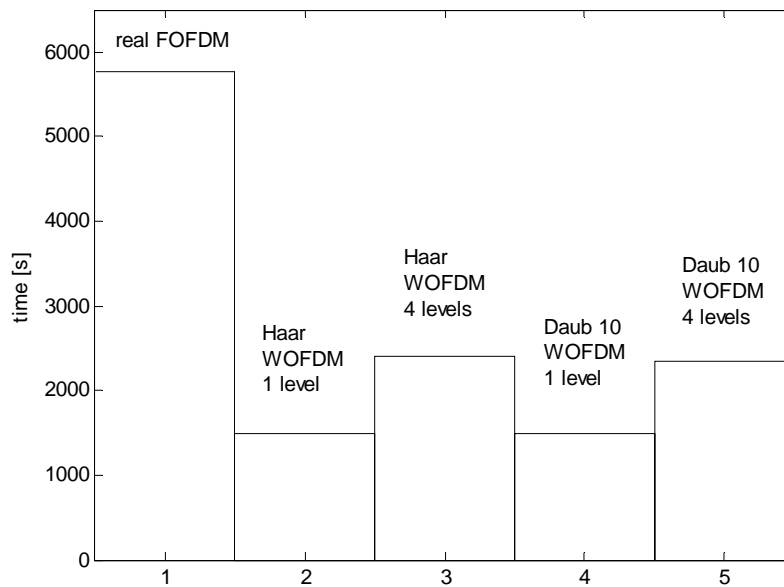


Fig.31: Comparație între duratele de simulare pentru transmisia OFDM, respectiv WOFDM.

Se observă clar că sistemul OFDM clasic necesită un timp de simulare de cca. 3 ori mai mare decât transmisia WOFDM. Această diferență este dată în primul rând de etapele suplimentare impuse de constrângerea ca semnalul să fie real, etape prezentate anterior. În al doilea rând, în cazul în care se folosește undișoara Haar, filtrele având doar doi coeficienți, complexitatea de calcul a transformării DWT este mai mică decât aceea a FFT. Rezultatele de simulare arată însă diferențe nesemnificative ca valoare între timpii de calcul în cazul folosirii undișoarei Haar, respectiv Daubechies-10.

### 3.2.1 Analiza comparativă a performanțelor BER în cazul OFDM și WOFDM

Evaluarea performanțelor unui sistem de transmisie de date are printre parametrii cei mai importanți rata erorii de bit (BER). Prin urmare, o analiză comparativă a tehnicilor OFDM și WOFDM trebuie să aibă în vedere și această măsură. În general, erorile apar la recepție din mai multe cauze: zgomotul din canal, zgomotul propriu al receptorului, erori de sincronizare în timp sau frecvență, caracterul selectiv în frecvență și/sau variant în timp al mediului de transmisie.

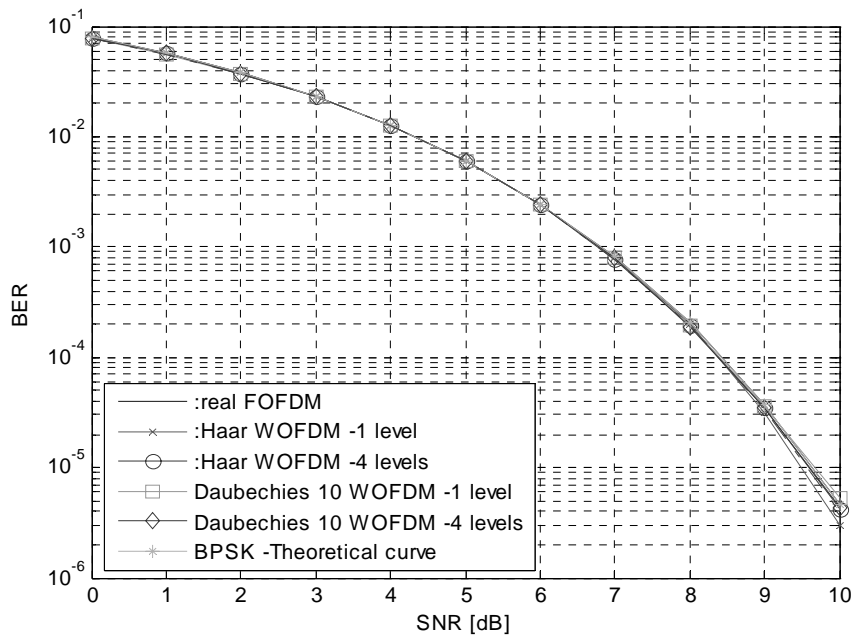


Fig.32: Performanța BER a OFDM, respectiv WOFDM în canale AWGN.

Scenariul cel mai simplu considerat în general este acela în care răspunsul canalului este ideal (răspunsul său la impuls fiind un impuls Dirac), erorile la recepție apărând exclusiv din pricina unui zgomot aditiv, alb și gaussian, care se suprapune peste semnalul util. Referindu-ne la figura 23 (din capitolul anterior), acest zgomot este notat cu  $z(n)$ . Performanța BER a unei transmisii WOFDM, respectiv OFDM într-un canal de tip AWGN este analizată în figura 32. Pentru modulația WOFDM se simulează mai multe scenarii, în care se modifică numărul de iterații ale DWT și IDWT, respectiv undișoara mamă folosită în calculul transformatei. Două concluzii importante se desprind din această figură. În primul rând, se observă că aceste metode prezintă rezultate similare în canalul AWGN și identice cu cele ale modulației BPSK, lucru confirmat și de autorii din [Man,Bel'01]. În al doilea rând, în cazul modulației WOFDM, rezultatele nu depind de parametrii testați (numărul de iterații și undișoara mamă folosită în calculul DWT).

### 3.2.1.1 Simularea comportamentului canalelor radio

Așa cum s-a discutat într-o secțiune anterioară, tehnicile multi-purtătoare și-au găsit o largă aplicabilitate în transmisii pe canale radio. Aceste canale se constituie în medii dificile de transmisie, din pricina celor două caracteristici esențiale pe care le au: selectivitate în frecvență și varianță în timp. Din primul punct de vedere, canalele se clasifică în canale cu fading plat, respectiv selectiv, iar din cel de al doilea în canale cu fading lent, respectiv rapid [Sk1'97-1]. Următoarele

simulări ilustrate în acest referat au în vedere rezultatele celor două metode multi-purtătoare pentru o transmisie în canale cu fading plat. Efectul de fading plat este de cele mai multe ori surprins în simulări prin multiplicarea semnalului util cu o secvență distribuită conform densității de probabilitate de tip Rayleigh ( $ray[n]$ , fig.23 ). Această densitate de probabilitate este descrisă în ecuația (53).

$$pdf(x|\sigma) = \frac{x \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (53)$$

Reprezentarea grafică din figura 33 se face pentru  $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ .

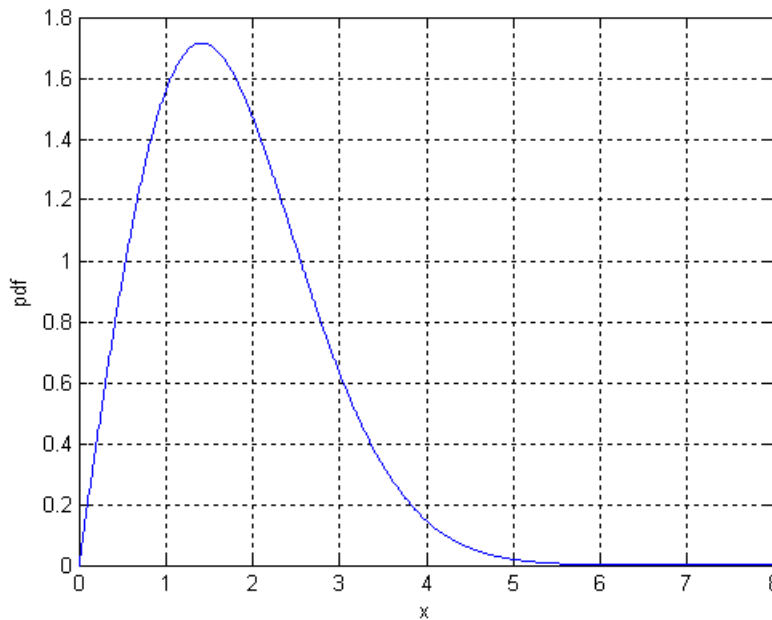


Fig.33: Densitatea de probabilitate de tip Rayleigh.

Alegerea făcută pentru  $\sigma^2$  în reprezentarea grafică precedentă nu este una întâmplătoare. Pentru a explica această alegere vom face din nou apel la lanțul de transmisie din figura 23. Dacă notăm cu  $s[n]$  semnalul de la ieșirea modulatorului și ignorăm efectul blocului numit "canal", atunci semnalul de la intrarea în demodulatorului DWT poate fi exprimat ca și:

$$r[n] = s[n] \cdot ray[n] + z[n] \quad (54)$$

Așa cum s-a discutat deja, în evaluarea performanțelor unui sistem de transmisie, curba BER ocupă un loc important. Această curbă este trasată în funcție de raportul semnal/zgomot (RSZ) din canal. Termenul RSZ este definit însă pentru situațiile în care unicul efect asupra unui semnal este adăugarea unui zgomot alb Gaussian ( $z[n]$  din relația 54). Facem supoziția că atât semnalul, cât și zgomotul sunt de medie nulă. În această situație, raportul semnal pe zgomot se calculează în simulări ca:

$$RSZ = \frac{\text{var}\{s\}}{\text{var}\{z\}} \quad (55)$$

unde prin „var” notăm varianța secvențelor respective. Dacă se ia însă în considerare și efectul multiplicativ al secvenței Rayleigh, așa cum se face în ecuația 54, atunci devine discutabil conceptul de "semnal util", întrucât semnalul peste care se adaugă zgomotul  $z[n]$  este deja alterat prin multiplicarea cu secvența distribuită Rayleigh. În consecință, pentru a putea menține relevanța și semnificația conceptului de raport semnal pe zgomot, este nevoie ca numărătorul relației 55 să nu fie afectat de mulțicarea din ecuația 54, sau cu alte cuvinte:

$$\text{var}\{s \cdot ray\} = \text{var}\{s\} \quad (56)$$

Se demonstrează în anexă că această condiție este satisfăcută dacă în relația de definiție a densității de probabilitate a variabilei Rayleigh se alege  $\sigma^2 = \frac{I}{2}$ .

Acestea fiind precizate, simularea pe calculator a distribuției Rayleigh nu este dificilă. Astfel, se arată în literatură [Mar,Nic'97] că modulul unei secvențe Gaussiene complexe cu densitate de putere constantă(ec. 57) este distribuit Rayleigh:

$$R = |x + j \cdot y| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (57)$$

În simularea comportamentului canalului radio nu este însă suficient să modelăm doar din punct de vedere statistic proprietățile secvenței  $ray[n]$ . Pentru a se surprinde caracterul variant în timp al canalului, este nevoie ca eșantioanele generate să prezinte o anumită corelație, spre deosebire de acelea descrise în (57), unde autocorelația secvenței  $R$  va fi dată de un impuls Dirac. Densitatea

spectrală de putere a acestei secvențe trebuie să urmeze forma cunoscută în literatură sub numele de "Jakes Spectrum" [Sk1'97-1]. Acest spectru surprinde caracterul variant în timp al canalului radio, prin intermediul unui parametru care se numește deplasare frecvențială Doppler, care reprezintă diferența dintre frecvența unei sinusoide emise și frecvența aceleiași sinusoide, ajunsă la receptor. Deplasarea Doppler maximă se poate calcula cu formula:

$$f_d = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{c} \cdot f_c \quad (58)$$

unde  $V$  reprezintă viteza de deplasare relativă dintre emițător și receptor, iar  $\lambda$  este lungimea de undă pe care se face transmisia. Pentru a avea o imagine asupra valorilor pe care acest parametru le-ar putea lua în practică, vom da un exemplu. Astfel, la o viteză de 60 kmph, cu transmisie pe frecvența purtătoare 2.5 GHz, deplasarea Doppler maximă este de 138 Hz. De cele mai multe ori, în simulări se folosește o versiune normată a acestui parametru, normarea făcându-se cu frecvența de eșantionare:

$$f_m = f_d \cdot T_s = \frac{f_d}{f_s} \quad (59)$$

Revenind la proprietățile spectrale ale eșantioanelor de fading generate, densitatea spectrală de putere a fadingului poate fi exprimată prin formula:

$$S(\nu) = \frac{I}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{f_d}\right)^2}}, \quad \text{pentru } |\nu| \leq f_d \quad (60)$$

În ecuația (60), cu variabila  $\nu$  s-a notat deplasarea Doppler, limitată de valoarea maximă  $f_d$  dată de relația 58. Pentru exemplul numeric prezentat anterior ( $f_d=138 \text{ Hz}$ ), se prezintă spectrul lui Jakes descris de (60), în fig. 34. Se observă că la valoarea  $\nu = f_d$ , densitatea spectrală de putere tinde la  $\infty$ . Este prin urmare clar că un asemenea spectru nu poate fi obținut în simulări, ci doar aproximări ale sale. Există numeroase abordări în literatură pentru aproximarea proprietăților spectrale ale secvențelor Rayleigh folosite în simularea canalelor radio, bazate pe metoda sumei de oscilatoare

[Pop,Bea'01], pe filtrarea unei secvențe cu densitate spectrală constantă [You,Bea'00, Loo,Sec'91], sau pe un model auto-regresiv [Bad,Bea'05].

De remarcat în legătură cu spectrul din figura 34 este faptul că el surprinde de fapt două fenomene specifice transmisiilor radio printr-un mediu mobil: deplasarea Doppler și fenomenul de propagare multicale. Astfel, acest spectru se obține dacă la intrarea într-un asemenea canal se transmite o undă sinusoidală, a cărei reprezentare în frecvență este un impuls Dirac. Această undă se

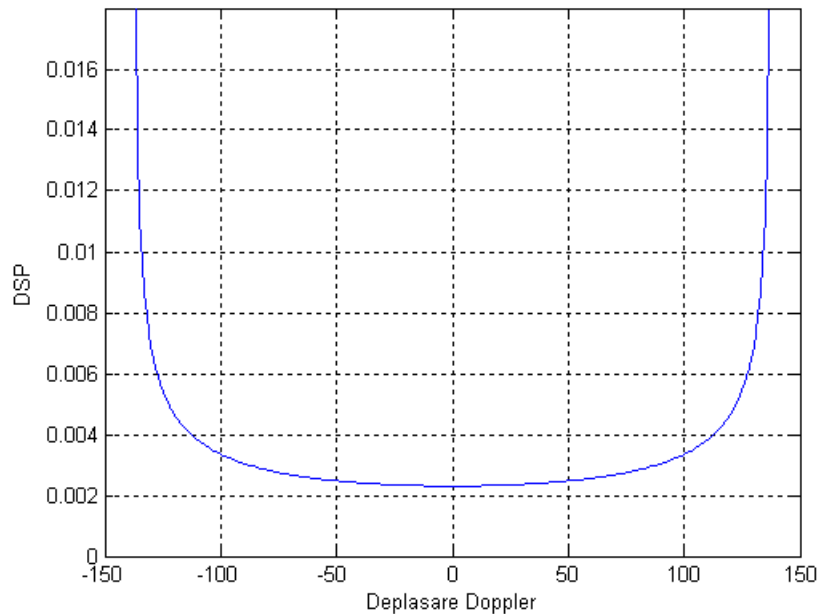


Fig. 34: Densitate spectrală de putere a eșantioanelor de fading (spectrul lui Jakes).

propagă pe căi multiple, fiecărei căi corepunzându-i o anumită deplasare Doppler (de unde rezultă "împrăștierea spectrală" a sinusoidelor).

Din punctul de vedere al caracterului variant în timp al canalului distingem două situații: canale lent-variabile, respectiv canale rapid-variabile în timp. Separarea se face în funcție de paramaterul  $f_d$ , prin intermediul unei alte mărimi legate de acesta, și anume timpul de coerență al canalului. Intuitiv, acest timp de coerență este intervalul de timp pe durata căruia comportamentul canalului radio nu se modifică semnificativ. El este legat de nivelul de corelație care există între răspunsurile la impuls ale canalului măsurate în două momente de timp diferite [Skl'97-1]. Acest timp de coerență se poate defini în mai multe feluri, o măsură des întâlnită fiind ce de mai jos:

$$T_C = \frac{0.423}{f_d} \quad (61)$$



Pentru valoarea deplasării Doppler calculată anterior, timpul de coerență al canalului este 3.06 msec. Dacă durata simbolurilor transmise este comparabilă sau mai mare decât această valoare, atunci canalul se consideră rapid variant în timp, deoarece caracteristicile sale se modifică pe durata de transmisie a unui singur simbol. În aceste situații problema estimării "în timp real" a canalului devine stringentă, întrucât acesta se modifică foarte rapid. În transmisiile multi-purtătoare, unde durata simbolului este mai mare (aceasta fiind de fapt esența acestui tip de transmisii), scenariul de fading rapid variant în timp este foarte plauzibil. De fapt, acesta este principalul factor care limitează superior numărul de purtătoare folosite în transmisie, întrucât creșterea acestui număr determină și creșterea duratei simbolurilor [Bin'90,Chi'94].

Scenariul prezentat mai sus se referă la situația în care fadingul este plat. În acest caz nu se surprinde caracterul selectiv în frecvență al canalului, ci doar aspectul varianței în timp a acestuia. În canalele cu fading plat, se consideră că toate copiile semnalului rezultate ca urmare a fenomenului de propagare multicanal ajung la receptor pe durata unui singur simbol emis. Există însă numeroase situații în care aceste copii sunt mult mai împrăștiate în timp. În acest scenariu, în funcție de numărul de trasee multicanal distincte considerate (notat cu  $N$ ), semnalul ajuns la recepție poate fi exprimat ca și [Man'01]:

$$r[n] = \sum_{k=0}^{N-1} ray_k[n] \cdot x[n-k] + z[n] \quad (61)$$

În relația precedentă, cu  $ray_k[n]$  s-a notat cea de-a  $k$  realizare de tip Rayleigh a procesului aleator  $ray[n]$ .

### 3.2.1.2 Performanțele transmisiilor multipurtătoare în canale cu fading plat de tip Rayleigh

În situația canalelor cu fading plat, semnalul de la intrarea demodulatorului DWT se obține particularizând ecuația (61) pentru  $N=1$ . Canalul este prin urmare neselectiv în frecvență, în schimb este variant în timp.

Cele două tehnici vizate sunt comparate din punctul de vedere al performanțelor BER în canale cu fading plat. Drept parametri de simulare se vor considera deplasarea Doppler normalizată ( $f_m$ ), iar pentru modulația WOFDM undișoara mamă și numărul de iterații ale transformatei. În ambele cazuri, transmisia se face pe 1024 de subpurtătoare.

Câteva observații interesante se desprind din figura 35. În primul rând, se vede că tehnica WOFDM oferă performanțe mai bune decât OFDM pentru toate scenariile luate în considerare. Diferențele sunt remarcabile mai ales la valori mari ale deplasării Doppler, unde WOFDM cu undișoara Haar

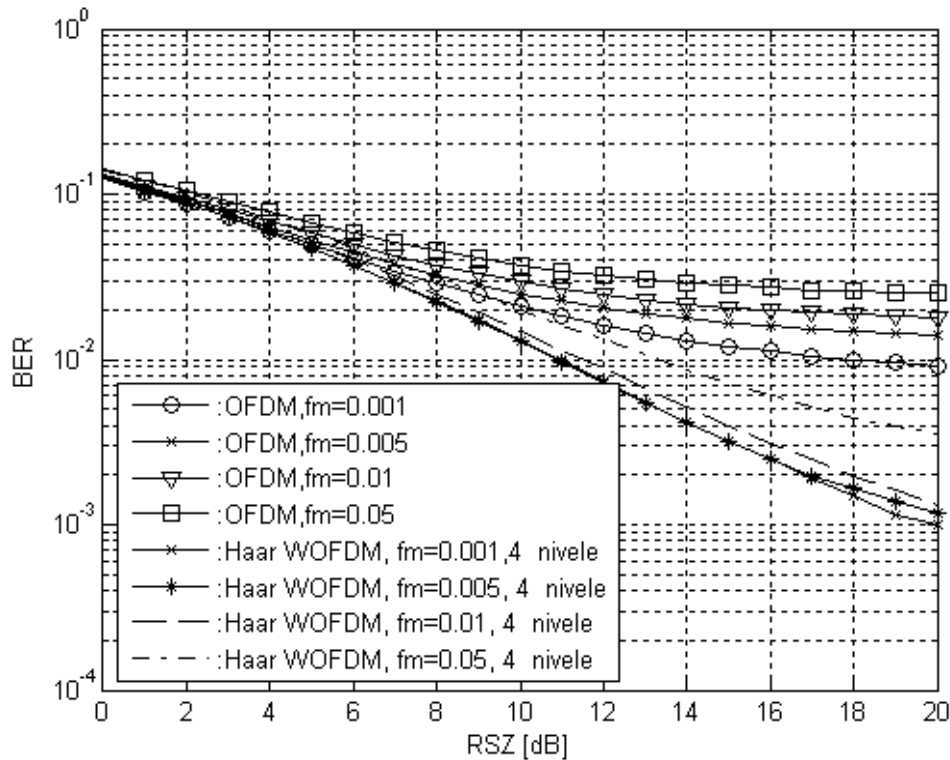


Fig. 35: Comparație între OFDM și Haar - WOFDM cu 4 iterații.

oferă un câștig de peste 10 dB față de transmisia OFDM. Acest lucru ne arată că folosirea undișoarelor în locul purtătoarelor sinusoidale conduce la o rezistență mai bună la fenomenul de deplasare Doppler. Există câteva explicații care pot fi date în acest context. S-a văzut într-o secțiune precedentă că folosirea undișoarelor are drept consecință o atenuare mai pronunțată a lobilor spectrali laterali, față de cazul OFDM cu sinusoidale „formate” printr-o poartă temporală dreptunghiulară. În plus, în OFDM ortogonalitatea purtătoarelor este condiționată de localizarea spectrală a acestora exact la frecvențele cerute. Ori, este tocmai această poziționare care este afectată puternic de fenomenul de împrăștiere Doppler. Dacă la OFDM, fiecare dintre cele  $N$  purtătoare folosite este localizată frecvențial într-o bandă diferită, lucrurile nu stau la fel în cazul WOFDM. În această situație, subpurtătoarele de la o anumită scară vor avea practic exact același spectru de putere, diferența între ele fiind dată doar de localizarea lor pe axa timpului, care se regăsește în spectrul de fază al acestor undișoare. Toate aceste observații arată că în cazul undișoarelor, poziționarea pe axa frecvențelor și forma spectrului acestora nu sunt atât de critice precum în cazul

exponențialelor complexe din OFDM. Prin urmare un efect de tipul împrăștierii Doppler afectează mai mult transmisia multi-purtătoare bazată pe sinusoidă decât aceea bazată pe undișoare. Consecința acestor proprietăți se regăsește în mod evident în figura de mai sus, unde Haar-WOFDM, în cel mai prost scenariu considerat ( $f_m=0.05$ ) are performanțe mai bune decât OFDM-ul clasic în cel mai bun scenariu (deplasare Doppler foarte mică).

Se separă în continuare cele două scenarii (fading rapid respectiv fading lent) și se studiază mai în detaliu în cele ce urmează. De data aceasta simulările ilustrate sunt pentru o altă undișoară, și anume Daubechies-10. Înainte de a trece la rezultatele propriu-zise, trebuie să facem câteva considerații asupra termenilor de "fading rapid", respectiv "fading lent", în contextul transmisiilor multi-purtătoare. Astfel, clasificarea canalului în cele două categorii se face, așa cum am menționat, în funcție de relația de ordine care există între timpul de coerență al canalului și durata simbolurilor transmise. Caracteristica intrinsecă a modulațiilor multi-purtătoare este durata mare a simbolurilor: fiecare simbol dintre cele  $N$  aduse la intrarea modulatorului IDWT/IFFT contribuie la "compoziția" fiecăruia din cele  $N$  eșantioane de la ieșire. În acest caz, detecția se face pe baza tuturor celor  $N$  eșantioane, și în consecință, conceptul de "fading rapid/lent" își redefinește sensul, urmând să ne raportăm la durata simbolurilor OFDM/WOFDM, și nu la aceea a simbolurilor "seriale" inițiale. În cazul simulărilor făcute în prezentul referat, se consideră  $N=1024$ . Cel mai simplu mod de a ne raporta la parametrii  $f_m$  și  $T_c$  este acela în care considerăm că durata totală a unui simbol transmis este de  $T=1024T_s$ , unde  $T_s$  are un dublu înțeles: durata unui simbol serial, respectiv pas de eșantionare. Exprimându-l pe  $f_d$  din relația (61) în funcție de  $f_m$ , se poate calcula că, pentru domeniul de valori ale lui  $f_m$  luat în considerare ( $f_m \in (0.001, \dots, 0.05)$ ), timpul de coerență al canalului se încadrează în domeniul:

$$T_c \in [84.6T_s, 4230T_s] \quad (62)$$

Raportându-ne la durata unui simbol multi-purtătoare ( $T=1024T_s$ ), putem concluziona că pentru cazurile  $f_m=0.001$  și  $f_m=0.005$  ne aflăm într-un scenariu de fading lent variant în timp, iar pentru celelalte două valori sunt îndeplinite condițiile de fading rapid variant în timp. De exemplu, în cel mai defavorabil caz, timpul de coerență al canalului este de peste 10 ori mai mic decât durata simbolului transmis.

Acestea fiind spuse, concluzia rezistenței mai mari la Doppler a metodei WOFDM rămâne validă și este întărită și pentru alte tipuri de undișoare (fig. 36).

Două concluzii pot fi trase din figura 36: WOFDM are o rată a erorii mai mică (aproape 10dB câștig la un BER de 0.01) și este mai puțin sensibil la deplasarea Doppler. Se vede că nu există diferențe semnificative în ceea ce privește valoarea BER în cazul WOFDM pentru cele două deplasări Doppler considerate.

În figura 37, aceleași scenarii sunt considerate, dar de data aceasta pentru valori mai mari ale împrăștierii Doppler. Câștigul WOFDM este chiar mai mare de această dată (cca 12 dB la  $f_m=0.01$ , pentru un BER de 0.015). Observațiile de mai sus sunt sprijinite și în acest caz, cu mențiunea că de această dată se observă o degradare a performanței BER și la WOFDM, pentru  $f_m=0.05$  față de  $f_m=0.01$ .

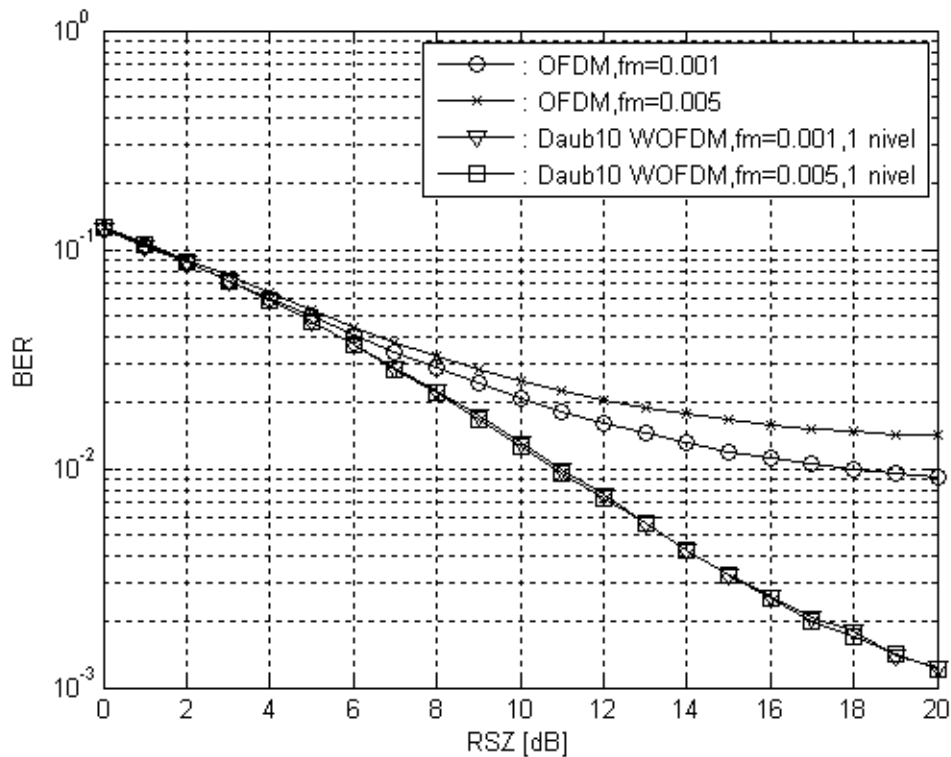


Fig. 36: Comparație între OFDM și Daubechies-10 WOFDM în condiții de fading lent.

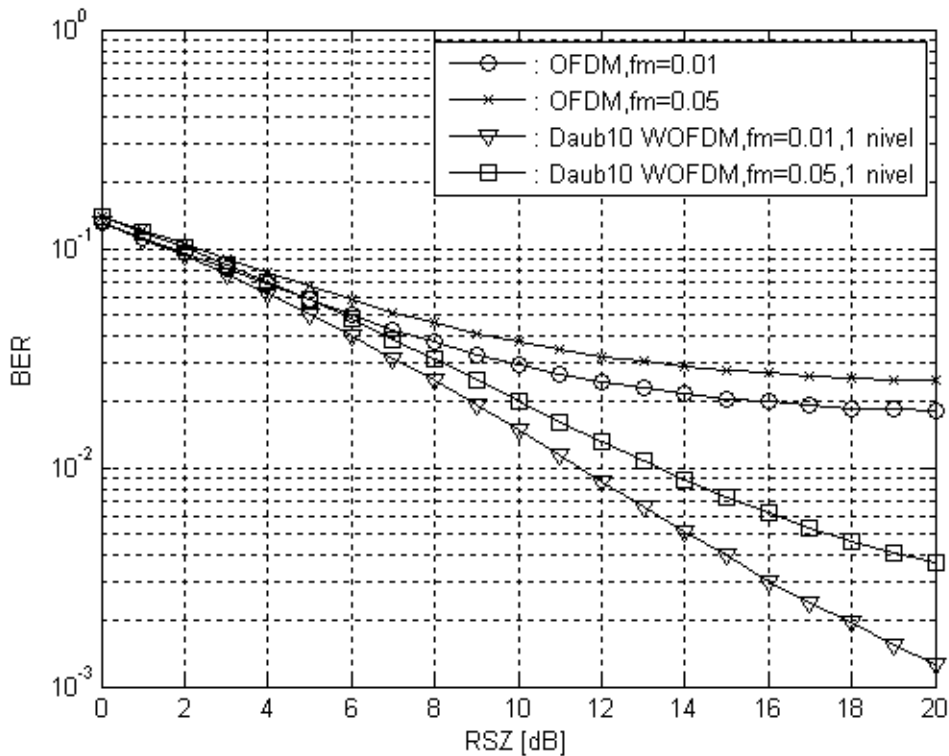


Fig. 37: Comparație între OFDM și Daubechies-10 WOFDM în condiții de fading rapid.

#### CAP. IV: INVESTIGAREA DETALIATĂ A PERFORMANȚELOR WOFDM

Dacă până acum am privit comparativ transmisia OFDM clasică și cea bazată pe undișoare, este momentul de a efectua o analiză mai amănunțită a tehnicii WOFDM. Așa cum s-a explicat în capitolul anterior, modulatorul și demodulatorul din WOFDM se bazează pe calculul transformării wavelet discrete, folosindu-se algoritmul lui Mallat. Există doi parametri care trebuie luați în considerare în acest calcul: undișoara mamă folosită (care se regăsește direct în coeficienții filtrelor  $g$  și  $h$ , fig. 14) și numărul de iterații al transformatei. S-a explicat că, din considerente practice, acest număr de iterații este limitat la valoarea  $J = \log_2 N$ .

Se studiază experimental în cele ce urmează care este influența acestor parametri în cazul transmisiei WOFDM prin canale cu fading plat, variante în timp.

#### 4.1 Alegerea undișoarelor folosite drept purtătoare în WOFDM

Vom începe cu influența undișoarei mamă folosite în calculul DWT asupra performanțelor BER ale transmisiei. Există câteva familii de undișoare bine-cunoscute și folosite adesea pentru calculul DWT [Mal'99]. Ne putem referi aici la undișoarele (filtrele) Haar, Daubechies, Coiflet și Symmlet. Toate aceste undișoare au avantajul că filtrele digitale cu ajutorul cărora se implementează algoritmul lui Mallat sunt cunoscute și pot fi utilizate în toolboxul gratuit Wavelab, sub mediul de programarea Matlab [Buc,Don'05]. Pentru toate aceste undișoare mai există un parametru de luat în calcul, și anume numărul de momente nule al undișoarei mamă. În principiu, cu cât acest număr este mai mare cu atât undișoara mamă va fi mai întinsă în timp și mai concentrată în frecvență. În prezentul referat s-au efectuat simulări pentru toate aceste undișoare și pentru o gamă largă de opțiuni în ceea ce privește numărul de momente nule al fiecăreia. Pentru a avea o imagine globală, să spunem că s-au luat în calcul două valori ale deplasării Doppler maxime ( $f_m=0.005$  și  $0.05$ ), una, respectiv patru iterații ale transformatei DWT, și undișoarele mamă: Daubechies- 4,8,12,16 și 20, Haar, Coiflet- 1, , 3, 4 și 5, Symmlet- 4, 6, 8,10. Parametrul numeric care însoțește numele undișoarelor este legat de numărul de momente nule, nefiind însă exact valoarea acestuia. Semnificația în fiecare caz este explicată în documentele descriptive ale toolboxului wavelab [Buc,Don'05], fiind însă suficient să amintim că între numărul de momente nule al undișoarelor și acest parametru există o relație de direct proporționalitate.

Se spune că o undișoară  $\Psi(t)$  are  $p$  momente nule dacă ea satisface condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad \text{pentru } 0 \leq k < p \quad (63)$$

În contextul rezultatelor care urmează, prezintă interes relația dintre parametrul  $p$  și suportul temporal al undișoarei. Deși apriori independente, Mallat [Mal'99] afirmă că pentru undișoarele ortogonale cu  $p$  momente nule, suportul temporal al acestora este de cel puțin  $2p-1$ .

Se va trece în continuare la ilustrarea rezultatelor de simulare obținute și la discuții pe marginea acestora. Primul obiectiv al simulărilor care vor fi ilustrate în cele ce urmează este acela de a determina gradul de relevanță al tipului de undișoară mamă ales pentru transmisie. Se alege în acest scop câte o undișoară mamă din fiecare familie enumerată mai sus și se calculează performanța BER a transmisiei. În modulator și demodulator se alege o singură iterație a transformatei.

Rezultatele sunt afișate în figurile 38 și 39, pentru două valori diferite ale deplasării Doppler maxime.

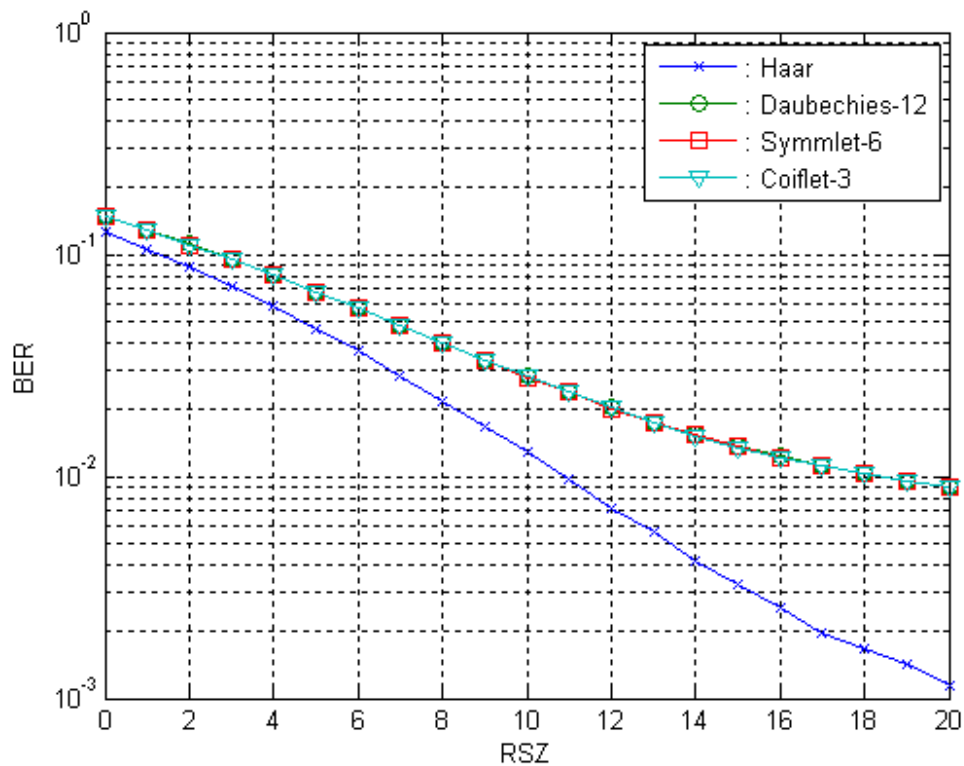


Fig.38: Performanțele WOFDM cu diverse undișoare mamă și  $f_m=0.005$ .

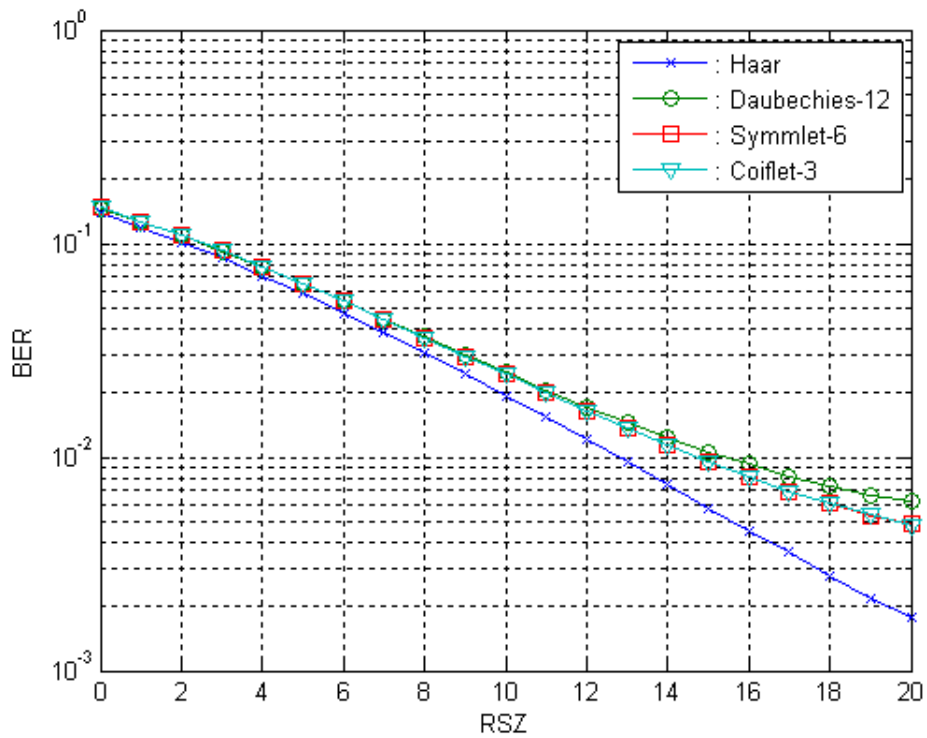


Fig.39: Performanțele WOFDM cu diverse undișoare mamă și  $f_m=0.05$ .

Curbele din figura 38 ne arată cu claritate că undișoara Haar este cea care conduce la cele mai bune rezultate (cele mai puține erori). La o rată a erorii de  $10^{-2}$ , această undișoară oferă un câștig de 8dB față de celelalte soluții. Pe de altă parte, la  $f_m=0.005$  (fading lent variant) nu există diferențe observabile între celelalte tipuri de undișoare considerate. Superioritatea undișoarei Haar este întărită și de graficele trasate pentru  $f_m=0.05$  (fig. 39). De data aceasta, undișoara Daubechies-12 furnizează rezultatul cel mai slab. Câștigul adus de undișoara Haar este în acest caz mai mic.

#### 4.1.1 Explicația rezultatului superior al undișoarei Haar

Pentru a da o explicație rezultatului net superior al undișoarei Haar, în raport cu toate celelalte undișoare testate, ne vom referi la un scenariu simplificat, în care modulatorul IDWT este implementat folosind o singură iterație a algoritmului lui Mallat. Simplificând figura 15 (pentru o singură iterație), obținem următoarea schemă de implementare a modulatorului (fig. 40).

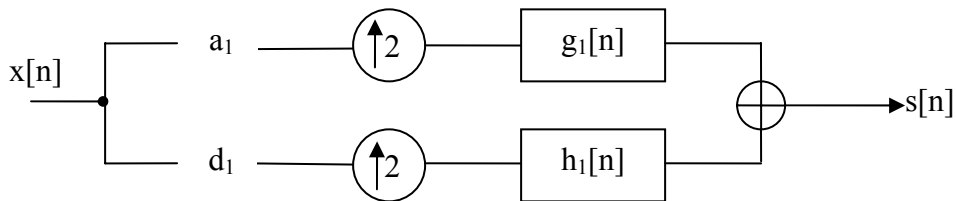


Fig. 40: Implementarea modulatorului IDWT cu o singură iterație.

Dacă presupunem că semnalul de intrare  $x[n]$  are  $N$  eșantioane, atunci prima jumătate a lor vor constitui coeficienții de aproximare (notați cu  $a_1$ ), iar cea de a doua jumătate pot fi interpretați ca și coeficienții de detaliu ( $d_1$ ). Pentru simplificarea notațiilor vom renunța în cele ce urmează la indicele 1, omisiune posibilă întrucât avem o singură iterație a algoritmului. În acest caz,  $g_1[n]$  și  $h_1[n]$  vor fi răspunsurile la impuls ale filtrelor de sinteză, primul fiind un filtru trece-jos, iar cel de al doilea un filtru trece sus. Aceste răspunsuri sunt:

$$\begin{aligned} g_1[n] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \delta[n] + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta[n-1] \\ h_1[n] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \delta[n] - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta[n-1] \end{aligned} \tag{64}$$



Ținând cont de supraeșantionarea cu 2 la care sunt supuși coeficienții de detaliu  $d$  și cei de aproximare  $a$ , se poate exprima semnalul transmis  $s[n]$  folosind formula:

$$s[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a \left[ \frac{n}{2} \right] + d \left[ \frac{n}{2} \right] \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a \left[ \frac{n-1}{2} \right] - d \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a \left[ \frac{n}{2} \right] + d \left[ \frac{n}{2} \right] \right), & \text{daca } n \text{ par} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a \left[ \frac{n-1}{2} \right] - d \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right), & \text{daca } n \text{ impar} \end{cases} \quad (65)$$

Dacă ne referim acum la funcționarea demodulatorului, rolul acestuia este de a identifica corect secvența de coeficienți de aproximare, respectiv de detaliu. Demodulatorul este bazat pe transformarea directă, DWT. Aceasta constă de fapt în filtrarea semnalului  $s[n]$ , folosind de data aceasta filtrele de analiză, având răspunsurile la impuls  $g$ , respectiv  $h$ . Modul în care ele acționează se întvede foarte simplu și din relația 65. Dacă se consideră canalul ideal, atunci semnalul ajuns la demodulator,  $r[n]$  va fi absolut identic cu acela emis în canal. Luând acum două simboluri succesive recepționate,  $r[2k]$  și  $r[2k+1]$ , și ținând cont de scalarea cu  $1/\sqrt{2}$  introdusă de filtrele din receptor, se observă din (65) că:

$$\begin{cases} r[2k] + r[2k+1] = a[k] \\ r[2k] - r[2k+1] = d[k] \end{cases} \quad (66)$$

Prin urmare, printr-o simplă scădere, respectiv, adunare a două eșantioane succesive sosite la recepție se pot identifica corect simbolurile transmise, adică detaliile și aproximările ce compun vectorul de date inițial,  $x[n]$ . Reformulând ideea precedentă, în ciuda faptului că este vorba despre o modulație multi-purtătoare, fiecare simbol de la recepție depinde doar de două simboluri seriale emise. La nivel intuitiv, observația precedentă ne permite deja să concluzionăm că în această situație, variabilitatea în timp a canalului nu va avea un efect puternic asupra performanțelor transmisiei. O analiză mai riguroasă va fi făcută în cele ce urmează. Trecând la scenariul de simulare ales, să ne amintim că semnalul  $r[n]$  ajuns la receptor este distorsionat atât de secvența distribuită Rayleigh ( $ray[n]$ ) cât și de zgomotul aditiv  $z[n]$ :

$$r[n] = s[n] * ray[n] + z[n] \quad (67)$$

Întrucât scopul nostru este să arătăm că undișoara Haar este mai rezistentă la împrăștierea Doppler indusă de caracterul variant în timp al canalului (și simulată prin intermediul secvenței  $ray[n]$ ), vom neglija în cele ce urmează efectul zgomotului aditiv, și vom considera că singurul efect de distorsiune asupra semnalului util este indus de către  $ray[n]$ . Considerând acum două simboluri succesive, la fel ca în relația 66, o estimată a simbolului emis  $a_{est}[k]$  poate fi făcută pe baza relației:

$$a_d[k] = s[2k] \cdot ray[2k] + s[2k + 1] \cdot ray[2k + 1] \quad (68)$$

Raportându-ne la tipul de transmisie utilizată, să remarcăm că o decizie asupra simbolului  $a[k]$  poate fi luată pe baza semnelor eșantionului  $a_d[k]$ :

$$a_{est}(k) = \begin{cases} 1, & \text{daca } a_d[k] \geq 0 \\ -1, & \text{daca } a_d[k] < 0 \end{cases} \quad (69)$$

Probabilitatea de eroare este:

$$P_e = P(a_{est}[k] \neq a[k]) = P(a_{est}[k] = 1 \mid a[k] = -1) + P(a_{est}[k] = -1 \mid a[k] = 1) \quad (70)$$

Luând acum unul dintre cei doi termeni care compun membrul drept al ecuației precedente, și ținând cont de relația (65), putem reformula astfel:

$$\begin{aligned} P(a_{est}[k] = -1 \mid a[k] = 1) &= P(a_d[k] < 0 \mid a[k] = 1) = \\ &= P\left(\frac{a[k] + d[k]}{\sqrt{2}} ray[2k] + \frac{a[k] - d[k]}{\sqrt{2}} ray[2k + 1] < 0 \mid a[k] = 1\right) \end{aligned} \quad (71)$$

Reamintim că  $ray[k]$  este o secvență distribuită Rayleigh și că, așa cum ne arată funcția densitate de probabilitate redată în figura 33, eșantioanele acestei secvențe pot lua doar valori pozitive. Să considerăm în continuare că  $d[k]=1$ . În această situație, probabilitatea din ecuația 71 se traduce:

$$P_1 = P(\sqrt{2}ray[2k] < 0) \quad (72)$$

Ori, această probabilitate este nulă. Dacă  $d[k] = -1$ , revenim la exact același gen de problemă. Concluzionăm în acest context că probabilitatea ca demodulatorul să conducă la o decizie incorectă în cazul transmisiei unui simbol de "1" este zero. Reamintim că se pleacă de la ipoteza că singurul efect de distorsiune asupra semnalului util este dat de către secvența distribuită Rayleigh, și ignorăm prezența zgomotului alb.

Către exact același tip de raționament ne conduce și scenariul în care se presupune transmisia unui simbol negativ ( $a[k] = -1$ ). În această situație, concluzia importantă la care se ajunge este că, dacă am presupune un canal fără zgomot aditiv, fadingul variant în timp nu introduce erori, indiferent cât de mare este împrăștierea Doppler. Concluzia teoretică este sprijinită de simulări, care ne arată BER=0 în scenariul amintit. Desigur că, în realitate vom avea mereu un zgomot aditiv care perturbă semnalul. Totuși, rezultatul precedent ne arată că undișoara Haar, folosită într-o modulație WOFDM este foarte rezistentă la erorile pe care le introduce variabilitatea în timp a canalului. Comparativ cu celelate undișoare pentru care se raportează rezultate în figurile 38 și 39, să notăm că filtrele folosite în implementare au nu mai puțin de 18 coeficienți nenuli în cazul Coiflet și 12 coeficienți nenuli pentru celelate undișoare. Aceasta înseamnă că fiecare simbol recepționat va depinde de un număr mult mai mare de simboluri consecutive, context în care probabilitatea de eroare crește. Pentru a avea o imagine globală, să observăm că fiecare eșantion emis în canal este o sumă ponderată de coeficienți de aproximare și detaliu, din vectorul de date de la intrare. Pe de altă parte, trecerea prin demodulatorul DWT reconstituie acești coeficienți printr-o sumă ponderată de eșantioane din semnalul de la intrare. O eroare se produce atunci când semnul acestei sume este diferit de cel pe care ar trebui să îl "impună" simbolurile de intrare (coeficienți de aproximare și detaliu). În cazul transformării Haar este vorba despre doar două eșantioane consecutive, dar numărul acesta este cu mult mai mare în cazul tuturor celorlalte transformări. Înmulțirea acestor eșantioane cu secvența de fading poate conduce la apariția unor erori chiar și în lipsa zgomotului aditiv, dacă ne referim la un alt tip de filtru decât Haar și la mai mult de o singură iterație a transformării..

#### **4.1.2 Influența numărului de momente nule**

Se poate merge mai departe cu analiza undișoarelor folosite, luând de data aceasta în considerare un alt parametru al transmisiei, și anume numărul de momente nule [Mal'99]. În acest scop, o selecție a rezultatelor obținute pentru toate undișoarele este arătată în tabelul 1.

Referitor la influența numărului de momente nule, ea este evidentă în cazul undișoarelor din familia Daubechies (câștig de 4 dB pentru Daubechies-4 față de Daubechies-20), confirmând că undișoarele mai bine localizate în timp oferă performanțe mai bune în cazul transmisiei printr-un canal variant în timp cu fading plat. Aceeași tendință poate fi observată în cazul tuturor familiilor de undișoare prezentate, dar cu rezultate mai puțin pregnante.

Ca o vedere globală, tabelul 1 sprijină și concluziile din figura precedentă. Performanța cea mai bună (exceptând undișoara Haar) la un anumit RSZ este marcată prin intermediul unui fundal gri. Se observă din tabel că, făcând excepția mai sus amintită, pe locul al doilea putem regăsi undișoara Daubechies 4, care este implementată prin intermediul unor filtre cu 4 coeficienți. Această diferențiere este importantă la valori mari ale RSZ, unde se poate presupune că ponderea cea mai importantă a erorilor este dată de împrăștierea Doppler.

Eb/No	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Haar	0.1255	0.0879	0.0580	0.0366	0.0218	0.0127	0.0072	0.0041	0.0025	0.0016	0.0011
Daub4	0.1466	0.1086	0.0776	0.0536	0.0361	0.0241	0.0160	0.0109	0.0075	0.0053	0.0040
Daub8	0.1468	0.1088	0.0774	0.0535	0.0363	0.0244	0.0166	0.0115	0.0082	0.0063	0.0051
Daub12	0.1466	0.1086	0.0775	0.0537	0.0365	0.0248	0.0170	0.0122	0.0093	0.0073	0.0061
Daub16	0.1465	0.1086	0.0775	0.0536	0.0368	0.0251	0.0178	0.0131	0.0100	0.0082	0.0071
Daub20	0.1464	0.1085	0.0773	0.0539	0.0370	0.0256	0.0183	0.0137	0.0109	0.0091	0.0081
Symmlet4	0.1469	0.1088	0.0775	0.0536	0.0362	0.0242	0.0162	0.0110	0.0077	0.0056	0.0043
Symmlet6	0.1468	0.1088	0.0777	0.0538	0.0362	0.0243	0.0164	0.0113	0.0081	0.0061	0.0048
Symmlet8	0.1467	0.1088	0.0776	0.0536	0.0365	0.0245	0.0166	0.0116	0.0083	0.0064	0.0053
Symmlet10	0.1467	0.1088	0.0777	0.0536	0.0365	0.0245	0.0168	0.0118	0.0087	0.0067	0.0055
Coiflet1	0.1467	0.1089	0.0776	0.0537	0.0363	0.0242	0.0163	0.0110	0.0078	0.0057	0.0044
Coiflet2	0.1467	0.1089	0.0775	0.0537	0.0362	0.0242	0.0162	0.0110	0.0078	0.0057	0.0044
Coiflet3	0.1468	0.1087	0.0776	0.0538	0.0362	0.0244	0.0165	0.0113	0.0080	0.0060	0.0047
Coiflet4	0.1467	0.1089	0.0776	0.0537	0.0364	0.0245	0.0167	0.0115	0.0083	0.0064	0.0051
Coiflet5	0.1465	0.1086	0.0777	0.0536	0.0364	0.0245	0.0167	0.0117	0.0085	0.0066	0.0054

Tabel 1: Selecție a performanței BER pentru  $f_m=0.05$  și o singură iterație IDWT.

## 4.2 Influența numărului de iterații ale IDWT asupra performanțelor transmisiei

Se va studia în continuare influența numărului de iterații IDWT asupra performanțelor transmisiei. În acest scop, pentru toate undișoarele testate, se va face o comparație între performanța BER atunci când se implementează o singură iterație a transformatei față de situația când se vor implementa patru iterații. Rezultatele sunt arătate în figurile 41 (pentru  $f_m=0.05$ ) și 42 (pentru  $f_m=0.005$ ). În acest sens se observă o pierdere de peste 3 dB, pentru toate undișoarele testate, atunci când creștem numărul de iterații ale transformatei în modulator. În figura 43, atunci când considerăm o deplasare

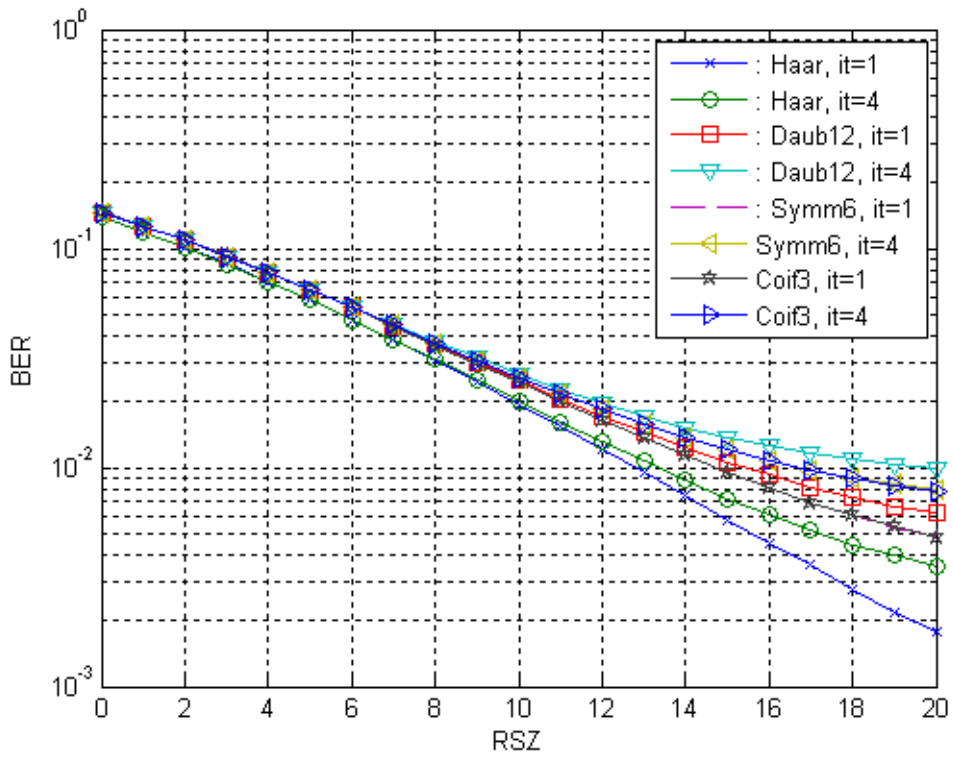


Fig. 41: Influența numărului de iterații IDWT asupra performanțelor transmisiei,  $f_m=0.05$ .

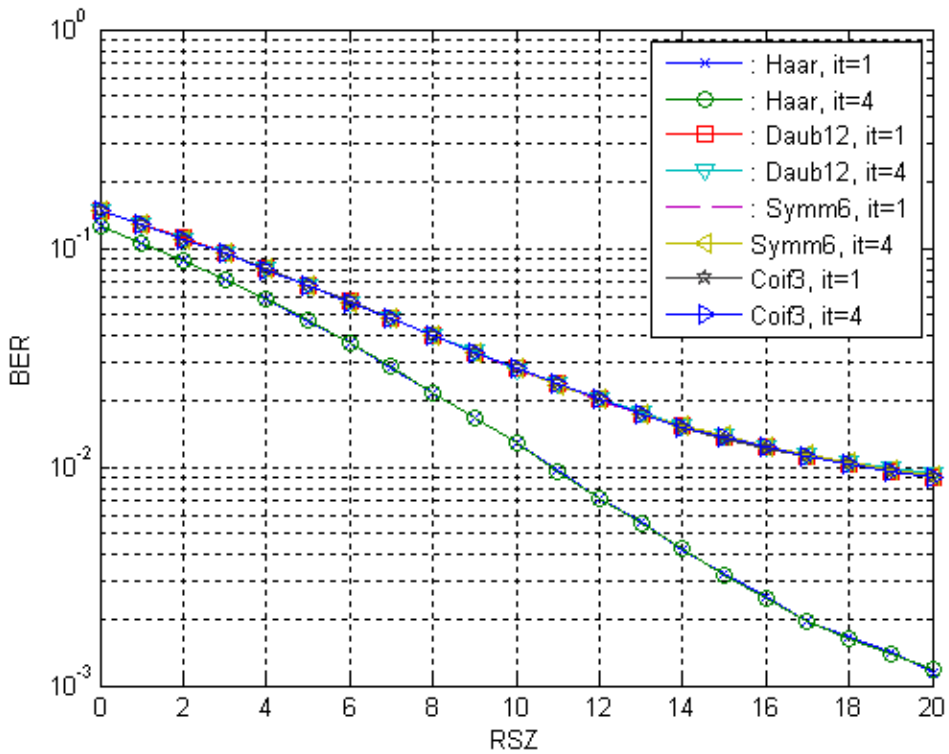


Fig. 42: Influența numărului de iterații IDWT asupra performanțelor transmisiei,  $f_m=0.005$ .

Doppler de 10 ori mai mică, nu mai există diferențe semnificative nici între undișoare, nici în funcție de numărul de iterații, excepție făcând undișoara Haar, care are un câștig de 9dB față de celelalte undișoare, la un BER de 0.009. Acest lucru ne confirmă ideea că degradarea performanțelor odată cu creșterea numărului de iterații este determinată în primul rând de către variabilitatea în timp a canalului radio. Referindu-ne la implementarea dată în figura 40 și la cazul cel mai simplu, reprezentat de undișoara Haar, dacă dorim introducerea încă a unei iterații, expresia semnalului  $s[n]$  transmis în canal se va complica. Fiecare eșantion din semnalul  $s[n]$  va depinde de mai mulți coeficienți din semnalul de intrare, față de cazul cu o singură iterație. În cazul cel mai simplu, când mai adăugăm încă o iterație a transformatei pentru undișoara Haar, valoarea unui eșantion din secvența  $s[n]$  va fi dependentă de un coeficient de aproximare corepunzând iterației 2, și doi coeficienți de detaliu (unul din iterația 2 și unul din iterația 1). Scenariul se complică dacă vom mări în continuare numărul de iterații. În cazul undișoarei Haar, se poate stabili că la compunerea fiecărui eșantion din semnalul transmis în canal contribuie  $n_{it}+1$  simboluri de intrare. Acesta este cazul cel mai favorabil, dar pentru filtrele de lungimi mai mari, numărul de simboluri de intrare de care depinde un singur eșantion al semnalului de ieșire va crește. În general, se poate stabili următoarea relație:

$$n_t = (n_{it} + 1) \frac{L_{filt}}{2} \quad (73)$$

unde  $n_t$  indică numărul de eșantioane din semnalul de intrare care contribuie la compoziția unui eșantion din semnalul de ieșire, iar  $n_{it}$  este numărul de iterații al transformatei.

Privind lucrurile dintr-un alt punct de vedere, ceea ce caracterizează implementarea WOFDM este faptul că durata simbolurilor transmise la fiecare scară (la fiecare iterație) este diferită. Astfel, la scara cea mai fină (după o singură iterație) avem undișoarele purtătoare cele mai compacte în timp, și acolo se transmit cele mai multe simboluri (jumătate din numărul total de simboluri). În a doua iterație, undișoarele purtătoare au un suport temporal dublu și în acest caz ele vor fi modulate de doar jumătate din numărul de simboluri de la prima iterație. Procesul continuă în aceeași manieră până când se atinge numărul de iterații dorit. Acest mod de a vedea lucrurile ne-a condus înspre ideea că scările unde durata simbolurilor este mai mică ar trebui să prezinte mai puține erori decât acelea în care simbolurile transmise sunt de durată mai mare. Supoziția a fost verificată în [Bel,Man'02, Man'01] pentru o transmisie multi-rată și a fost folosită pentru identificarea canalului.

Pentru verificarea acestei idei, datele transmise pe fiecare set de purtătoare au fost folosite pentru a calcula o rată a erorii de bit parțială pe fiecare scară. În figurile 43 și 44 avem performanța BER a transmisiei, la diverse scări de descompunere, pentru undișoara Haar. Putem observa din cele două figuri că, în timp ce numărul de erori nu variază semnificativ cu scara de transmisie în situația în care deplasarea Doppler este mică (fig. 43), lucrurile se schimbă atunci când creștem de 10 ori valoarea acestui parametru (fig. 44). Într-o oarecare măsură, explicația pentru aceste rezultate o putem găsi în relația (62), care ne arată valorile între care se încadrează timpul de coerență al canalului. Astfel, pentru  $f_m=0.005$  timpul de coerență al canalului este de 84 de ori mai mare decât durata unui simbol serial. În această situație, chiar și la scara a 4-a de descompunere (după 4 iterații) durata simbolurilor ( $16T_S$ ) este de peste 5 ori mai mică decât timpul de coerență al canalului. În cel de al doilea caz luat în considerare, avem  $T_c=8.46T_S$ . Aceasta ne arată durate de simbol egale cu acest timp, începând cu a treia iterație, și chiar duble la cea de a patra iterație. Este prin urmare firesc ca în acest caz, semnalul, mai ales cel de la scările mai mari, unde se transmit simboluri de durate comparabile cu timpul de coerență al canalului, să fie puternic afectat de variabilitatea în timp a canalului radio. Astfel, la iterația 4 observăm pierderi de peste 6dB față de prima iterație, pierderi care se regăsesc și la celelalte undișoare testate.

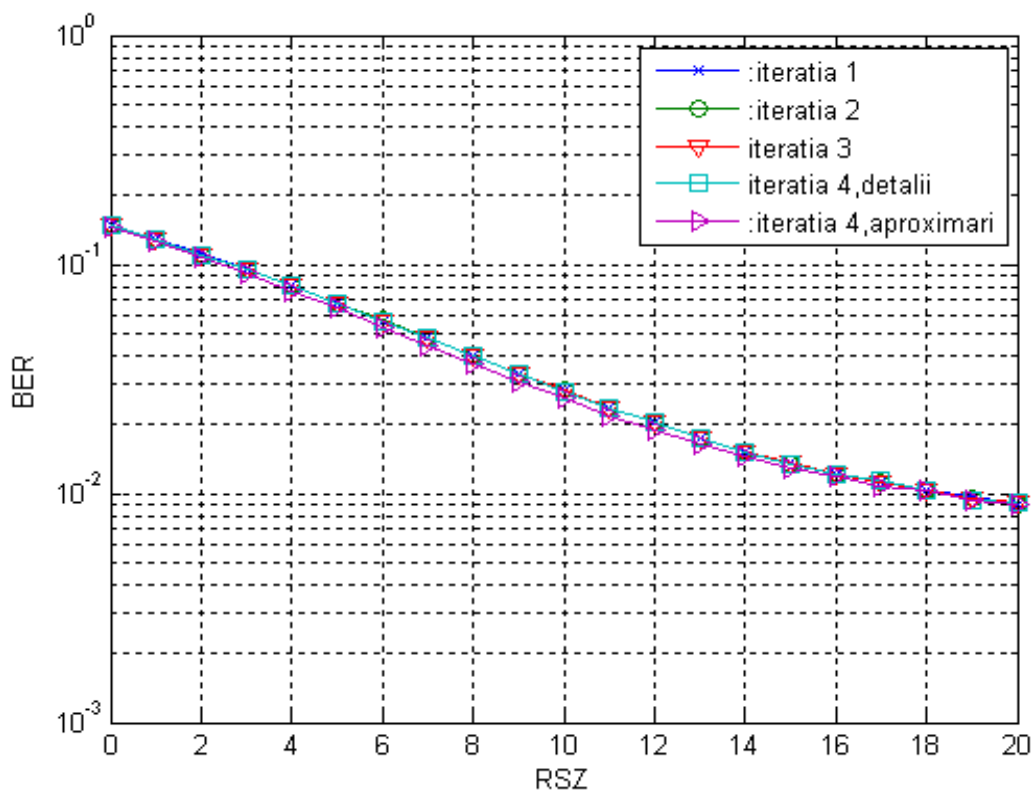


Fig. 43: Performanța BER pe cele 4 niveluri de descompunere,  $f_m=0.005$ .

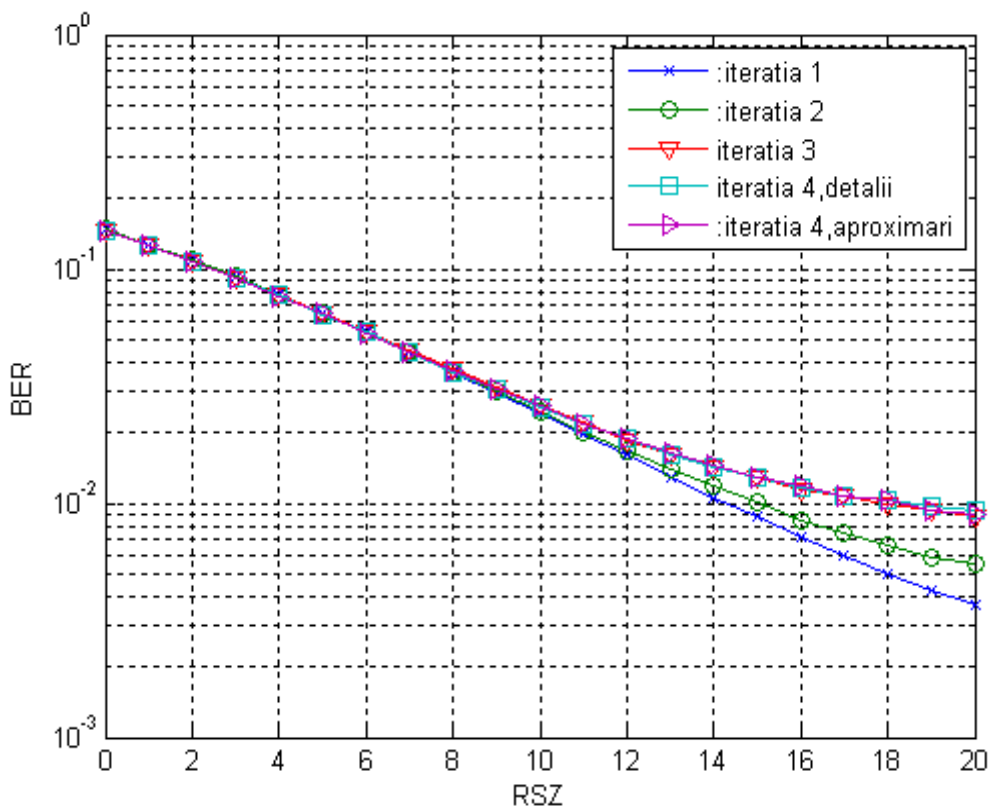


Fig. 44: Performanța BER pe cele 4 niveluri de descompunere,  $f_m=0.05$ .

O altă observație este că, în acest ultim caz, diferențele între undișoare încep să fie notabile mai ales la RSZ suficient de mari (peste 10 dB), adică acolo unde principala sursă a erorilor este variabilitatea în timp a canalului.

Pentru a putea sintetiza mai bine aceste observații, se vor reprezenta statistici ale erorilor observate în cazul a 4 undișoare testate, aceleași care au fost folosite și în secțiunea precedentă. De data aceasta, vom calcula o creștere procentuală a ratei erorii de la o scară la alta. Vom începe cu cazul care pune cel mai bine în evidență această creștere, și anume acela în care  $f_m=0.05$ , iar  $RSZ=20$ dB. Statistica creșterii BER de la o iterație la alta a IDWT este ilustrată în figura 45.

Se observă că, pentru toate undișoarele testate, se verifică observațiile anterioare. Cea mai mare creștere procentuală a erorii se manifestă în general de la iterația 1 la iterația 2 (50% pentru undișoara Haar și peste 75% pentru celelalte undișoare). Creșterea procentuală a erorii între iterația 2 și iterația 3 se manifestă cel mai pregnant la undișoara Haar (aproape 60%). Explicația rezidă în faptul că, pentru această undișoară, care este cea mai scurtă dintre cele testate, durata temporală a purtătoarei devine comparabilă cu timpul de coerență abia la trecerea de la iterația 2 la iterația 3, în



timp ce pentru celelalte undișoare, mai dilatate în timp, variabilitatea canalului influențază puternic performanțele transmisiei începând de la iterația 2.

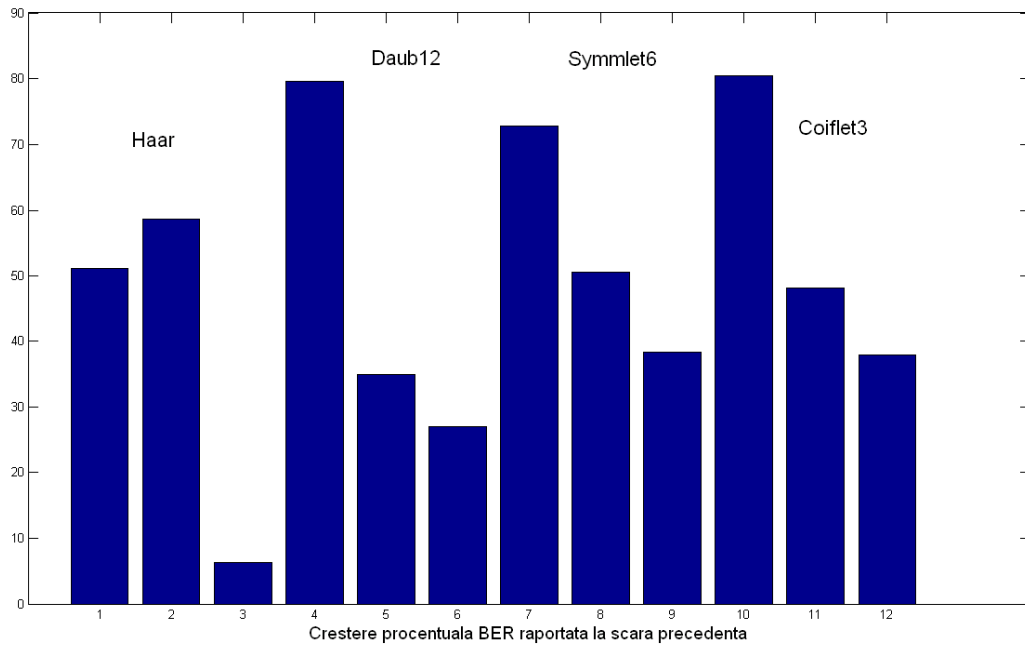


Fig. 45: Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la RSZ=20dB și  $f_m=0.05$ .

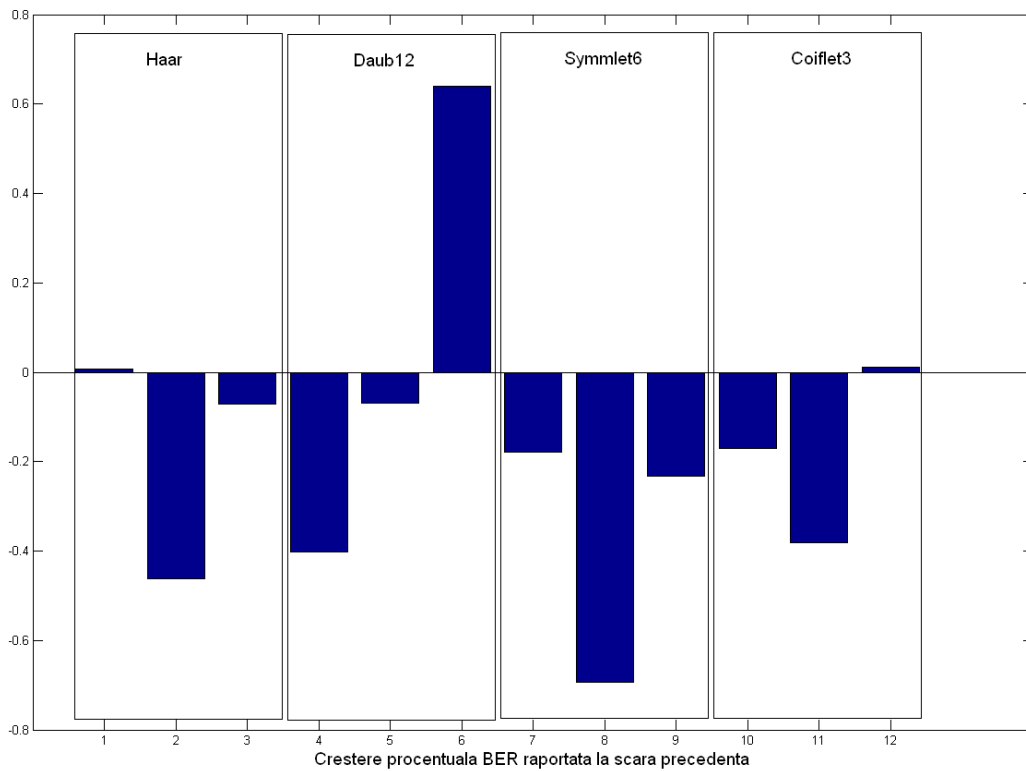


Fig. 46: Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la RSZ=0dB și  $f_m=0.05$ .

Pe de altă parte, se arată în figura 46 că, în condiții de RSZ mic, rata erorii nu depinde practic de scara la care se face transmisia. Variațiile BER de la o scară la alta sunt nesemnificative (sub 1%), iar uneori rata erorii chiar descrește uneori. În general, același gen de concluzie poate fi tras pentru deplasări Doppler mici, care conduc la timpi de coerență ai canalului suficient de mari încât să nu influențeze prea mult transmisia. Reultatele obținute pentru  $f_m=0.005$  și  $RSZ=20dB$  sunt arătate în figura 47.

Singura undișoară care arată un tipar constant de creștere a BER este Daubechies 12, totuși cu o valoare maximă a saltului BER de doar 16%, de peste 4 ori mai mic decât la  $f_m=0.05$ . De asemenea, creșteri de 10% între scara 2 și scara 3 ne arată și celelalte undișoare, cu excepția undișoarei Haar pentru care, din motivele expuse, variația nu este relevantă.

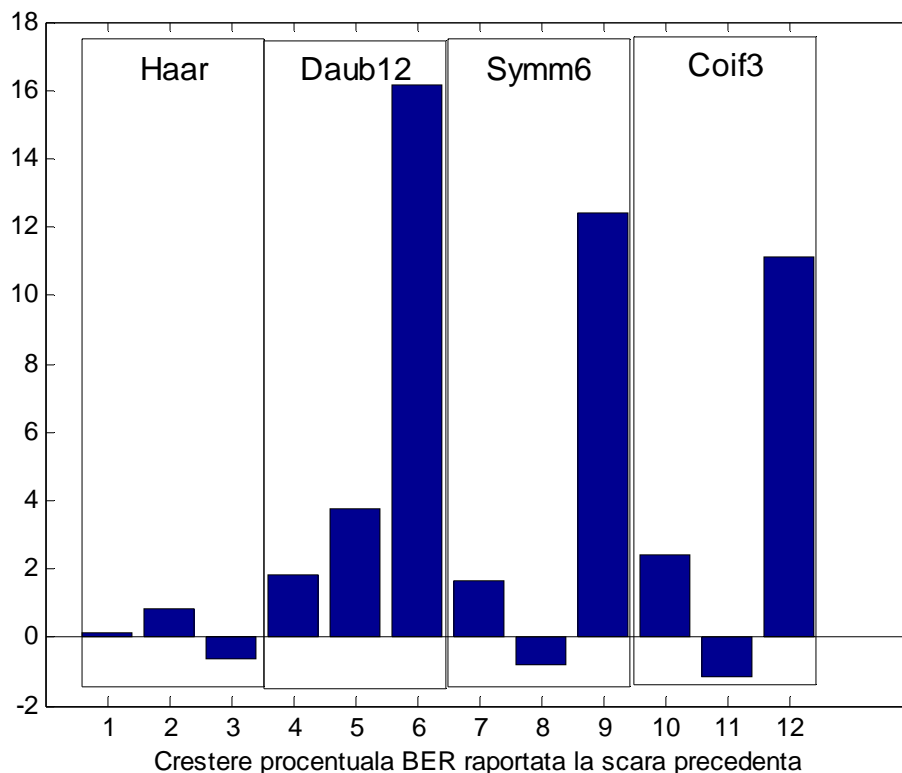


Fig. 47: Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la  $RSZ=20dB$  și  $f_m=0.005$ .

### 4.3 Asocierea transmisiei WOFDM cu coduri corectoare de erori

În orice sistem de transmisie întâlnit în practică, datele se codează înainte de a fi transmise prin canal. Acest lucru permite receptorului să detecteze și să corecteze erorile pe care mediul de transmisie le introduce. Unul dintre cele mai puternice instrumente de codare folosit actualmente

este constituit de turbo-coduri [Ber,Gla'93]. Acestea sunt utilizate la scară largă în sistemele de transmisie prin satelit, în sistemele de comunicații celulare (de ex. Wireless Code Division Multiple Acces), etc. O versiune de turbo cod o constituie turbo-codurile multi-binare [Dou,Ber'05], care sunt construite prin concatenarea paralelă a două coduri convoluționale binare recursive (Recursive Systematic Convolutional, RSC) bazate pe registre liniare de deplasare cu reacție cu intrări multiple ( $r$  intrări). Și aceste turbo-coduri duo-binare și-au găsit o gamă mare de aplicabilitate, ele fiind folosite în sistemul DVB precum și în standardul IEEE 802.16 pentru tehnologia WiMAX.

O asociere a turbo-codurilor cu tehnica WOFDM nu este extensiv prezentată în literatură. Acolo unde există [Zha,Zha'03], rezultatele obținute sunt promițătoare și ne arată că o asemenea asociere merită să fie studiată mai în detaliu. Prin urmare, plecând de la schema din figura 23, se adaugă în lanțul de transmisie un bloc care se ocupă cu codarea, respectiv decodarea canalului. Lanțul de transmisie pe baza căruia se efectuează simulările ale căror rezultate vor fi discutate în continuare este ilustrat în fig. 47.

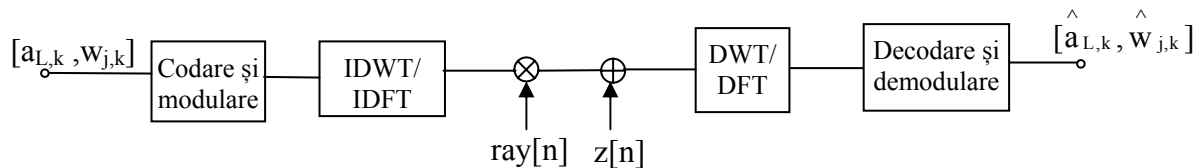


Fig. 47: Implementarea modulației WOFDM asociată cu turbo-codul duo-binar.

Parametrii utilizați pentru realizarea simulărilor sunt sintetizați în tabelul 2. Astfel, datele de transmis, generate de către o sursă aleatoare, vor fi trecute prin blocul de codare, și apoi mapate pe simboluri complexe, conform constelației de modulare alese. Întrucât în simulări se lucrează cu o modulație BPSK, șirul binar de la ieșirea codorului este transformat într-o succesiune de simboluri bipolare echiprobabile. Modularea este făcută cu ajutorul blocului IDWT, sau IDFT în cazul în care se dorește simularea transmisiei OFDM. Datele sunt apoi trecute prin canal (efectul multiplicativ dat de variabila distribuită Rayleigh și cel aditiv dat de către zgomotul alb). La receptor sunt realizate operațiile complementare: decodare și demodulare. De notat că decodorul lucrează cu o intrare “soft”, adică la intrarea sa nu sunt aduse valori binare sau bipolare (de ex. +1 și -1), ci valori ale eșantioanelor sosite la recepție, alterate de trecerea prin canal, asupra cărora nu s-a luat în prealabil o decizie de tip binar. Decodorul încorporează un detector, care, după efectuarea unui anumit număr de iterații ale algoritmului de decodare va lua decizia asupra simbolului transmis. În cele din urmă, pentru evaluarea erorii, se folosesc măsurile clasice, adică BER și FER.

Simulările transmisiei multi-purtătoare turbo-codate au urmat două direcții: în primul rând s-a dorit re-evaluarea comparației dintre performanțele OFDM și WOFDM, de data aceasta prin prisma codării, iar în cel de al doilea rând s-a dorit a se vedea dacă, și în ce măsură, undișoarele cu suport temporal compact se comportă mai bine decât cele dilatate în timp, așa cum rezulta din primele simulări. În primul set de simulări, s-a considerat cazul mai simplu, al unui canal AWGN, în care singurul efect ce afectează semnalul transmis este un zgomot alb, aditiv.

Tabel 2: Parametrii folosiți pentru simularea transmisiei WOFDM codate.

Parametru	Variantă aleasă
Configurația turbo-codului	Paralel
Codul component	Cod RSC cu memorie 3
Rata codului	1/2
Puncturare	NU
Modulare	BPSK
Sisteme	OFDM cu ieșire reală WOFDM, o iterație, cu undișoarele mamă Haar, Daubechies-12, Symmlet-6, Coiflet-3 N=1024 purtătoare
Canal	Fading plat, distribuit Rayleigh fm=0.05
Interleaver	S-interleaver, S=9
Lungimea blocului de date codat	2 x 256 = 512 biți
Algoritm de decodare	MaxLogMAP
Numărul de iterații	15 iterații cu un criteriu de oprire bazat pe distribuția APP (A Posteriori Probability).
Număr de blocuri transmise	Invers proporțional cu logaritmul erorii

Rezultatele obținute (fig. 48) confirmă concluziile rezultate în cazul transmisiei necodate, și anume că, pentru transmisia în canale AWGN, nu există diferențe în ceea ce privește performanța sistemelor testate.

Performanța BER pentru toate sistemele testate (descrise în tabelul 2), în cazul unui canal cu fading plat de tip Rayleigh, este ilustrată în figura 49. Două concluzii se desprind din figura 49. În primul rând, toate versiunile de WOFDM conduc la performanțe mai bune decât în cazul OFDM, câștigul fiind de aproximativ 0.3 dB, pentru un BER de 0.0002. A doua observație este că nu există diferențe semnificative în ceea ce privește performanța BER a diverselor versiuni de WOFDM (care folosesc

diverse undișoare mamă). Aceste concluzii sunt verificate și din punctul de vedere al ratei erorii pe cadru, ilustrată în figura 50. De data aceasta, diferența între OFDM și WOFDM este mai redusă. Se observă și în acest caz suprapunerea curbelor de performanță corespunzătoare diverselor versiuni de WOFDM. redusă. Se observă și în acest caz suprapunerea curbelor de performanță corespunzătoare diverselor versiuni de WOFDM.

Dacă în cazul transmisiei necodate, undișoara Haar permitea, de departe, obținerea celor mai bune rezultate, folosirea turbo-codurilor uniformizează rezultatele obținute, datorită puterii mari de corecție a acestora.

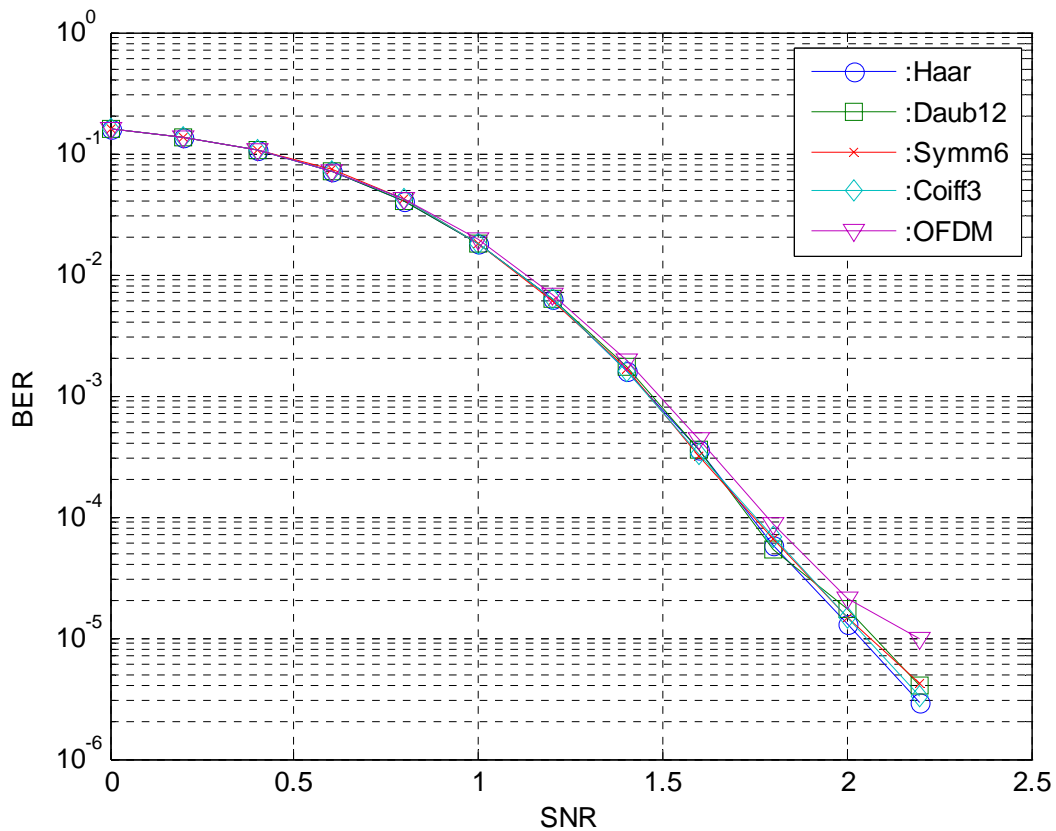


Fig. 48: Performanța BER a transmisiilor WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-binar, în canale AWGN.

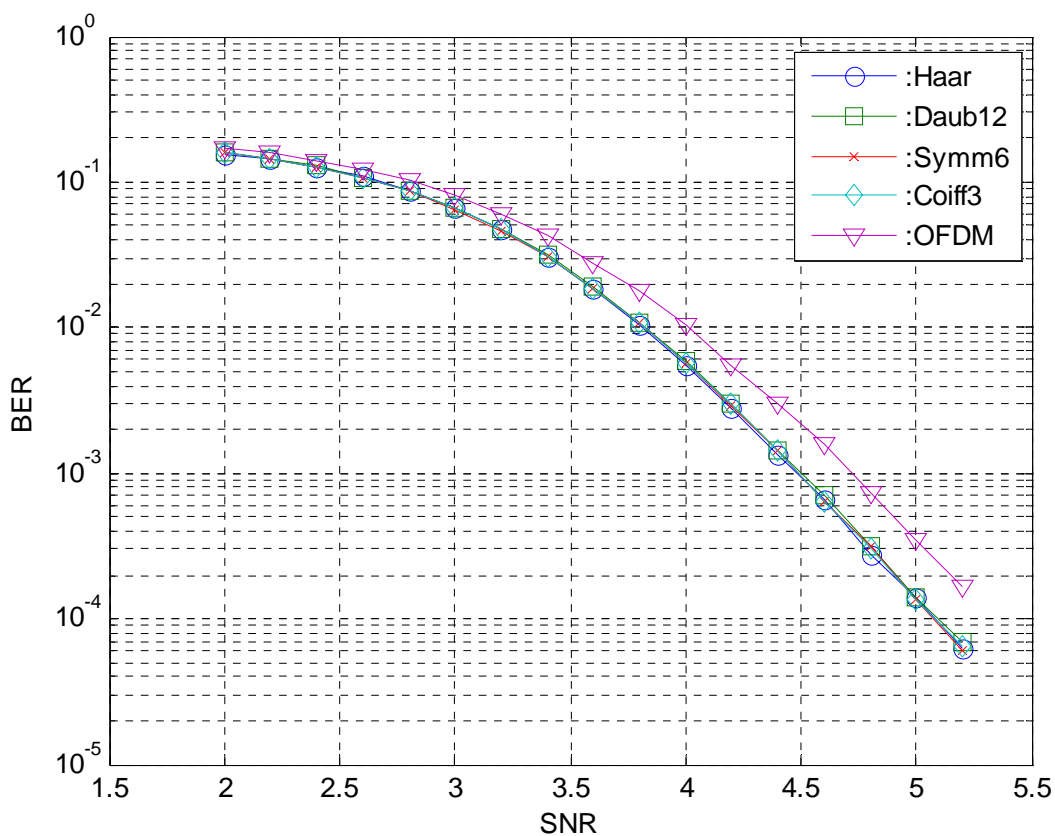


Fig. 49: Performanța BER a transmisiilor WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-binar, în canale cu fading plat.

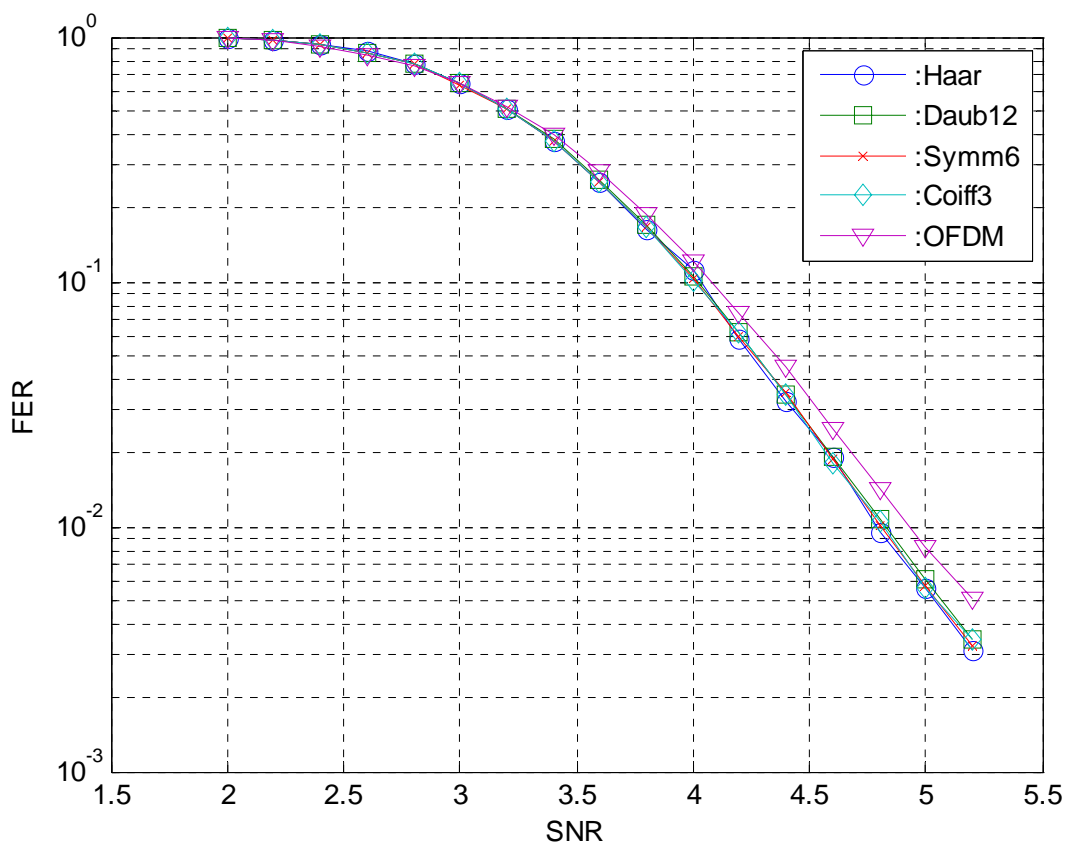


Fig. 50: Performanța FER a transmisiilor WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-binar, în canale cu fading plat.

## Bibliografie

- [Bah,Sal'02] A. Bahai, B. Saltzberg, "*Multicarrier Digital Communications, Theory and Applications of OFDM*", Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [Bin'90] J. A. C. Bingham, "*Multicarrier modulation for data transmission: an idea whose time has come*", IEEE Communications Magazine, pag. 5-14, mai 1990.
- [Cim'85] L. Cimini, "*Analysis and Simulation of a Digital Mobile Channel Using Orthogonal Frequency Division Multiplexing*", IEEE Transactions on Communications, Volume: 33, Issue: 7, iulie 1985, pag. 665-675.
- [ETSI'00] ETSI, "*Digital Video Broadcasting (DVB);OFDM modulation for microwave digital terrestrial television*", released in 2000, ETSI publication download area, available on-line at: <http://pda.etsi.org/pda/AQuery.asp> .
- [IEEE'03]: IEEE Standards Association, "*Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications, High-speed Physical Layer in the 5 GHz Band*", Supplement to 802.11a 1999, iunie 2003, disponibil on-line la: <http://standards.ieee.org/getieee802/download/802.11a-1999.pdf> .
- [IEEE'04], IEEE IEEE Standards Association, "*IEEE Standard for Local and metropolitan area networks Part 16: Air Interface for Fixed Broadband Wireless Access Systems*", 2004, disponibil on-line la: <http://standards.ieee.org/getieee802/download/802.16-2004.pdf> .
- [Fla'04], Flarion Technologies, "*FLASH-OFDM for 450MHz: Advanced Mobile Broadband Solution for 450MHz Operators*", noiembrie 2004, disponibil on-line la: <http://whitepapers.silicon.com/0,39024759,60131016p,00.htm> .
- [Bin'00]: J. A. C. Bingham, "*ADSL, VDSL and Multicarrier Modulation*", Wiley Interscience, noiembrie 2000.
- [Lam, Hub'00]J. Lampe, J. Huber, „*Bandwidth Efficient Power Line Communications Based on OFDM*”, International Journal of Electronics, vol. 54, 2000.
- [Fis,Hub'96] R. Fischer , J. Huber, "*A New Loading Algorithm for Discrete Multitone Transmission*", Proceedings of *GLOBECOM'96*, London, pag. 724-728, noiembrie 1996.
- [Olt'04] M.Oltean, "*An Introduction to Orthogonal Frequency Division Multiplexing*", Analele Universitatii din Oradea -2004, Fascicola Electrotehnica, Sectiunea Electronica, pag 180-185.
- [Skl'97-1] B. Sklar, "*Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems –part I: Characterization*", IEEE Communications Magazine, vol. 35, no. 7, pag. 136 - 146, iulie 1997.

- [Skl'97-2] B. Sklar, "*Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems –part II: Mitigation*", IEEE Communications Magazine, vol. 35, no. 9, pag. 148 - 155, septembrie 1997.
- [Muq,Cou'00] B. Muquet, M. de Courville; P. Dunamel; G. Giannakis, "*OFDM with trailing zeros versus OFDM with cyclic prefix: links, comparisons and application to the HiperLAN/2 system*", Proceedings of IEEE International Conference in Communications, vol. 2, pag. 1049-1053, iunie 2000.
- [Hen,Tau'02] W. Henkel, G. Tauböck, P. Ölding, "*The cyclic prefix of OFDM/DMT – an analysis*", Proceedings of the International Zürich Seminar on Broadband Communications, Zürich, Switzerland, pag. 22.1- 22.3, februarie 2002.
- [Ahm'00] N. Ahmed, Thesis for the degree of Master of Science, "*Joint Detection for Orthogonal Frequency Division Multiplexing*", Rice University, USA, aprilie 2000, disponibil on-line la: <http://scholarship.rice.edu/bitstream/handle/1911/19657/Ahm2000Apr2JointDetec.PDF?sequence=1>
- [Jon,Dil'01] .W. Jones and J.C. Dill, "*The square root raised cosine wavelet and its relation to the Meyer functions*", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 49, pag. 248-251, January 2001.
- [Lau'03] A.P.T. Lau, Technical Report, "*Nyquist's first criterion and pulse shaping using wavelets*", Stanford University, November 2003, disponibil on-line la: <http://www.stanford.edu/~alanlau/wavelet.pdf>.
- [Olt,Naf'07] M. Oltean, M. Naformita, "*Efficient Pulse Shaping and Robust Data Transmission Using Wavelets*", Proceedings of the third IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing, WISP 2007, Alcalá de Henares, Spain, octombrie 2007, pag. 43-48.
- [Rai'01] Rainmaker Technologies Inc., "*RM Wavelet Based (WOFDM) PHY Proposal for 802.16.3*", 2001, disponibil on-line la: [http://www.ieee802.org/16/tg3/contrib/802163c-01\\_12.pdf](http://www.ieee802.org/16/tg3/contrib/802163c-01_12.pdf).
- [Kog,Kod'03] H. Koga, T. Kodama, N. Konishi, "*High-speed Power Line Communication System based on Wavelet OFDM*", Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Symposium on Power Line Communications and its Applications, Kyoto, Japan, Martie 2003, pag. 226-231.
- [Lak,Nik'06] M. K. Lakshmanan, H. Nikookar, "*A Review of Wavelets for Digital Wireless Communication*", Springer Netherlands, Volume 37, No. 3-4, mai, 2006.
- [Naf,Gor'95] I. Naorniță, C. Gordan, A. Isar, "*Semnale, Circuite și Sisteme*", Editura "Politehnica", Timișoara, 1995.
- [Isa,Naf'98] A. Isar, I. Naorniță, "*Reprezentări timp-frecvență*", Editura "Politehnica", Timișoara, 1998.



- [Pol'01], R. Polikar, „*The Engineer's Ultimate Guide to Wavelet Analysis: the Wavelet Tutorial*”, ianuarie 2001, disponibil on-line la: <http://users.rowan.edu/~polikar/wavelets/wttutorial.html> .
- [Dau'92] I. Daubechies, “*Ten Lectures on Wavelets*”, CBMS-NSF Lecture Notes nr. 61, SIAM, 1992.
- [Mal'99] S. Mallat, “*A wavelet tour of signal processing (second edition)*”, Academic Press,1999.
- [Pro'95] J.G.. Proakis, “*Digital Communications, 3rd Edition*”, McGraw-Hill Book Co., 1995.
- [Kab'03] L.D. Kabulepa, “*OFDM Basics for Wireless Communications*”, 2003, disponibil on line la: [http://www.mes.tu-darmstadt.de/lectures/winter/vlsi\\_comms/download/chap2\\_OFDM\\_basics.pdf](http://www.mes.tu-darmstadt.de/lectures/winter/vlsi_comms/download/chap2_OFDM_basics.pdf)
- [Dar,Tra'00] D. Dardari, V. Tralli, A. Vaccari; “*A Theoretical Characterization of Nonlinear Distortion Effects in OFDM Systems*”, IEEE Transactions on Communications, Vol. 48, No. 10, octombrie, 2000.
- [Olt,Naf'03] M. Oltean, M. Naforniță, “*The Cyclic Prefix Length Influence on OFDM-Transmission BER*”, Buletinul Științific al Universității „Politehnica” Timișoara, Seria Electronică și Telecomunicații, Tom 48-62, Fascicola 2, 2003, pag. 26-29.
- [Aba,Tor'05] J. Abad, L. Torres, J. Riveiro, “*OFDM and Wavelets Performance Comparison in Power Line Channels*”, Proceedings of International Symposium on Power Line Communications and Its Applications, 2005, pag. 341 – 345.
- [Buc,Don'05] J. Buckheit, D. Donoho, „*Wavelab Architecture*”, disponibil pe web la: [http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/Wavelab\\_850/WaveArch.pdf](http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/Wavelab_850/WaveArch.pdf) , decembrie 2005.
- [Man,Bel'01] M. J. Manglani, A. E. Bell, “*Wavelet Modulation Performance in Gaussian and Rayleigh Fading Channels*” , Proceedings of MILCOM 2001, McLean, VA, octombrie 2001, pag. 845 - 849.
- [Mar,Nic'97] I. Marghescu, S. Nicolaescu, N. Coțanis, “*Comunicații Mobile Terestre*”, Ed. Tehnică București, 1997.
- [Pop,Bea'01] M. Pop, N. Beaulieu, „*Limitations of Sum-of-Sinusoids Fading Channel Simulators*”, IEEE Transactions on Communications, Vol. 49, No. 4, aprilie 2001, pag. 699 – 708.
- [You,Bea'00] D. Young, N. Beaulieu, “*The Generation of Correlated Rayleigh Random Variates by Inverse Discrete Fourier Transform*”, IEEE Transactions On Communications, Vol. 48, No. 7, July 2000, pag. 1114 – 1127.
- [Loo,Sec'91] C. Loo, N. Secord, “*Computer Models for Fading Channels with Application to Digital Transmissions*”, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 40, No. 4, noiembrie 2001, pag. 700 – 703.

- [Bad,Bea'05] K. Baddour, N. Beaulieu, "*Autoregressive Modeling for Fading Channel Simulation*", IEEE Transactions On Wireless Communications, Vol. 4, No. 4, iulie 2005, pag. 1650 -1662.
- [Chi'94] A. Chini, "*Multicarrier Modulation in Frequency Selective Fading Channels*", Ph.D. Thesis, Carleton University, Ottawa, Canada, 1994.
- [Man'01] M. Manglani, "*Wavelet Modulation in Gaussian and Rayleigh Fading Channels*", Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, disponibil on-line la: <http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-08072001-093853/unrestricted/etdset.pdf> , 2001.
- [Bel,Man'02] A. Bell, M. Manglani, "*Wavelet Modulation in Rayleigh Fading Channels: Improved Performance and Channel Identification*", Proceedings of ICASSP 2002, pag. 2813 – 2816.
- [Ber,Gla'93] C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajashima, "*Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes*", Proceedings of ICC'93, Geneva, Switzerland, mai 1993, pag. 1064-1070.
- [Dou,Ber'05] C. Douillard, C. Berrou, "*Turbo Codes With Rate- $m/(m+1)$  Constituent Convolutional Codes*", IEEE Transactions on Communications, Vol. 53, No. 10, octombrie 2005, pag.1630-1638.
- [Zha,Zha'03] H. Zhang, F. Zhao, D. Yuan, M. Jiang, "*Performance of Turbo Code on WOFDM system on Rayleigh fading channels*", 14th IEEE Proceedings on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, PIMRC, 7-10 septembrie 2003, vol.2, pag. 1570- 1573.

## Anexa

Se pune problema simulării pe calculator a unei transmisii printr-un canal radio. În această situație, semnalul util  $s[n]$  este alterat de o secvență multiplicativă  $ray[n]$ , a cărei histogramă aproximează o densitate de probabilitate de tip Rayleigh, și de o secvență aditivă  $z[n]$  cu densitate de probabilitate Gaussiană. Toate acestea pot fi privite ca și realizări particulare ale unor procese aleatoare având proprietățile statistice amintite. Făcând presupunerea staționarității și ergodicității acestor procese, secvențele pot fi privite ca niște variabile aleatoare.

Semnalul ajuns la recepție poate fi astfel considerat ca fiind un rezultat al unor operații de înmulțire și adunare între variabile aleatoare:

$$r[n] = s[n] \cdot ray[n] + z[n] \quad (A1)$$

Pentru canalele cu zgomot alb, gaussian, aditiv și de medie nulă se definește raportul semnal pe zgomot, ca fiind raportul dintre puterea semnalului util și puterea zgomotului. Considerând și că secvența utilă este o secvență bipolară de + și -1, cu probabilități egale de apariție, raportul semnal pe zgomot poate fi exprimat ca:

$$RSZ = \frac{\text{var}(s)}{\text{var}(z)} \quad (A2)$$

Unde prin “var” se notează varianța variabilelor aleatoare. Pentru a putea discuta despre RSZ și în cazul existenței efectului multiplicativ de tip Rayleigh este nevoie ca, după multiplicarea semnalului util cu secvența distribuită Rayleigh, puterea medie a semnalului trebuie să se conserve. Această condiție se formulează ca:

$$\text{var}(s \cdot ray) = \text{var}(s) \quad (A3)$$

Varianța produsului a două variabile aleatoare se poate exprima ca:

$$\text{var}(s \cdot ray) = \text{var}(s) \cdot \text{var}(ray) + \overline{s}^2 \text{var}(ray) + \overline{ray}^2 \text{var}(s) \quad (A4)$$

unde prin  $\bar{x}$  notăm media variabilei aleatoare  $x$ .

Pentru cazul distribuției de tip Rayleigh, densitatea de probabilitate se exprimă ca:

$$pdf(x|\sigma) = \frac{x \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (A5)$$

În acest caz:

$\overline{ray} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ,  $\text{var}(ray) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$  și presupunând o valoare oarecare pentru varianța secvenței  $s$ ,  $\text{var}(s)=x$ , putem obține prin înlocuirea acestora în (A4):

$$x = x \cdot \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 + x \cdot \sigma^2 \frac{\pi}{2} \quad (A6)$$

În ecuația precedentă am ținut cont de faptul că semnalul util este de medie nulă. Prin identificare de termeni în (A6), se obține:

$$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2 + \sigma^2 \frac{\pi}{2} = 1 \quad (A7)$$

Această condiție este satisfăcută atunci când  $\sigma^2 = \frac{1}{2}$  în ecuația (A5). În general, aceasta este valoarea care se alege în cazul simulării pe calculator a canalelor radio, deoarece ea permite reutilizarea noțiunii de raport semnal pe zgomot într-un cadru mai larg decât acela al canalului AWGN.