

UTILIZAREA FILTRULUI KALMAN ÎN TELECOMUNICAȚII

REFERATUL nr. 3
în cadrul pregătirii pentru doctorat

Conducător științific: Prof. dr. ing IOAN NAFORNIȚĂ
Doctorand: As. ing GAL JANOS

CUPRINS

Capitolul 1	ESTIMAREA ȘI INTERPRETAREA NOȚIUNII DE FRECVENȚĂ INSTANTANEE	1
1.1	Introducere.....	1
1.2	Conceptul de frecvență instantanee.....	2
1.2.1	Conceptul de frecvență.....	2
1.2.2	Generalizarea conceptului de frecvență la semnalele nestaționare.....	4
1.2.3	Model. Notatii, definiții.....	10
1.3	Frecvența instantanee, întârzierea de grup, transformarea Hilbert și semnalul analitic.....	11
1.3.1	Transformarea Hilbert și semnalul analitic.....	11
1.3.2	Frecvența instantanee și întârzierea de grup.....	13
1.4	Influența produsului bandă \times durată (BT) asupra noțiunilor de frecvență instantanee și întârziere de grup.....	15
1.4.1	Lățimea de bandă, durată și semnale asimptotice.....	15
1.4.2	Definiții utile și proprietăți ale semnalelor asimptotice.....	17
1.4.3	Influența produsului $B \times T$ și a frecvenței centrale a semnalului asupra semnalului analitic.....	18
Capitolul 2	TEHNICI DE ESTIMARE A FRECVENȚEI PENTRU SEMNALE STAȚIONARE	20
2.1	Generalități.....	20
2.2	Tehnici de estimare a frecvenței instantanee.....	23
2.2.1	Definiția frecvenței instantanee în timp discret	23
2.2.2	Estimatori obișnuiți ai diferenței de fază.....	24
2.2.3	Versiuni mediate ale estimatorului diferenței de fază.....	25
2.2.4	Estimarea frecvenței instantanee prin metoda trecerilor prin zero... ..	27
2.2.5	Estimarea adaptivă a frecvenței instantanee.....	29
2.2.6	Algoritmul LMS.....	30
2.2.7	Estimarea adaptivă RLS a frecvenței.....	31
2.2.8	Estimarea frecvenței instantanee bazată pe momentele TFD.....	32
2.2.9	Estimarea frecvenței instantanee pe baza vârfurilor distribuțiilor timp-frecvență.....	34
Capitolul 3	IDENTIFICAREA SEMNALELOR CU FAZĂ POLINOMIALĂ PRIN UTILIZAREA FILTRAREA KALMAN EXTINS	37
3.1	Introducere.....	37
3.2	Reprezentarea în spațiul stărilor neliniar semnalelor cu fază polinomial	38

3.2.1 Modelul „spațiul-stărilor” și ecuația de tranziție.....	39
3.2.2 Ecuația de observare.....	40
3.3 Algoritmul EKF.....	41
3.3.1 Reactualizarea ecuațiilor de măsurare.....	42
3.3.2 Reactualizarea timpului.....	42
3.4 Rezultatele simulării.....	44
3.5 Concluzii.....	50
Bibliografie.....	51

CAPITOLUL I

ESTIMAREA ȘI INTERPRETAREA NOȚIUNII DE FRECVENȚĂ INSTANTANEE

1.1 INTRODUCERE

Importanța conceptului de frecvență instantanee, IF provine din faptul că, în multe aplicații, suntem confrunțați cu sarcina prelucrării unor semnale ale căror caracteristici spectrale (în particular frecvența la care apare vârful spectral) variază în timp. Adeseori astfel de semnale sunt numite „*nestaționare*”, un exemplu fiind semnalul chirp.

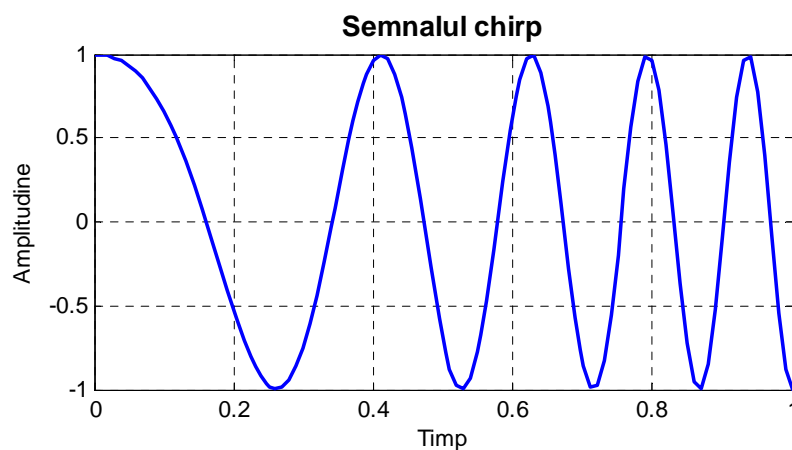


Figura 1.1 Semnalul chirp

Un astfel de semnal este modelabil printr-o sinusoidă a cărei „*frecvență*” se schimbă în timp. În prelucrările seismice astfel de semnale se utilizează ca o alternativă la semnalele produse prin explozii, deoarece au avantajul că se pot controla, practic, caracteristicile lor spectrale în aproape orice privință, incluzând durata, lățimea de bandă și energia. Astfel de semnale se utilizează, în mod curent, pentru estimarea schimbării de frecvență cauzată de efectul Doppler în cazul reflexiilor RADAR sau al

urmăririi unor obiecte prin sistemul SONAR pasiv. Ele se mai întâlnesc în lumea vie, ca în cazul sistemelor de eco-locuție al liliecilor.

Pentru aceste semnale IF este o caracteristică importantă. Este un parametru variabil în timp ce localizează vârful spectral al semnalului, variabil în ca poziție pe axa frecvenței. IF poate fi interpretată, conceptual, ca fiind frecvența unei sinusoide care se „potrivește” local „cel mai bine” cu semnalul supus analizei. Din punct de vedere fizic o astfel de abordare are sens numai pentru semnalele monocomponentă.

1.2 CONCEPTUL DE FRECVENȚĂ INSTANTANEE

1.2.1 Conceptul de frecvență

În mecanică frecvența mișcării oscilatorii este definită ca fiind numărul oscilații efectuate în unitatea de timp. Într-o singură oscilație, corpul ce efectuează oscilațiile pleacă din punctul de echilibru, ajunge la o extremă, apoi la cealaltă extremă și revine în punctul de echilibru în același sens de mișcare cu începutul.

Un tip aparte de mișcare oscilatorie este oscilație armonică, în care accelerația este proporțională cu elongația (deplasarea față de punctul de echilibru) și este îndreptată întotdeauna, ca sens, spre punctul de echilibru. Atunci când un corp greu se mișcă cu viteză unghiulară, ω , constantă, pe un cerc, proiecția sa pe un diametru este o mișcare oscilatorie armonică.

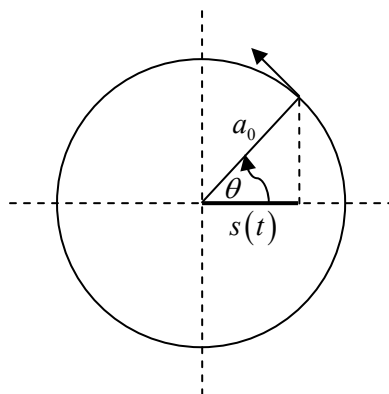


Figura 1.2 Mișcare armonică. Elongația este $s(t) = a_0 \cos \theta(t)$, unde $\theta(t) = \omega t$

Elongația $s(t)$, viteza proiecției $s'(t)$ și accelerația proiecției $s''(t)$ sunt date relațiile:

$$s(t) = a_0 \cos \theta = a_0 \cos \omega t \quad (1.1)$$

$$s'(t) = -a_0 \omega \sin \omega t \quad (1.2)$$

$$s''(t) = -a_0 \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 s(t) \quad (1.3)$$

Frecvența f este legată de viteza unghiulară ω prin $\omega = 2\pi f$. Se poate observa că mișcarea oscilatorie armonică poate fi determinată, rezolvând ecuația diferențială $s''(t) = -\omega^2 s(t)$. Soluția ecuației este dată de forma:

$$s(t) = \alpha e^{j2\pi ft} \quad (1.4)$$

unde $\omega = 2\pi f$ reprezintă viteza unghiulară și α este o constantă arbitrară. Relațiile (1.1)-(1.4) leagă conceptul de frecvență de un exemplu practic.

În multe aplicații avem de-a face cu unde ce se propagă prin corpuri (solide, atmosferă, ș.a.) în care mișcarea unei particule dintr-un loc fixat poate fi descrisă printr-o oscilație armonică. Frecvența unei f se definește ca fiind numărul de unde ce trece prin punctul fixat într-o unitate de timp. Frecvența unui curent electric într-un circuit poate fi definită în mod asemănător ca fiind numărul de cicluri efectuați în unitatea de timp.

Fie acum un semnal $s(t)$ ce compune dintr-o sumă ponderată de oscilații armonice. Descompunerea sa spectrală a unui astfel de semnal se obține prin transformarea Fourier:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.5a)$$

Valorile funcției $S(f)$ caracterizează semnalul $s(t)$, așa că el poate fi reconstruit prin transformarea Fourier inversă:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.5b)$$

Ecuatiile de analiză (1.5a) și de sinteză (1.5b) sunt semnificatori doar pentru semnale staționare, adică acelea al căror spectru $S(f)$ este constant în timp. Orice semnal staționar poate fi reprezentat ca o sumă ponderată de componente sinusoidale cu o anumită frecvență, fază și amplitudine (la o frecvență f fixată, amplitudinea și faza oscilației armonice sunt constante).

În mod evident, conceptul de „frecvență” este unul neambiguu pentru semnalele al căror spectru $S(f)$ este constant în timp. Vom vedea că lucrurile stau astfel în cazul unor semnale nestaționare. Secțiunea următoare încearcă să clarifice lucrurile și să înlăture anumite ambiguități aparente.

1.2.2 Generalizarea conceptului de frecvență la semnalele nestaționare

Deoarece în mod obișnuit frecvența definește un număr de cicluri sau oscilații efectuate în unitatea de timp de către un corp în mișcare periodică, asocierea noțiunilor „instantaneu” și „frecvență” este un paradox.

De fapt noțiunea de „frecvență instantanee” este controversată adaptată unei aplicații și introdusă în mod empiric. În această secțiune prezint anumite abordări anterioare al frecvenței instantanee, apărute în decursul timpului, în ideea obținerii unor clasificări.

Carson și *Fry* în 1937 [CAR37] au considerat o frecvență variabilă în contextul studiului circuitelor electric. Au aplicat conceptul la studiul semnalului modulat în frecvență. Ei au definit semnalul FM ca fiind:

$$w(t) = \exp \left[j \left(\omega_0 t + \lambda \int_0^t m(t) dt \right) \right] \quad (1.6)$$

unde $\omega_0 = 2\pi f_0$ este frecvența purtătoarei, λ reprezintă indicele de modulație iar $m(t)$ un semnal modulator, având componente de joasă frecvență și $|m(t)| \leq 1$. Ei au definit frecvența unghiulară instantanee ca fiind:

$$\Omega(t) = \omega_0 + \lambda m(t) \quad (1.7)$$

unde $m(t)$ are dimensiunea de frecvență, iar frecvența instantanee ciclică este:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{\lambda}{2\pi} m(t) \quad (1.8)$$

Ei au definit astfel o „generalizare” a noțiunii de frecvență, considerată ca viteză de schimbare a fazei, la momentul t considerat.

În anul 1946 *Van der Pol* [VAN46] a abordat problema definiției frecvenței instantanee analizând o oscilație armonică simplă:

$$s(t) = a \cos(2\pi ft + \theta) \quad (1.9)$$

unde a este amplitudinea, f frecvența de oscilație iar θ o constantă de fază, a fazei $\Phi(t) = 2\pi ft + \theta$. Pentru modulația de amplitudine el a folosit formula:

$$a(t) = a_0 [1 + \mu g(t)] \quad (1.10)$$

unde semnalul $g(t)$ reprezintă semnalul modulator. În mod similar el a extins-o și la modularea fazei prin:

$$\theta(t) = \theta_0 [1 + \mu g(t)] \quad (1.11)$$

Prin urmare faza $\Phi(t)$ este $\Phi(t) = 2\pi ft + \theta(t)$.

Van der Pol a semnalat faptul că pentru a obține în (1.9) o modulație de frecvență, avem:

$$f_i(t) = f_0 [1 + \mu g(t)] \quad (1.12)$$

Luând (1.12) în (1.9) avem:

$$\begin{aligned} s(t) &= a \cos \{2\pi f_0 [1 + \mu g(t)] t + \theta\} \\ &= a \cos [2\pi f_0 t + 2\pi f_0 t g(t) + \theta] \end{aligned}$$

și deci nu găsim o formă ca (1.11).

Raționamentul l-a condus la concluzia că expresia (1.9), pentru oscilația armonică trebuie pusă sub forma:

$$s(t) = a \cos \left[\int_0^t 2\pi f_i(t) dt + \theta \right] = a \cos \Phi(t) \quad (1.13)$$

unde argumentul funcției cosinus $\Phi(t) = \int_0^t 2\pi f_i(t) dt + \theta$.

În final se obține definiția frecvenței instantanee:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.14)$$

Folosind o reprezentare în real a semnalelor, Van der Pol a ajuns la aceeași concluzie cu Carson și Fry [CAR37] care au recurs la o reprezentare în complex a semnalelor.

În anul 1946 *Gabor* [GAB46] a făcut pasul următor. El a propus ca fiecărui semnal real să i se asocieze un semnal complex unic. Metoda propusă de el constă în: „să se găsească mai întâi transformata Fourier al semnalului real, să se suprimă componentele de pe axa $\omega < 0$ și să se dubleze componentele de pe axa $\omega > 0$ ”. Dacă semnalul complex al lui Gabor este $z(t)$ atunci:

$$z(t) = s(t) + jH\{s(t)\} \quad (1.15)$$

sau

$$z(t) = a(t) e^{j\phi(t)} \quad (1.16)$$

unde $z(t)$ este semnalul complex a lui Gabor, $s(t)$ este semnalul real și H reprezintă transformata Hilbert.

Ținând cont de motivația lui Gabor se definește un moment de ordinul n al frecvenței:

$$\langle f^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^n |Z(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df} \quad (1.17)$$

Aici $Z(f)$ reprezintă spectrul semnalului complex. Dacă spectrul semnalului real a fost utilizat în (1.17), cum $|Z(f)|^2$ nu este o funcție pară, momentele de ordin impar a funcției nu sunt egale cu zero.

În anul 1978 *Ville* [VIL48] a unificat lucrările lui Carson și Fry [CAR37] pe de o parte și Gabor [GAB46], pe de altă parte și a definit frecvența instantaneu prin:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg z(t)] \quad (1.18)$$

unde $z(t)$ este semnalul analitic lui Gabor, dat prin (1.15). Ville a afirmat că, dacă frecvența instantanee este variabilă în timp trebuie să existe un spectru instantaneu în care valoarea medie a frecvențelor este chiar frecvența instantaneu. Utilizând medierea (1.17) a lui Gabor [GAB46], Ville a arătat că frecvența medie în spectrul semnalului este egală cu media temporară a frecvenței instantaneu [VIL48]:

$$\langle f \rangle = \langle f_i \rangle \quad (1.19)$$

unde

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f |Z(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df} \quad (1.20a)$$

și

$$\langle f_i \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) |z(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt} \quad (1.20b)$$

Utilizând aceste rezultate, Ville a introdus o distribuție a semnalului în timp și frecvență, cunoscută acum sub denumirea de distribuția Wigner-Ville (Wigner-Ville Distribution WVD) [VIL48]:

$$W(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.21)$$

Ville [VIL48] a arătat că mediind $W(t, f)$ în frecvență se obține chiar frecvența instantanee, $f_i(t)$:

$$f_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f W(t, f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} W(t, f) df} \quad (1.22)$$

A. Interpretarea frecvenței instantanee

Se consideră problema poziționării unui semnal $s(t)$ în domeniul frecvență. Se construiește semnalul analitic $z(t) = a(t)e^{j\Phi(t)}$ aplicând (1.15). Se determină apoi spectrul său $Z(f)$ cu

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{j[\Phi(t) - 2\pi ft]} dt \quad (1.24)$$

Aplicarea principiului fazei staționare spune că integrala va avea valoarea cea mai mare (în modul) la frecvența f_s pentru care faza este staționară, adică f_s satisface ecuația

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t) - 2\pi f_s t] = 0 \quad (1.25)$$

ecuație ce conduce la

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (1.26)$$

Se vede că f_s este o funcție de timp; $f_s(t)$ dă o măsură a concentrării energiei în domeniul frecvență, la momentul t . Această măsură este chiar *frecvența instantanee* pentru semnal. Această proprietate de concentrare a energiei în domeniul frecvență explică importanța frecvenței instantanee.

Interpretarea frecvenței instantanee este uneori subiect de controversă. Shekel [SHE53] de exemplu a argumentat, ca frecvența instantanee este definit prin:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (1.27)$$

nu este unicat în funcție de timp, deoarece orice semnal modulată în amplitudine scrise în forma complexă pot fi exprimate fie că $m(t)e^{j2\pi ft}$ sau $m_0e^{j\phi(t)}$.

Unicitatea lui $z(t)$ și deci a fazei $\Phi(t)$ este asigurată numai de semnalul analitic. Dacă există o corespondență cu realitatea fizică este însă o altă chestiune.

Mandel [MAN74] a negat interpretarea fizică a frecvenței instantanee. El a discutat relația între aceasta și descompunerea Fourier. El a lucrat cu semnalul:

$$z(t) = a_1 e^{j\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} + a_2 e^{j\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} \quad (1.28)$$

$$= \left(a_1 e^{j\frac{-\Delta\omega}{2}t} + a_2 e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} \right) e^{j\omega_0 t} \quad (1.29)$$

$$= \left[(a_1 + a_2) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t + j(-a_1 + a_2) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \right] e^{j\omega_0 t}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \left(\cos^2 \frac{\Delta\omega}{2} t - \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} t \right)} e^{j\left[\omega_0 t + \arctg \frac{(-a_1 + a_2) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t}{(a_1 + a_2) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t} \right]}$$

Aplicând definiția lui Ville:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(-a_1 + a_2) \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} t} \cdot \frac{-a_1 + a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\Delta\omega}{2} t} \cdot \frac{2\pi\Delta f}{2} \quad (1.30)$$

$$= f_0 + \frac{\Delta f}{2} \cdot \frac{-a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \Delta\omega t}$$

Spectrul $Z(f)$ constă din două linii plasate la $f_0 - \frac{\Delta f}{2}$ și $f_0 + \frac{\Delta f}{2}$, de arii a_1 și a_2 , respectiv. Ca atare spectrul este simetric față de f_0 iar $f_i(t)$ arată deviere de la această valoare. Se spune că semnalul lui Mandel nu este monocomponentă ci bicomponentă și deci nu se aplică un concept simplu pentru calculul frecvenței instantanee.

Observație

Dacă $a_1 = a_2$ deci ariile impulsurilor sunt egale numai atunci media spectrală cade la f_0 . Dar atunci și $f_i = f_0$! Oricum nu apare un vârf spectral pe f_0 , chiar dacă $a_1 = a_2$.

Mandel a promovat cu energie ideea că frecvența instantanee și frecvențele implicate în analiza Fourier sunt cantități diferite și că doar numele comun de „frecvență” este sursa

confuziilor. Mandel pune întrebarea: „care dintre cele două cantități este mai legată de măsurători?” și tot el dă răspunsul: „depinde foarte mult de natura experimentului!”

Priestley [PRI88] a arătat că un proces netaționar nu poate fi reprezentat într-o manieră semnificativă prin dezvoltarea Fourier de tip (1.5b). Se consideră, spre exemplu, semnalul netaționar cu amplitudinea gaussiană:

$$y(t) = Ae^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) \quad (1.31)$$

Pentru $\phi_0 = 0$ spectrul său este:

$$Y(\omega) = A \cdot \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F} \left\{ e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \right\} * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Dar

$$\mathfrak{F} \left\{ e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \right\} = \alpha \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \alpha^2 f^2}$$

Avem deci:

$$Y(\omega) = \frac{A\alpha\sqrt{\pi}}{2} e^{-\pi^2 \alpha^2 (f-f_0)^2} + \frac{A\alpha\sqrt{\pi}}{2} e^{-\pi^2 \alpha^2 (f+f_0)^2}$$

adică două impulsuri gaussiene centrate pe f_0 și pe $-f_0$. Se poate interpreta semnalul $y(t)$ și ca având doar două componente, una pe f_0 și alta pe $-f_0$, ambele componente având însă amplitudinea variabilă, $A \cdot e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$. Cele două reprezentări sunt ambele adevărate. Ele corespund altor familii de funcții ortogonale formând o bază și utilizate în reprezentare. În prima situație se recurge la sin și cos de amplitudine constantă iar în al doilea caz de amplitudine variabilă.

Conform definițiilor uzuale termenul „frecvență” este asociat cu formele oscilante ale lui sin și cos. Pentru a aplica noțiunea de frecvență la analiza semnalelor netaționare este necesar să se introducă o nouă familie de funcții formând o bază care să fie ele însele netaționare dar să aibă totuși un caracter oscilant astfel încât noțiunea de frecvență să fie aplicabilă. De aceea Priestley a sugerat că un semnal netaționar oarecare, $s(t)$, poate fi reprezentat sub forma:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_i(f) S(f) df \quad (1.32)$$

unde

$$\gamma_t(f) = A_t(f) e^{j2\pi ft} \quad (1.33)$$

Abordarea lui Priestley conduce la un model în care semnalele sunt reprezentate local de către o frecvență și de către o distribuție în jurul acelei frecvențe. În reprezentarea lui Ville frecvența este întotdeauna reprezentată ca prima derivată a fazei. Cele două modele sunt înrudite dar în timp ce modelul Priestley este aplicabil semnalelor multicomponente, modelul Ville este aplicabil numai semnalului monocomponentă.

O altă abordare este cea propusă de Cohen. El a dezvoltat o formulare generală privind distribuirea energiei în timp și în frecvență [COH66]. După el frecvența instantanee poate fi privită ca fiind media frecvențelor ce există în planul timp-frecvență la un moment dat [COH88]. Aceasta se exprimă prin:

$$\langle f_i \rangle_t = \frac{\Phi'(t)}{2\pi} \quad (1.34)$$

Mai multe alți autori au contribuit, de asemenea, la studiul frecvenței instantanee [ACK70], [GRI75], [GUP75], [BOA90], [RIH68].

Rihaczek [RIH68] a investigat distribuția energiei complexe determinând punctele din plan unde se produce concentrarea ei. El a arătat concentrarea energiei după frecvenței instantanee. Ackroyd [ACK70] a extins rezultatele sale arătând că momentul de ordinul 1 al distribuției Rihaczek dă frecvența instantanee, indiferent de viteza de variație a frecvenței instantanee. Problemele asociate cu definiția frecvenței instantanee sunt asemănătoare cu cele asociate cu definirea amplitudinii instantanee și a anvelopei instantanee [RIC82].

1.2.3 Model. Notății, definiții

Secțiunea anterioară arată că există multe căi pentru a generaliza modelele nestacionare și a le face potrivite pentru cazul nestacionar. În continuare se prezintă semnalele ce pot fi reprezentate de model:

$$s(t) = \sum_{k=1}^N s_k(t) + n(t) \quad (1.35)$$

în care $n(t)$ este o componentă de zgomot de zgomot nedorită, iar $s_k(t)$ sunt N componente unice nestacionare, descrise prin anvelopele $a_k(t)$ și frecvențele instantanee $f_{i_k}(t)$. Semnalul analitic asociat cu $s_k(t)$ poate fi scris sub forma:

$$z_k(t) = a_k(t) e^{j\Phi_k(t)} \quad (1.36)$$

în care

$$\Phi_k(t) = 2\pi \int_{-\infty}^t f_k(\tau) d\tau \quad (1.37)$$

Dacă $k=1$, $s(t)$ se va numi semnal monocomponentă. Dacă însă $k \geq 2$ se obține un semnal cu mai multe componente (multicomponent). Modelul (1.35), (1.36) și (1.37) permite modelarea a N legi de variație temporară a frecvenței.

Modelul lui Priestley este diferit prin aceea că ia în considerare existența tuturor frecvențelor și conferă o amplitudine fiecăreia dintre componente.

1.3 FRECVENȚA INSTANTANEE, ÎNTÂRZIEREA DE GRUP, TRANSFORMAREA HILBERT ȘI SEMNALUL ANALITIC

1.3.1 Transformarea Hilbert și semnalul analitic

Deși Gabor a dat o justificare intuitivă bună pentru introducerea semnalului analitic pe baza transformatei Hilbert, este de remarcat că se pot da și alte metode pentru a forma un semnal complex pornind de la unul real. Se poate recurge la procedeul alternativ de a lua componenta în cuadratură a lui $s(t)$ ca parte imaginară a semnalului complex, așa cum se descrie într-o secțiune următoare. Această procedură conduce, în general, la un semnal diferit de cel definit de Gabor și Ville. Trebuie să înțelegem că fiind dat un singur semnal real, se determină două funcții de timp ce caracterizează semnalul real. Aceste două funcții pot fi reprezentate fie de anvelopă și fază fie de partea reală și partea imaginară. Ambiguitatea transformării poate fi ilustrată considerând semnalul:

$$s(t) = \cos 2\pi f_1 t \cdot \cos 2\pi f_2 t, \quad f_2 > f_1 \quad (1.38)$$

Se poate considera că faza este $2\pi f_1 t$ și amplitudinea modulată cu $a(t) = \cos 2\pi f_2 t$ sau că faza este $2\pi f_2 t$ și amplitudinea este modulată cu $a(t) = \cos 2\pi f_1 t$.

Nu este deci surprinzător faptul că așa numitul „semnal analitic” nu corespunde întotdeauna unui semnal și componente în cuadratură a acestuia, un fapt semnificativ având în vedere largă utilizare în comunicații a metodei semnalului analitic. Motivația este legată de faptul că recurgând la metoda transformatei Hilbert se elimină frecvențele negative din spectru. Dacă apare o deplasare semnificativă a componentelor spectrale

de frecvență pozitivă în regiunea componentelor spectrale de frecvență negativă, transformata Hilbert nu va conduce la componenta în cuadratură a semnalului real. Ca și consecință utilizarea frecvenței instantanee corespunzătoare poate conduce uneori la rezultate dubioasă.

A. Condiții în care transformata Hilbert generează chiar componenta în cuadratură

Se consideră un semnal FM de forma $a(t)\cos\phi(t)$ și se caută în ce condiții se verifică ecuația:

$$a(t)\cos\phi(t) + j\mathcal{H}\{a(t)\cos\phi(t)\} = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (1.39)$$

Problema a fost investigat pentru semnale complexe de energie finită în [BED63], [BOA89], [NUT66] și [RIH66]. Ecuația (1.39) este satisfăcută dacă spectrul $A(f)$ a lui $a(t)$, $A(f) = \mathfrak{F}\{a(t)\}$ se situează în întregime în domeniul $|f| < f_0$ iar spectrul lui $\cos\phi(t)$, $\mathfrak{F}\{\cos\phi(t)\}$ se situează exclusiv în afara domeniului. Așa cum rezultă din enunțul avem, în condiția de sus:

$$\begin{aligned} & a(t)\cos\phi(t) + j\mathcal{H}\{a(t)\cos\phi(t)\} \\ &= a(t)\cos\phi(t) + ja(t)\mathcal{H}\{\cos\phi(t)\} \\ &= a(t)\cos\phi(t) + ja(t)\sin\phi(t) \\ &= a(t) \cdot e^{j\phi(t)} \end{aligned}$$

Generatorul semnalului analitic bazat pe transformarea Hilbert poate fi deci privit ca făcând selecția în frecvență și componentele de frecvență înaltă definesc faza [BOA90], [VIL48]. Se consideră din nou semnalul real din (1.38):

$$s(t) = \cos 2\pi f_1 t \cdot \cos 2\pi f_2 t, \quad f_2 > f_1 \quad (1.40)$$

Semnalul analitic generat prin metoda transformatei Hilbert are forma:

$$z(t) = \cos(2\pi f_1 t) e^{j2\pi f_2 t} \quad (1.41)$$

Cosinusul de frecvența cea mai mare a fost înlocuit cu o exponențială complexă.

B. Interpretarea semnalului analitic generat prin metoda transformatei Hilbert

Transformata Hilbert și semnalul analitic corespunzător nu pot fi interpretate întotdeauna într-o manieră semnificativă din punctul de vedere al fenomenului fizic. Cum se afirmă anterior, dacă avem un semnal modulat de forma $a(t) \cdot e^{j\phi(t)}$ în care $a(t)$ și $\phi(t)$ corespund unor realități fizice care nu au spectrele cu suporturi disjuncte,

ci au suporturi spectrale prezentând suprapuneri, atunci semnalul analitic modulat în frecvență va fi de fapt de forma

$$a_z(t)e^{j\phi_z(t)} \quad (42)$$

și va fi unic dar $a_z(t)$ și $\phi_z(t)$ prezintă semnificații fizice îndoielnice. Această constatare duce la următoare afirmația:

Amplitudinea $a(t)$ și faza $\phi(t)$ a unui semnal pot fi tratate în mod independent numai dacă spectrul lui $a(t)$ și $\cos\phi(t)$ au suporturi nesuprapuse în domeniul frecvență.

Deci cu cât un semnal se apropie mai mult de condiția de semnal de bandă îngustă cu atât mai bine aproximează transformata sa Hilbert componenta în cuadratură și cu atât mai bun este modelul de semnal analitic bazat pe transformarea Hilbert, cu atât mai apropiat este el de realitatea fizică. Deci, cu atât mai bună va fi estimarea frecvenței instantanee.

1.3.2 Frecvența instantanee și întârzierea de grup

A. Definiții

Partea această a lucrării pune în legătură conceptele de frecvență instantanee și întârzierea de grup. Se consideră semnalul $s(t)$, și semnalul său analitic, $z(t)$. Frecvența instantanee a lui $s(t)$ se definește prin derivata fazei lui $z(t)$, exprimată în (1.18) sau printr-o formă ce va fi utilizabilă și implementarea în timp discret:

$$f_i(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\delta t} \left(\arg[z(t + \delta t)] - \arg[z(t - \delta t)] \right)_{\text{mod } 2\pi} \quad (1.43)$$

unde notația $\text{mod } 2\pi$ se face pentru a ține seama de faptul că $\arg[z(t)]$ este definit în intervalul $[-\pi, \pi]$. Semnalul complex $z(t) = a(t)e^{j\theta(t)}$ are un spectru complex de forma:

$$Z(f) = A(f)e^{j\theta(f)} \quad (1.44)$$

în care $a(t)$ și $A(f)$ sunt funcții pozitive. O altă cantitate de interes este întârzierea de grup, definită prin:

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} \theta(f) \quad (1.45)$$

Timpul de întârziere de grup poate fi interpretat ca reprezentarea variației cu frecvență a timpului de propagare a unui impuls printr-un filtru liniar având funcția pondere $h(t) = s(t)$. Ecuația (1.45) poate fi adusă la forma (1.43) ca:

$$\tau_g(f) = \lim_{\delta f \rightarrow 0} -\frac{1}{4\pi\delta f} \left(\arg[Z(f + \delta f)] - \arg[Z(f - \delta f)] \right)_{\text{mod } 2\pi} \quad (1.46)$$

Ecuațiile (1.43) și (1.46) sunt utile deoarece acestea pot fi transformate direct pentru cazul discret. Avem

$$\mathcal{F}\{a(t)e^{j\phi(t)}\} = \mathcal{F}\{a(t)\} * \mathcal{F}\{e^{j\phi(t)}\} = A(f)e^{j\theta(f)} \quad (1.47)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{A(f)e^{j\theta(f)}\} = \mathcal{F}^{-1}\{A(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{e^{j\theta(f)}\} = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (1.48)$$

unde \mathcal{F} și \mathcal{F}^{-1} sunt notate transformarea Fourier directă și inversă. Este evident, că spectrul de faze, $\theta(f)$ și deci și timpul de întârziere de grup depind atât de faza și de amplitudinea semnalului temporal. Faza semnalului, $\phi(t)$, și deci și frecvența instantanee, depind atât de spectrul de faze cât și de spectrul de amplitudini.

B. Interpretarea timpului de întârziere de grup

Fiind dat un semnal $s(t)$, valoarea $t = \tau_g$, dacă este unică, se consideră pentru a descrie localizarea semnalului în domeniul timp. Dacă τ_g este o funcție a lui f , atunci, el descrie localizarea diferitelor componentelor spectrale al semnalului în domeniul timp.

Demonstrație: Se consideră $z(t)$ cu $\mathcal{F}\{z(t)\} = |Z(f)|e^{j\theta(f)}$

$$z(t) = \int_0^{\infty} Z(f)e^{j2\pi ft} df = \int_0^{\infty} |Z(f)|e^{j[\theta(f)+2\pi ft]} df \quad (1.49)$$

$$(1.50)$$

Cazul în care $|Z(f)|$ variază lent cu frecvența f , în timp ce $\cos[\theta(f) + 2\pi ft]$ variază rapid cu frecvența f , se poate aplica principiul fazei staționare. Conform acestuia, cea mai mare valoare a integralei (1.50) se obține pentru acea valoare a lui $t = \tau_g$ care satisface relația:

$$\frac{d}{df}[2\pi ft + \theta(f)] = 2\pi t + \frac{d\theta(f)}{df} = 0 \quad (1.51)$$

și deci

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta(f)}{df} \quad (1.52)$$

1.4 INFLUENȚA PRODUSULUI BANDĂ × DURATĂ (BT) ASUPRA NOȚIUNILOR DE FRECVENȚĂ INSTANTANEE ȘI ÎNTÂRZIERE DE GRUP

1.4.1 Lățimea de bandă, durată și semnale asimptotice

A. Bandă și durată

Durata T și banda B sunt caracteristici foarte generale ale semnalului și dau informație respectiv despre perioada de timp în care semnalul există și despre componenta sa spectrală. În practică, dacă valoarea semnalului în domeniul timp scade sub un anumit prag putem considera semnalul ca fiind neglijabil. Acest prag este determinat de zgomotul ambiental, care este întotdeauna prezent. Uneori se consideră că semnalul este neglijabil chiar și înainte de a scădea sub nivelul impus de zgomot; în alte cazuri chiar dacă semnalul este imers în zgomot el poate fi detectat. Un raționament asemănător se poate aplica și în domeniul frecvență. Pragul determinat de nivelul de zgomot influențează determinarea banda semnalului.

În final, problema definirii duratei unui semnal este una de adoptare a unei convenții. Aceeași afirmație se poate face și pentru banda semnalului. Convenția depinde de aplicația particulară se adoptă definirea mărimilor în modul în care este adecvat rezolvării problemei luate în studiu [BOA90].

Sunt disponibile câteva definiții pentru măsura lui B și a lui T [SLE76], [HAY89]. O definiție a fost introdusă de Gabor [GAB46]. Fie $s(t)$ un semnal de medie nulă și energie finită. Durata sa efectivă, T_s , și banda sa efectivă, B_s sunt date de:

$$T_s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} \quad (1.53)$$

$$B_s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |S(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df} \quad (1.54)$$

B. Relația între B și T

Se consideră un semnal $s(t)$ de durată T în sensul strict al noțiunii. Se dilatează (sau comprimă) semnalul de-a lungul axei timpului, fără a-i amplitudinea semnalului.

Dacă $s_k(t) = s(kt)$ este o versiune extinsă, spectrul ei este:

$$S_k(f) = \frac{1}{k} \cdot S\left(\frac{f}{k}\right). \quad (k > 0)$$

Dacă scara timpului este înmulțită cu k , scara frecvenței este împărțită cu k . O extindere în timp conduce la o compresie în domeniul frecvență. Această constatare sugerează posibilitatea existenței unei relații de tipul $B \times T = const$, unde constanta este dependentă de semnal. Cu definițiile (1.53) și (1.54) se ajunge la un produs a cărui valoare minimă este $1/4\pi$, atinsă doar de semnalul gaussian [GAB46], [SPA70].

Anumiți autori au încercat să construiască o bază teoretică pentru impunerea unei durate finite și a unei benzi finite.

Lacoume și Kofman [LAC75] au definit o clasă de semnale C_{BT} , de energie finită și a căror energie este aproximativ localizată în banda $[-B/2, B/2]$ și în intervalul temporal $[-T/2, T/2]$. Aproape toate semnalele întâlnite în aplicații practice aparțin acestei clase. Se mai poate defini o subclasă pentru a include așa numitele semnale „asimptotice”. Aceste semnale, pe lângă faptul că au energie, durată și bandă finite au și un produs $B \times T$ de valoare mare. În continuare se consideră semnale ce au un produs $B \times T$ suficient de mare ($B \times T > 10$) astfel încât eroare de aproximare implicată de limitarea atât a benzii cât și a duratei să fie mică. Landau și Pollak [SLE61] au arătat că mai mult de 99% din energia semnalului este plasată în careul $B \times T$ dacă $B \times T > 5$. Semnalele FM utilizate în telecomunicații precum și în seismicitate aparțin acestei subclase. Toate semnalele considerate în continuare se presupun a fi de tip asimptotic.

O altă cale de a înțelege influența produsului $B \times T$ asupra frecvenței instantanee sau a întârzierii de grup este aceea de a interpreta produsul $B \times T$ ca un indicator al cantității de informație conținut de semnal. Se poate compara produsul $B \times T$ cu numărul de realizări necesare pentru a estima densitatea de probabilitate (PDF) a unui proces aleator. Cu numai câteva experimente disponibile estimarea PDF nu este semnificativă și ele constituie o bază neadecvată pentru a defini procesul. În mod asemănător dacă un

semnal este scurt, caracterizarea sa prin frecvența instantanee are o semnificație redusă, neexistând suficiente date pentru a observa o variație. Dacă însă semnalul are o durată mai mare, semnificația frecvenței instantanee crește.

1.4.2 Definiții utile și proprietăți ale semnalelor asimptotice

Se dau în cele ce urmează câteva definiții și de rezultate care s-au dovedit a fi utile în practică, atunci când se lucrează cu frecvența instantanee.

Definiția 1.

Un semnal asimptotic $s(t)$ se numește de tip monocomponentă (sau inversabil) dacă frecvența sa instantanee, $f_i(t)$ reprezintă cu precizie legea de modulație în frecvență și dacă $f_i(t)$ are o singură valoare și este inversabilă, existând și $f_i^{-1}(t)$.

Definiția 2.

Un semnal asimptotic $s(t)$ se numește de tip multicomponentă dacă există un număr finit, N , de semnale monocomponentă, $s_i(t)$, $i = 1, N$ astfel încât pentru orice t pentru care $s(t)$ există să avem

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t)$$

Numai una dintre componentele $s_i(t)$ trebuie să fie asimptotică. Descompunerea nu este unică și depinde de aplicație.

Adeseori imaginea ce reprezintă concentrarea de energie a semnalului în domeniul timp-frecvență nu sugerează dacă există o singură componentă în semnal sau mai multe. Concentrarea de energie poate fi măsurată prin lățimea de bandă locală sau împrăștierea spectrului în jurul frecvenței instantanee sau ale subcomponentelor în cazul semnalelor multicomponentă.

Proprietatea 1

Distribuția energiei unui semnal asimptotic $s(t)$ este concentrată într-un domeniu finit din planul timp-frecvență, în jurul frecvenței instantanee iar gradul de concentrare este funcție de produsul $B \times T$.

Proprietatea 2

Pentru un semnal monocomponentă, asimptotic, având $B \times T$ de valoare mare și o lege a frecvenței instantanee monotonă se arată că $f_i(t)$ se apropie de $\tau_g^{-1}(f)$. Această înseamnă că $f_i(t)$ și $\tau_g(f)$ sunt inverse una alteia. În acest caz legile timp-frecvență au o semnificație fizică: frecvența instantanee $f_i(t)$ descrie legea de modulație în frecvență a semnalului $s(t)$ iar $\tau_g(f)$ reprezintă întârzierea semnalului.

Proprietatea 3

Pentru un semnal monocomponentă, dacă produsul $B \times T$ are valoarea mică, atunci $f_i \neq \tau_g^{-1}$, cele două funcții nu mai sunt inverse. În acest caz cele două funcții sunt mărimi cu definiție matematică clară, nu li se pot da interpretări fizice celor două legi de variație din planul timp-frecvență.

1.4.3 Influența produsului $B \times T$ și a frecvenței centrale a semnalului asupra semnalului analitic

Teorema 1

Pentru semnalul de forma $s(t) = a(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$ unde f_0 este o frecvență constantă sau frecvență tonală, având un produs $B \times T$ oarecare, semnalul analitic obținut cu transformarea Hilbert se apropie de reprezentarea obținută cu partea imaginară în cuadratură, $a(t)e^{j(2\pi f_0 t + \phi(t))}$ atunci când f_0 tinde spre infinit.

Demonstrația: Demonstrația a fost dată de Nuttall care a arătat că diferență energetică între reprezentarea analitică conform transformatei Hilbert și reprezentarea obținută prin cuadratură este energia conținută în spectrul $S_0(f) = \mathcal{F}\{a(t)e^{j\phi(t)}\}$ în banda $f < -f_0$. Cazul în care frecvența f_0 tinde spre infinit, această energie tinde spre zero.

Teorema 2

Dacă semnalul $s(t) = a(t) \cos \phi(t)$ are o lege de variație a frecvenței pur monotonă și crescătoare, adică $\frac{d\phi(t)}{dt} \geq 0$ pentru $\forall t$, și un produs $B \times T$ de valoare mare, atunci

semnalul analitic HT se apropie asimptotic de $z(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$ atunci când $B \times T$ tinde spre infinit. Demonstrația a fost dată de Jones. Se prezintă importante ale demonstrației. Se construiește $S(f)$:

$$S(f) = \mathcal{F} \{ a(t) \cos \phi(t) \} = \mathcal{F} \left\{ \frac{a(t)}{2} [e^{j\phi(t)} + e^{-j\phi(t)}] \right\} \quad (1.55)$$

recurgând la principiul fazei staționare. O valoare $B \times T$ mare implică o caracteristică de fază $\phi(t)$ foarte dispersă. Dacă $\phi'(t)/2\pi$ este monotonă, adică există numai un singur punct de fază staționară atunci expresia de mai sus poate fi aproximată cu:

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f) \quad (1.56)$$

$$S(f) = \frac{a(t_0)}{2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(t_0)|}} \right) e^{j[\phi(t_0) - 2\pi f t_0 \pm \pi/4]} + \quad (1.57)$$

$$+ \frac{a(t_1)}{2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(t_1)|}} \right) e^{j[-\phi(t_1) - 2\pi f t_1 \pm \pi/4]}$$

în care t_1 și t_2 sunt punctele de fază staționară pentru primul și pentru al doilea termen. Semnul + se pune pentru $\phi''(t_0) > 0$ iar semnul - pentru $\phi''(t_0) < 0$. Punctele de fază staționară satisfac relațiile:

$$\phi'(t_0) = 2\pi f \quad (1.58)$$

$$\phi'(t_1) = -2\pi f \quad (1.59)$$

Dar am presupus că $\phi'(t)/2\pi$, frecvența instantanee, este pozitivă așa că expresiile de mai sus are soluții numai pentru $f > 0$. Rezultă că $S_1(f) = 0$ pentru $f \leq 0$. În mod similar rezultă și că $S_2(f) = 0$ pentru $f \geq 0$. Dar pentru semnalul analitic $z(t)$ construit pe baza transformatei Hilbert avem:

$$Z(f) = \begin{cases} 0, & f < 0 \\ S(f), & f = 0 \\ 2S(f), & f > 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

așa că

$$Z(f) = 2S_1(f) = 2 \cdot \frac{1}{2} \mathcal{F} \{ a(t) e^{j\phi(t)} \} \quad (1.61)$$

de unde

$$z(t) = a(t) e^{j\phi(t)}. \quad (1.62)$$

CAPITOLUL II

TEHNICI DE ESTIMARE A FRECVENȚEI PENTRU SEMNALE STAȚIONARE

2.1 GENERALITĂȚI

Înainte de a aborda problema estimării frecvenței și problema estimării frecvenței instantanee, este util să recapitulăm câteva principii utilizate în general în procesul de eșantionare. În mod obișnuit se caută anumite proprietăți pentru un estimator „bun”. Estimatorii trebuie să fie consecvenți și eficienți statistic din punct de vedere al efortului de calcul. Un estimator consistent (consecvent) este unul care converge în probabilitate, în mod asimptotic, spre valoarea adevărată. Deci, pentru un estimator consistent avem:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\{|\hat{a} - a| > \varepsilon\} = 0 \quad (2.1)$$

unde \hat{a} este un estimator al lui a , N este numărul de eșantioane în secvența observată (secvența observațiilor), iar ε este un număr pozitiv, arbitrar de mic [KAY88 p.45].

Un estimator statistic eficient este unul a cărui dispersie este teoretic cea mai redusă. Această margine inferioară a dispersiei este numită marginea Cramer-Rao (CRB) [KAY88 p.60], [HVT68 p.72]. Ea este dată de:

$$disp(\hat{a}) \geq \frac{1}{E\left\{\left[\frac{\partial \ln p(z; a)}{\partial a}\right]^2\right\}} \quad (2.2)$$

sau, echivalent, de

$$\text{disp}(\hat{a}) \geq \frac{-1}{E \left\{ \left[\frac{\partial^2 \ln p(z; a)}{\partial^2 a} \right]^2 \right\}} \quad (2.3)$$

unde $z = [z(1) \ z(2) \ \dots \ z(n)]$ este vectorul eșantioanelor observate (eșantioanelor de observație), iar $p(z; a)$ semnifică funcția densitate de probabilitate (pdf) a lui z , cu parametrul a dat. E este operatorul de mediere. Deoarece z este complex, cu părțile reală și imaginară x și y , densitatea de repartiție a lui z este distribuția comună a lui x și y . Funcția $p(z; a)$ este denumită adeseori și funcția de probabilitate (verosimilitate).

S-ar putea ca nici un eșantion să nu atingă această margine, dar dacă există una, el poate fi obținut prin utilizarea unor tehnici de maximă verosimilitate (ML) [KAY88 p.47]. Deoarece estimatorul ML este garantat a fi statistic eficient pentru secvențe de date lungi, el poate să nu fie eficient din punctul de vedere al calculului. Deci, el poate fi ineficient din acest punct de vedere. Din acest motiv, estimatorii ML sunt uneori abandonați în favoarea unora suboptimali, dar ușor de aplicat în calcul.

Principiile descrise mai înainte au fost utilizate mult în estimarea frecvenței unei sinusoide în zgomot alb Gaussian. Modelul de semnal care a fost utilizat adesea este:

$$z(n) = Ae^{j2\pi fn} + \varepsilon(n) \quad (2.4)$$

unde A este amplitudinea, f frecvența, $z(n)$ este secvența complexă observată (secvența observațiilor complexe), iar $\varepsilon(n)$ este secvența de zgomot alb Gaussian complex.

Estimarea de maximă verosimilitate pentru frecvența unei singure sinusoide în zgomot alb, s-a arătat că este dată prin găsirea acelei frecvențe la care periodograma sau „spectrul” își atinge maximul [RIF74]. Aceasta poate fi implementată cu o căutare inițială grosieră pe domenii mari al unei FFT și o procedură următoare de interpolare [RIF74]. Cât timp estimarea grosieră a frecvenței intră în lobul principal al răspunsului în frecvență, această tehnică converge spre maximul global corect. Această estimare atinge

CRB la un prag SNR suficient, marginea fiind dată de [RIF74]:

$$\text{disp}[\hat{f}] \geq \frac{12}{(2\pi)^2 (A^2/\sigma^2) N(N^2 - 1)} \quad (2.5)$$

unde N este numărul de eșantioane independente, A este amplitudinea semnalului, iar $2\sigma^2$ este dispersia zgomotului complex.

Dispersia estimată se îndepărtează esențial cu totul de la limita CR odată ce SNR scade sub o valoare de prag, ceea ce este un fenomen comun estimatorilor neliniari [RIF74].

După cum s-a menționat, metodele de maximă verosimilitate pot fi prea consumatoare de timp de calcul. Într-o încercare de a găsi estimatori de frecvență ce reduc efortul de calcul se folosesc adesea *metode parametrice*. Aceste metode modelează semnalul ca având o funcție de transfer rațională. Este avantajos, de multe ori, să presupunem că numărătorul funcției de transfer este o constantă. Astfel de modele sunt denumite autoregresive (AR) sau liniar predictive (cu predicție liniară).

Estimările frecvenței sunt obținute prin găsirea rădăcinilor polinomului de la numitor. De exemplu, pentru o simplă sinusoidă complexă, aceste metode sunt foarte eficiente din punct de vedere al calculului, deși ele nu sunt, în general, eficiente statistic. De asemenea, ele permit ca sinusoida apropiată să fie bine rezolvate (distinse). Există câteva variante ale acestei abordări, incluzând metodele de entropie maximă, metoda Prony, ș.a. Ele sunt descrise pe larg în [KAY88] și [MAR87].

Alte tehnici care și-au găsit o largă utilizare pentru estimarea spațială a frecvențelor în domeniul procesării tablourilor sunt, de exemplu: descompunerea armonică a lui Pisarenko și MUSIC [KAY88 p.431]. Aceste metode presupun că semnalul observat poate fi descompus în componentele de zgomot și semnal și apoi se poate utiliza faptul că vectorii de semnal vor fi ortogonali pe vectorii de zgomot. Astfel, estimatorul spectral MUSIC este format din inversa sumei produselor interioare între vectorul de semnal și estimările vectorului zgomot. Frecvențele componentelor de semnal sunt luate a fi vârfurile estimării spectrale.

Tretter a introdus o altă tehnică de estimare a frecvenței [TRE85]. El a arătat că pentru o sinusoidă complexă în zgomot Gaussian, la un nivel SNR mare, faza poate fi bine aproximată ca o funcție liniară de timp afectată aditiv într-un proces de tip zgomot alb Gaussian. El a utilizat apoi o regresie liniară (metoda celor mai mici pătrate) pentru a estima frecvența. Deoarece metoda celor mai mici pătrate este echivalentă uneia de verosimilitate maximă pentru un proces Gaussian alb [KAY88 p.49], estimatorul său este tot unul ML pentru domeniul SNR mare, luat în considerare. Se apropie, deci de limita CR pentru SNR mare. O problemă a algoritmului lui Tretter este că prima sa etapă necesită extragerea fazei din date. Aceasta poate fi sursa unor erori numerice semnificative. Kay a găsit o formă modificată a acestui estimator prin ajustarea unui model pentru estimarea diferențelor de fază adiacente și nu valorii fazei înseși, evitând astfel problema desfășurării fazei [KAY88]. Estimatorul rezultat este o simplă mediere (netezire) a diferențelor de fază cu o fereastră pătratică. Metodele descrise s-au ocupat de estimarea frecvențelor sinusoidelor și sunt o bază pentru a înțelege problema mai complicată a estimării frecvențelor variabile în timp.

2.2 TEHNICI DE ESTIMARE A FRECVENȚEI INSTANTANEE

2.2.1 Definiția frecvenței instantanee în timp discret

Definiția frecvenței instantanee a unui semnal real $s(t)$, în timp continuu, a fost dată de Ville [VIL48]:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (2.6a)$$

unde $\Phi(t)$ este faza semnalului analitic asociat cu $s(t)$. Definiția de mai sus este dată în [BOA92].

Pentru a implementa estimatori în timp discret pentru frecvența instantanee, se abordează mai întâi problema diferențierii în timp discret. O soluție este aceea de a utiliza un diferențiator în timp discret de tip FIR [OPP75 p.164]. Frecvența instantanee în timp discret este definită ca:

$$f_i(n) = \frac{1}{2\pi} \Phi(n) * d(n) \quad (2.6b)$$

unde $d(n)$ este răspunsul la impuls al diferențiatorului FIR discret, iar $*$ denotă convoluția în timp. Totuși, astfel de filtre dau naștere unor probleme practice deoarece exagerează efectul zgomotului de frecvență înaltă [BOA91]. Aproximări bune pot fi obținute utilizând o tehnică de derivare a fazei. Această abordare, mai eficientă din punct de vedere al calculului, dă, în general, rezultate mai bune în privința zgomotului, decât se obțin cu relația (1.6b).

Diferențele finite înainte (FFD) și înapoi (BFD) definite de relațiile (2.7) și (2.8) sunt două operații de diferențiere a fazei utilizate de obicei:

$$\hat{f}_f(n) = \frac{1}{2\pi} [\Phi(n+1) - \Phi(n)] \quad (2.7)$$

$$\hat{f}_b(n) = \frac{1}{2\pi} [\Phi(n) - \Phi(n-1)] \quad (2.8)$$

Se poate utiliza și diferența centrală finită (CFD):

$$\hat{f}_c(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi(n+1) - \Phi(n-1)}{2} = \frac{1}{4\pi} [\Phi(n+1) - \Phi(n-1)] \quad (2.9)$$

Făcând o comparație între cei trei estimatori din relațiile (2.7), (2.8) și (2.9), estimatorul din (2.9) are unele avantaje. În primul rând, este nepolarizat și are întârziere de grup nulă pentru semnale MF cu modulație liniară. În al doilea rând, el corespunde momentului de ordin 1 în frecvență al unui număr de TFD [CLA80], [BOA90].

2.2.2 Estimatori obișnuiți ai diferenței de fază

Se poate defini o clasă de estimatori ai diferenței de fază ce nu sunt abătuți pentru faze polinomiale de orice ordin. Pentru faza dată de:

$$\Phi(n) = \sum_{i=0}^p a_i n^i \quad (2.10)$$

frecvența instantanee este obținută ca fiind:

$$\hat{f}_i(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^p i a_i n^{i-1} \quad (2.11)$$

Un estimator generalizat pentru diferența de fază, de ordin q , poate fi definit prin

[BOS90].:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q/2}^{q/2} b_k \Phi(n+k) \quad q \in \mathbb{Z}, q \text{ par} \quad (2.12)$$

Coeficienții b_k trebuie astfel determinați încât $\hat{f}(n) = \hat{f}_i(n)$ sau:

$$\sum_{k=-q/2}^{q/2} b_k \Phi(n+k) = \sum_{i=1}^p ia_i n^{i-1} \quad (2.13)$$

Spre exemplu, estimatorul diferenței de fază de ordin 2 este chiar estimatorul central (CFD). Estimatorii de ordin par sunt preferați celor de ordin impar, deoarece nu introduc întârziere de grup.

O tabelă de coeficienți pentru primele 3 ordine pare, fiecare neabătut pentru o funcție de fază polinomială este următoarea:

Ordinul	Coeficienții							
2	-1/2			0		1/2		
4	1/12	-2/3		0		2/3	-1/12	
6	-1/60	3/20	-3/4	0		3/4	-3/20	1/60

De asemenea, se poate implementa diferențierea de fază utilizând formula clasică din timp continuu pentru discriminatoarele MF [FJH87], [FJH88] și [HAS88]:

$$\Phi'(t) = \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \quad (2.14)$$

Relația conduce la următorul estimator în timp discret [FJH87, pp72]:

$$\hat{f}_i(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{x(n)y'(n) - x'(n)y(n)}{x^2(n) + y^2(n)} \quad (2.15)$$

Se utilizează de asemenea filtre FIR pentru a aproxima operațiile de derivare necesare în vederea evaluării numărătorului [OPP75].

2.2.3 Versiuni mediate ale estimatorului diferenței de fază

Estimatorul centrat (CFD) dat prin relația (2.9) este neabătut pentru cazul MF, dar prezintă dispersii foarte mari pentru semnale cu zgomot. Există un număr de abordări ce reduc

dispersia. În primul rând, dacă se știe că frecvența semnalului este limitată la o bandă B, semnalul este filtrat în afara acestei benzi. În al doilea rând, se poate utiliza netezirea pentru a obține estimări cu dispersie mai redusă, dar nu în mod necesar neabătute.

Un estimator neted particular a fost propus de Kay. El a definit un estimator „diferență de fază ponderată”, ce atinge limita CR pentru un semnal staționar, așa cum e redat în relația (2.5). El a ajuns la acest estimator prin încercarea de a găsi estimatorul ML al unei secvențe a estimării frecvenței locale. Aceste estimări locale sunt obținute prin operații de diferențiere finită spre înainte.

Datorită operațiilor de diferențiere, secvențele de estimare sunt corelate sau „colorate”. Soluția pentru frecvență, optimală sau de verosimilitate maximă (ML), nu se reduce atunci la o mediere liniară, ci mai curând la o procedură de mediere „ponderată”.

Estimatorul Kay este dat prin:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-2} h_n [\Phi(n-1) - \Phi(n)] \quad (2.16)$$

în care h_n este fereastra de mediere sau de netezire și este dată de netezire și este dată de [KAY88]:

$$h_n = \frac{1,5N}{N^2 - 1} \left\{ 1 - \left[\frac{n - \left(\frac{N}{2} - 1\right)}{\frac{N}{2}} \right]^2 \right\} \quad (2.17)$$

Reducerea dispersiei ce este atinsă prin utilizarea ferestrei de mai sus este [KAY88]:

$$\frac{\text{disp}\{\hat{f}\}_{\text{fara fereastră}}}{\text{disp}\{\hat{f}\}_{\text{cu fereastră}}} = \frac{N(N+1)}{6(N-1)} \cong \frac{N}{6} \quad (2.18)$$

Funcția de pondere, h_n , poate fi aplicată și la estimări de frecvență [KAY88] bazate pe autoregresie (AR) ca preferință față de fereastra rectangulară. Simulările au arătat că rezultă performanțe semnificativ mai bune. Cum se arată în [JAC79], estimatorul (2.16) poate fi ușor implementat ca un estimator al frecvenței instantanee sau un sistem de urmărire, punându-l sub o formă recursivă în timp. Se poate utiliza o fereastră alunecătoare pentru a evalua

local frecvența în același mod în care spectrograma este folosită pentru a estima local spectrul. Totuși, această abordare va furniza estimări degradate dacă apar variații de frecvență semnificative în interiorul ferestrei (în special de tipul neliniar). Pentru a depăși această liniaritate se poate reconsidera întreaga problemă utilizând un model cu fază polinomială pentru semnal, în locul celui de fază liniară [BOS90]. Atât estimatorul de regresie liniară al lui Tretter [TRE85] cât și estimatorul ponderat al lui Kay pot fi de fapt tratați extins la modelul semnalului cu fază polinomială.

2.2.4 Estimarea frecvenței instantanee prin metoda trecerilor prin zero

O modalitate de a estima frecvența locală a unui proces de bandă îngustă, obișnuit în fenomene seismice, este cea de a număra trecerile prin zero. Pentru un semnal sinusoidal sau pentru un semnal ce poate fi considerat local staționar, frecvența este inversa perioadei sau jumătate din inversa intervalelor între trecerile prin zero:

$$f = \frac{1}{2T_z} \quad (2.19)$$

$$f = \frac{Z}{2}. \quad (2.20)$$

unde T_z este intervalul între trecerile prin zero, $2T_z$ este perioada, iar Z este frecvența trecerilor prin zero.

Deoarece ne ocupăm cu semnale în timp discret, cu perioada de eșantionare unitară, valoarea lui T_z este dată de fapt de numărul de intervale de eșantionare, k , între două treceri prin zero și de aceea relația (2.19) devine:

$$f = \frac{1}{2k}$$

Vor fi de fapt $k+1$ puncte de eșantionare, incluzând și trecerile prin zero. Această estimare prin trecerile prin zero se demonstrează că este o medie liniară a estimărilor FFD în interiorul intervalului [BOS90].

Deoarece $T_z = k$ și presupunând că prima trecere prin zero are loc la momentul n , estimatorul (2.19) poate fi exprimat prin:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2k} \quad (2.21)$$

Estimatorul FFD obișnuit poate fi scris ca fiind:

$$\hat{f}_f(n) = \frac{1}{2\pi} [\Phi(n-1) - \Phi(n)] \quad (2.22)$$

Media liniară a k estimatori FFD consecutivi din interiorul intervalului este:

$$\hat{f}_{fk}(n) = \frac{1}{2\pi k} [\Phi(n+1) - \Phi(n) + \Phi(n+2) - \Phi(n+1) + \dots + \Phi(n+k) - \Phi(n+k-1)] \quad (2.23)$$

ce poate fi rescrisă sub forma:

$$\hat{f}_{fk}(n) = \frac{1}{2\pi k} [\Phi(n+k) - \Phi(n)] \quad (2.24)$$

Deoarece $\Phi(n+k) - \Phi(n) = \pi$ (distanța între două treceri prin zero corespunde la un unghi π), relația (2.24) se reduce la (2.21).

Astfel, expresia estimatorului prin trecere prin zero este o simplă medie liniară a k estimări adiacente ale FFD. Medierea nu conține funcția de ponderare optimal pătratică, prezentată anterior și, în consecință, este suboptimală. În schimb, ea este ușor de calculat. Menționăm că dacă intervalul între două treceri prin zero nu este un număr întreg de eșantioane, în plus față de medierea liniară introdusă de către estimator, apare „zgomot” de cuantizare. Pentru a reduce dispersia estimării prin trecerile prin zero, Rabiner și Schafer [POS90] au propus să se ia în considerare numărul mediu al trecerilor prin zero într-o fereastră de lungime M . Estimatorul lor este definit prin:

$$Z(n) = \sum_{m=-M}^M |\text{sgn}[s(m)] - \text{sgn}[s(m-1)]| h(n-m) \quad (2.25)$$

în care

$$\text{sgn}[s(n)] = \begin{cases} 1, & \text{pentru } s(n) \geq 0 \\ 0, & \text{pentru } s(n) < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2M}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad (2.27)$$

Discuția anterioară se aplică la procese local sinusoidale. Pentru semnale MF nestaționare, estimatorul frecvenței instantanee bazat pe trecerile prin zero poate fi extins conform cu relația:

$$\hat{f}_i(n) = \frac{1}{2} Z(n) \quad (2.28)$$

$Z(n)$ fiind dat de relația (2.25). Deplasând fereastra $h(n)$ cu n , obținem o estimare a frecvenței instantanee ca o funcție de n . Lungimea finită M a ferestrei introduce „a bias-variance trade-off” în estimarea frecvenței instantanee. Dacă M este mare și legea de variație a frecvenței instantanee nu este liniară în interiorul ferestrei, va exista o abatere. Dacă M este mic, abaterea este redusă, dar cu prețul creșterii dispersiei.

2.2.5 Estimarea adaptivă a frecvenței instantanee

O abordare a estimării frecvenței instantanee este cea de a o formula ca o problemă de estimare adaptivă a frecvenței locale. Această abordare a dat naștere la PLL, utilizat pe larg în sistemele de comunicație [CAR86]. PLL-ul demodulează adaptiv semnalul de intrare, în banda de bază unde se filtrează, iar ieșirea este readusă la intrare, în etajul de demodulare. PLL-ul obișnuit se comportă foarte bine la zgomot, dar este incapabil să urmărească schimbări foarte rapide în frecvența instantanee. Sunt necesare modificări pentru a fi capabil de această urmărire rapidă.

Snyder a dedus câțiva estimatori adaptivi în [SNY]. El a dedus un estimator bazat pe un criteriu neliniar de minimizare al erorii medii pătratice, precum și o aproximare liniară a acestui estimator (filtrul Kalman extins). El a demonstrat de asemenea că filtrul Kalman extins se reduce la PLL în cazul staționar. Au mai existat și alte variante și extinderi ale PLL-ului [HUA].

O altă formă de estimare adaptivă a frecvenței instantanee se bazează pe modelarea datelor ca un proces predictiv liniar. Două metode care pot fi utilizate pentru acest gen de estimări sunt algoritmi LMS și RLS [HAY91]. Ambii algoritmi sunt descriși în cele ce urmează.

2.2.6 Algoritmul LMS

Griffiths a propus un algoritm adaptiv de estimare a frecvenței instantanee [GRI75] bazat pe un filtru de predicție liniară care și-a modificat coeficienții cu fiecare nou eșantion de date. Metoda lui Griffiths este conceptual fundamentală pe extragerea vârfului unei estimări spectrale bazată pe o predicție liniară pe termen scurt. Se obțin economii importante privind calculul, prin reajustarea estimării spectrale pe măsură ce apare un nou eșantion de date, în loc de a o recalcula de fiecare dată din datele primare. Algoritmul rezultat, bazat pe tehnica gradientului descrescător, este foarte simplu. Totuși, deoarece algoritmul recursiv este un proces de urmărire a frecvenței instantanee, el este incapabil să răspundă la modificări foarte rapide (sau zgomotoase) ale frecvenței instantanee. De aceea estimarea poate prezenta susceptibilități semnificative la zgomot. Mai jos se dau detalii privind algoritmul.

Vectorul eșantioanelor datelor, la momentul n , este notat cu:

$$z_n = [z(n) \quad z(n-1) \quad \dots \quad z(n-L+1)]^T \quad (2.29)$$

unde L este lungimea filtrului de predicție liniară. Vectorul corespunzător al coeficienților filtrului liniar este:

$$a_n = [a_1(n) \quad a_2(n-1) \quad \dots \quad a_L(n)]^T \quad (2.30)$$

Pe măsură ce un nou eșantion de date este prelucrat, coeficienții filtrului trebuie reactualizați în mod ideal, în așa fel încât să se minimizeze eroarea medie pătratică de predicție. Pentru statistici staționare eroarea este o funcție unimodală de vectorul coeficienților filtrului și de aceea metoda descreșterii gradientului poate fi folosită pentru a converge spre valorile optime ale coeficienților filtrului. Se utilizează algoritmul LMS al lui Widrow și Hoff [WID60] și coeficienții sunt dați de relații cum ar fi [MAR87 pp264-266]:

$$a_{n+1} = a_n - 2\mu e_{n+1} z_n^* \quad (2.31a)$$

$$e_{n+1} = z(n+1) + z_n^T a_n \quad (2.31b)$$

unde e_{n+1} este eroarea liniară de predicție la momentul $n+1$, μ este constanta de adaptare, iar * înseamnă conjugarea complexă. Forma standardă al ecuațiilor pentru algoritmul LMS este

dată în [HAY91 pp. 302-304]

Estimarea frecvenței instantanee este determinată din vârful spectrului obținut pe baza predicției liniare, adică: $\hat{f}_{i(n)} = f_i$ care maximizează

$$\frac{1}{\left| 1 + \sum_{k=1}^I a_k(n) e^{-j2\pi f_i k} \right|^2} \quad (2.32)$$

Dacă sunt de estimat sau de urmărit mai multe frecvențe, expresia (2.32) este modificată pentru a extrage diferitele vârfuri, corespunzătoare componentelor individuale de frecvență. Pentru a urmări o singură sinusoidă complexă în zgomot, frecvența instantanee poate fi determinată cu o eficiență de calcul ridicată în conformitate cu relația:

$$\hat{f}_i(n) = \frac{1}{2\pi} \arg[a_1^*] \quad (2.33)$$

Coeficientul n controlează rata de adaptare - dacă μ este aproape de limita sa superioară adaptarea este rapidă, dar eroarea staționară poate fi mare, în timp ce dacă μ este mic, adaptarea va fi lentă. Principalul avantaj al acestui algoritm este simplitatea sa privind calculul, care este vizibilă din relația (2.31). În plus, pot fi utilizați algoritmi mai buni pentru adaptare [WID85].

2.2.7 Estimarea adaptivă RLS a frecvenței

Algoritmul RLS este o tehnică ce modelează datele ca o secvență de predicție liniară și care reactualizează coeficienții de predicție liniară cu fiecare nou eșantion de date. Algoritmul RLS diferă de algoritmul LMS prin aceea că în locul coeficientului de adaptare scalar se utilizează în calitate de „coeficient de adaptare” o aproximare exponențială, ponderată pentru inversa matricii de covarianță.

Avantajul algoritmului RLS față de algoritmul LMS este viteza sa de convergență mărită și robustețea la nivelurile de energie ale semnalului. Algoritmul RLS clasic necesită L^2 calcule, spre deosebire de LMS ce necesită doar L calcule. Au fost dezvoltati algoritmi RLS rapizi ce conțin doar $\approx L$ calcule [CIO84]. Reactualizarea parametrilor algoritmului la momentul n este obținută prin următorul set de ecuații [MAR87, pp. 267-267]:

$$a_{n+1} = a_n - e_{n+1} P_n z_n^* \quad (2.34a)$$

$$e_{n+1} = z(n+1) + z_n^T a_n \quad (2.34b)$$

$$P_n = [\alpha P_{n-1} + z_n^* z_n^T]^{-1} \quad (2.34c)$$

unde P_n este aproximarea ponderată exponențial a inversei matricii de covarianță, iar α este un factor de „uitare”.

O formă standard a ecuațiilor pentru algoritmul RLS este dată în [HAY91 pp 480-483].

Utilizând lemma inversiunii matricii, aceste ecuații se reduc la:

$$a_{n+1} = a_n - e_{n+1} c_n \quad (2.35a)$$

$$c_n = \frac{P_{n-1} z_n^*}{\alpha + z_n^T P_{n-1} z_n^*} \quad (2.35b)$$

$$P_n = \frac{1}{\alpha} (I - c_n z_n^T) P_{n-1} \quad (2.35c)$$

unde e_{n+1} este definită în relația (2.34b), iar I este matricea identitate. Pentru o singură sinusoidă complexă zgomotoasă, ecuațiile de mai sus pot fi implementate foarte simplu și estimatorul ce rezultă nu este abătut. Frecvența instantanee locală poate fi obținută conform relației (2.3). Pentru mai multe componente, estimările frecvențelor instantanee sunt extrase din vârfurile spectrului de predicție liniară, folosind expresia (2.30).

2.2.8 Estimarea frecvenței instantanee bazată pe momentele TFD

Cohen a formulat o clasă de funcții bidimensionale (TFD-uri) care pot fi utilizate pentru a reprezenta distribuția energiei semnalului în timp și frecvență [COH88]. Expresia acestor funcții în timp discret este de forma [BOA90]:

$$\rho(n, k) = \sum_{m=-M}^M \sum_{p=-m}^M G(p-n, m) z(p+m) z^*(p-m) e^{-j \frac{4\pi mk}{N}} \quad (2.36)$$

în care $G(n, k)$ este o fereastră particulară ce definește o anumite TFD, iar $M = (N-1)/2$.

Un număr de TFD-uri (distribuții timp - frecvență) ca de exemplu distribuția Wigner-Ville (WVD) dau frecvența instantanee prin momentul lor de ordin unu [CLA80], iar multe alte

TFD-uri (de exemplu transformata Fourier pe timp scurt [BOA90]) produc aproximări ale frecvenței instantanee prin intermediul momentului de ordin unu. Momentul de ordin unu al TFD furnizează deci un alt mijloc pentru a estima frecvența instantanee. White și Boashash au abordat în [LBW88] problema estimării frecvenței instantanee a unui proces aleator gaussian utilizând momentul de ordin unu al distribuției Wigner-Viile. Aspectul util, particular al estimării frecvenței instantanee în această manieră este acela că mascarea sau alte forme de prelucrare în planul timp-frecvență pot fi realizate astfel încât să se reducă efectul zgomotului sau pentru a estima legea de variație a frecvenței instantanee în mod separat pentru componente [BOA90]. Mascarea sau filtrarea conduc la o reducere semnificativă a dispersiei. Frecvența instantanee dedusă prin intermediul distribuției Wigner-Ville discretă este dată de [BLK89], [CLA80]:

$$\hat{f}_c(n) = \frac{M}{2\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi k}{M}} W^g(n, k) \right\} \text{mod } 2\pi \quad (2.37)$$

în care $W^g(n, k)$ este distribuția Wigner-Ville discretă și este definită prin:

$$W^g(n, k) = \sum_{m=-M}^M z\left(n + \frac{m}{2}\right) z^*\left(n - \frac{m}{2}\right) e^{-j\frac{2\pi}{M}mk} \quad (2.38)$$

Deoarece metoda este greoaie ca și calcul, cerând calcularea TFD, marcarea și calcularea momentului de ordin unu, precum și pentru că nu este în general optimă din punct de vedere statistic, sunt preferate alte metode.

Frecvența instantanee sau o aproximare a ei, poate fi obținută în mod asemănător prin intermediul momentelor distribuției în timp discret [BLK89], [BOA90] definite în (2.36). Se poate arăta că astfel de momente sunt aproximativ un estimator CFD netezit (filtrat) [BOA90]. Aceasta înseamnă că:

$$m_p^1(n) \cong \left\{ \hat{f}_c(n) * G(n, 1) \right\} \text{mod} \left(\frac{f_s}{2} \right) \quad (2.39)$$

Aici $\hat{f}_c(n)$ este evaluat prin relația (2.9) (versiunea centrată a diferenței), iar $G(n, 1)$ este funcția (2.36), $G(n, k)|_{k=1}$. În practică metoda este greoaie din punct de vedere al calculului, pretinzând calculul unei TFD, o operație de mascare și apoi o procedură de inversare. Din cauza echivalenței sale cu o operație CFD netezită, ea este utilizată numai în aplicații foarte particulare.

2.2.9 Estimarea frecvenței instantanee pe baza vârfurilor distribuțiilor timp-frecvență

Vârful transformatei Short-Time-Fourier

După cum s-a arătat mai înainte, estimarea ML a frecvenței unei sinusoide complexe afectată de zgomot alb gaussian complex este dată de vârful periodogramei sau „spectrului” [RIF74]. Intuitiv, pare să se apeleze la formarea unei estimări a frecvenței instantanee din vârfurile TFD în cazul semnalelor nestaționare, deoarece TFD a fost special concepută pentru semnale nestaționare. Mulți autori au propus o astfel de tehnică. Una dintre cele mai evidente distribuții timp-frecvență de utilizat este STFT, care se va comporta foarte bine dacă semnalul luat în considerare este cvasistaționar.

Totuși, deoarece fereastra optimă pentru spectrogramă este reciproca rădăcinii pătrate a ratei frecvenței, se obțin rezultate slabe pentru semnale MF ce încetinesc rapid [BOS90].

Vârful distribuției Wigner-Ville, WVD

Vârful distribuției Wigner-Ville a fost propus ca tehnică de estimare a frecvenței instantanee în [BOA82] și a fost utilizată pentru a determina parametrii de absorbție și dispersie în prelucrarea seismică. Utilitatea WVD provine din capacitatea ei de a localiza energia în lungul legii frecvenței instantanee. Dacă semnalul considerat are legea de variație a frecvenței liniară și amplitudinea constantă, WVD va consta dintr-un șir de distribuții.

Dirac de-a lungul legii frecvenței instantanee, o situație ce conduce clar la estimarea frecvenței instantanee. Existența unei neliniarități în legea frecvenței instantanee poate cauza o abatere a vârfului BF astfel că e uzual să se ajusteze fereastra astfel încât modificarea frecvenței instantanee în lungul ferestrei să fie aproximativ liniară [BOA92].

Rao și Taylor au arătat că estimarea frecvenței instantanee pe baza vârfului WVD este optimală pentru semnale cu MF liniară cu raport semnal/zgomot mare până la moderat [RAO90].

Wong și Jin au cercetat de asemenea folosirea acestui estimator și au comparat performanțele sale cu limita inferioară CR pentru variația în timp continuu a frecvenței [KMW90].

Determinarea frecvenței instantanee din vârful unei WVD de tip autoregresiv a fost și ea folosită în [HWB90] și s-a văzut că urmărește legi de variație neliniară de tip MF mai bine decât WVD de tip convențional la un raport semnal/zgomot mare. Cu toate că metoda extragerii vârfului WVD s-a arătat că este un estimator optimal pentru semnale MF cu modulație liniară la rapoarte semnal/zgomot mari, ea se degradează în mod semnificativ la rapoarte mici ale SNR. De aceea, s-a propus ca estimator al frecvenței instantanee și vârful distribuției mutuale Wigner-Viile (cros Wigner-Ville distribution XWVD) [POS90], [BOA90], [BOA93].

Vârful distribuției Wigner-Ville mutuale (XWVD)

Distribuția Wigner-Ville mutuală, între un semnal de referință $s(n)$ și semnalul observat $r(n)$ este definită ca fiind:

$$W_{z_s z_r}(n, k) = \sum_{m=-M}^M z_s \left(n + \frac{m}{2} \right) z_r \left(n - \frac{m}{2} \right) e^{-j \frac{2\pi m k}{M}} \quad (2.40)$$

unde $z_s(n)$ și $z_r(n)$ sunt semnalele analitice corespunzătoare lui $s(n)$ și $r(n)$.

În mod obișnuit semnalul de referință nu este cunoscut, dar el poate fi estimat din semnalul observat. Estimarea referinței implică obținerea unei estimări a frecvenței instantanee inițiale, $f_i(n)$, și apoi reconstruirea unui semnal de amplificare unitară, corespunzător cu:

$$z_s = \exp \left(j 2\pi \sum_{k=0}^n f_i(k) \right), \text{ pentru } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.41)$$

Estimarea propusă pentru frecvența instantanee, pe baza XWVD, urmează procedura:

1. **Inițializare:** formează un semnal de referință și de amplitudine unitară din estimarea frecvenței instantanee.

2. **Estimarea:** formează XWVD (distribuția Wigner-Viile mutuală) între semnalul de referință și cel observat. Estimează frecvența instantanee din vârful XWVD.
3. **Recurența:** repetă pasul 1 până ce diferența între două estimări succesive ale frecvenței instantanee este sub o anumită limită.

Rațiunea ce stă la baza acestei metode este aceea că de fiecare dată când o nouă XWVD este estimată, concentrarea energiei semnalului devine mai pronunțată astfel că probabilitatea estimării corecte a frecvenței instantanee într-un fond zgomotos, de asemenea va crește. Se precizează că orice estimator al frecvenței instantanee poate fi folosit pentru a obține valoarea inițială a frecvenței instantanee. Dacă se folosește o estimare pe baza vârfului STFT, algoritmul asigură convergența în câteva iterații. Dacă semnalul este lung și este inițializat cu o fereastră alunecătoare astfel încât legea FM să fie liniară în fereastră, atunci metoda va atinge limita CR la un prag SNR esențial mai coborât decât în cazul vârfului WVD.

CAPITOLUL III

IDENTIFICAREA SEMNALELOR CU FAZĂ POLINOMIALĂ PRIN UTILIZAREA FILTRĂRII KALMAN EXTINSE

3.1 INTRODUCERE

Semnalele cu faze polinomiale SFP sunt frecvent întâlnite în multe aplicații de prelucrarea semnalelor precum radar, sonar, laser sau telecomunicații. Ele sunt semnale non-staționare având o frecvență instantanee ce are o variație rapidă. Estimarea parametrilor semnalelor SFP afectate de zgomot aditiv Gaussian s-a bucurat de un interes considerabil în literatura de specialitate în special în prelucrarea semnalelor și mai multe metode formulate ca sisteme liniare de identificare a problemelor au fost folosite pentru rezolvarea acestei probleme [BBO92].

Aceste abordări recunosc soluția sub forma unui filtru Kalman liniar, [PAR90], [TRE85] [GAL07] care este algoritmul optimal atunci când modelele semnalelor sunt considerate liniare și atât zgomotul de stare și cât și zgomotul de observație sunt de tip aditiv și Gaussian. Un model liniar poate fi obținut folosind aproximarea Tretter, care presupune că zgomotul gaussian are componentele de amplitudine și fază necorelate.

Cum modelul liniar Tretter [TRE85] lucrează satisfăcător atâta timp cât raportul S/Z depășește 13 dB, pentru nivele mici ale raportului S/Z se folosesc modele neliniare și proceduri de filtrare Kalman extinsă (EKF) [KAK98], [DJE05], [DJE06] care consideră o linearizare locală ce folosește o aproximare Taylor de ordinul întâi a ecuațiilor neliniare.

Acest referat tratează estimarea parametrilor unui semnal SFP de amplitudine variabilă perturbat de un zgomot aditiv și gaussian, faza fiind un polinom de gradul doi. Spre deosebire de referatele anterioare, algoritmul EKF dezvoltat în acest referat înlătură incertitudinile asupra fazei prin înlocuirea semnalului real cu reprezentarea lui în forma analitică.

Un dezavantaj al algoritmului EKF este numărul important de cazuri de divergență care apar chiar și pentru rapoarte S/Z mari. Pentru a depăși această limitare, algoritmul EKF prezentat folosește o procedură ce estimează adaptiv dispersia zgomotului cu scopul de a compensa efectul termenilor de ordin mare neglijați prin liniarizare.

3.2 REPREZENTAREA NELINIARĂ ÎN SPAȚIUL STĂRILOR A SEMNALELOR CU FAZĂ POLINOMIALĂ

Un semnal complex cu fază polinomială $y[n]$ cu amplitudine variabilă și perturbat de zgomotul aditiv $w[n]$ este exprimat prin:

$$y[n] = A[n] \exp(j\Phi[n]) + w[n] = A[n] \exp\left(j \sum_{i=0}^M b_i n^i\right) + w[n] \quad (3.1)$$

unde valoarea pozitivă $A[n]$ este amplitudinea semnalului care poate fi constantă sau variabilă în timp iar $\Phi[n]$ este o fază deterministă de ordin M având coeficienții $b_i, i=0, \dots, M$ presupuși a fi reali și necunoscuți. Zgomotul aditiv este considerat complex, alb și gaussian, având medie nulă și dispersie σ_w^2 . El poate fi scris ca și:

$$w[n] = w_R[n] + jw_I[n] \quad (3.2)$$

unde $w_R[n]$ și $w_I[n]$ reprezintă partea reală respectiv imaginară a zgomotului analitic.

Dacă ambele părți sunt necorelate între ele, având aceeași dispersie, putem scrie:

$$E\{w_R[n]w_R[n+k]\} = \frac{\sigma_w^2}{2} \delta[k] \quad (3.3)$$

$$E\{w_I[n]w_I[n+k]\} = \frac{\sigma_w^2}{2} \delta[k] \quad (3.4)$$

$$E\{w_R[n]w_I[n+k]\} = 0, \quad \forall k \in Z \quad (3.5)$$

unde $E\{\cdot\}$ este operatorul de mediere statistică. Un semnal analitic având aceste proprietăți se numește zgomot „ciclic” [TKM00].

3.2.1 Modelul semnalului SFP în spațiul stărilor și ecuația de tranziție

Modelul în spațiul stărilor și ecuația de tranziție a unui semnal cu fază polinomială pot fi obținute luând ca punct de plecare dezvoltarea în serie Taylor a funcției de fază polinomiale de ordin M , $\Phi[n]$ cu [GAL07], [TKM00]:

$$\Phi[n+1] = \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!} \Phi^{(k)}[n] \quad (3.6)$$

$$\Phi^{(l)}[n+1] = \sum_{k=l}^M \frac{1}{(k-l)!} \Phi^{(k)}[n] \quad l = \overline{1, M} \quad (3.7)$$

unde $\Phi^{(k)}[n]$ reprezintă derivata de ordinul k a funcției de fază:

$$\Phi^{(k)}[n] = \Phi^{(k-1)}[n] - \Phi^{(k-1)}[n-1], \quad k = \overline{1, M} \quad (3.8)$$

Se observă că în timp discret sunt posibile și alte definiții pentru derivata fazei (3.8) așa cum rezultă și din [BBO92].

În scopul de a obține reprezentarea exactă pe lângă fază și a amplitudinii variabile a semnalului SFP, definim următorul vector de stare $\mathbf{x}[n]$ de dimensiunile $(M+2) \times 1$

$$\mathbf{x}[n] = [A[n] \quad \Phi[n] \quad \Phi^{(1)}[n] \quad \Phi^{(2)}[n] \quad \dots \quad \Phi^{(M)}[n]]^T \quad (3.9)$$

Considerând doar variațiile fazei semnalului PPS, ecuația de tranziție a stării poate fi scrisă ca și :

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n] \quad (3.10)$$

unde matricea de tranziție F de dimensiune $(M+2) \times (M+2)$ este compusă din coeficienții (3.6) și (3.7):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1/1! & 1/2! & \dots & 1/M! \\ 0 & 0 & 1 & 1/1! & \dots & 1/(M-1)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Acest model poate fi extins cu scopul de a include amplitudine variabilă a semnalului SFP. Considerăm că amplitudinea semnalului folosește un model aleator:

$$A[n+1] = A[n] + v[n] \quad (3.12)$$

unde $v[n]$ este o secvență de scalari aleatori, independenți și identic distribuiți (I.I.D.) având distribuția normală $N(0, \sigma_v^2)$. Astfel, rata de evoluție a amplitudinii este descrisă prin varianța σ_v^2 .

Incluzând ecuația (3.12) în ecuația (3.10), expresia finală a ecuației de tranziție de stare este:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n] + \mathbf{G}v[n] \quad (3.13)$$

unde \mathbf{G} este un vector având forma $(M+2) \times 1$:

$$\mathbf{G} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.14)$$

Așa cum reiese din (3.13) ecuația de tranziție de stare a semnalului SFP este liniară.

3.2.2 Ecuația de observație

În scopul de a estima parametrii unor semnale perturbate de zgomot se folosește un model neliniar. În acest sens, semnalul măsurat $y[n]$ este exprimat printr-un vector de mărime 2×1 ale cărui componente sunt partea reală respectiv imaginară a semnalului:

$$\mathbf{y}[n] = [\text{Re}(y[n]) \ \text{Im}(y[n])]^T \quad (3.15)$$

Analizând legătura dintre vectorul de observație (3.15) și vectorul de stare (3.9) se poate conclua că ecuația de observație este neliniară:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{h}(\mathbf{x}[n]) + \mathbf{w}[n] \quad (3.16)$$

unde funcția neliniară $\mathbf{h}(\mathbf{x}[n])$ este descrisă prin:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}[n]) = \begin{bmatrix} h_1[n] \\ h_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[n] \cos(x_2[n]) \\ x_1[n] \sin(x_2[n]) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Vectorul de observație corespunzător zgomotului $\mathbf{w}[n] = [w_R[n] \ w_I[n]]^T$ este definit prin relațiile (3.2)-(3.5).

Matricea de corelație a zgomotului de observație este dată prin aceleași relații:

$$\mathbf{Q}_w[n] = \frac{\sigma_w^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Pentru a folosi algoritmul Kalman extins (EKF) aplicăm procedura de liniarizare de ordinul 1 asupra expresiei funcției $\mathbf{h}(\mathbf{x}[n])$ din (3.17) în jurul estimării poziției vectorului de stare $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}[n]) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) + \left. \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]} (\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) \quad (3.19)$$

cu

$$\mathbf{H}[n] = \left. \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{x}_2[n|n-1]) & -\hat{x}_1[n|n-1] \sin(\hat{x}_2[n|n-1]) & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\hat{x}_2[n|n-1]) & \hat{x}_1[n|n-1] \cos(\hat{x}_2[n|n-1]) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Este evident ca înlocuirea lui $\mathbf{h}(\mathbf{x}[n])$ cu aproximarea sa de ordinul 1 are efecte dramatice asupra stabilității și convergenței algoritmului EKF, ceea ce implică apariția, în special pentru rapoarte S/Z mici a cazurilor în care algoritmul diverge. Un mecanism care practic elimină aceste cazuri va fi prezentat în paragraful următor.

3.3 ALGORITMUL EKF

Filtrul Kalman extins (EKF) este o soluție *aproximativă* care oferă posibilitatea extinderii principiilor de filtrare Kalman la modelele *nelineare* în spațiul stărilor. Atâta timp cât modelul de observație este neliniar, pentru a aplica procedura de filtrare Kalman așa cum a fost arătat, e nevoie de o liniarizare de ordinul 1 în jurul lui $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ la fiecare pas al algoritmului Kalman standard. Procedura este bine cunoscută sub numele de algoritmul EKF (filtrul Kalman extins) [HAY96] și folosește ecuațiile în spațiul stărilor (3.13) și (3.16) și de asemenea ecuația de liniarizare a funcției de observație în jurul vectorului curent estimat (3.20).

Considerăm că starea inițială $x[1]$, zgomotul de observație $w[n]$ și zgomotul de stare $v[n]$ sunt de tip gaussian și mutual independente. Fie $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ și $\mathbf{R}[n|n-1]$ media condiționată respectiv dispersia condiționată a lui $\hat{\mathbf{x}}[n]$ stabilite pe baza observațiilor $y[1], \dots, y[n-1]$ și fie $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ și $\mathbf{R}[n|n]$, media condiționată respectiv dispersia condiționată a lui $\hat{\mathbf{x}}[n]$ corespunzător observațiilor $y[1], \dots, y[n]$.

3.3.1 Reactualizarea ecuațiilor de măsurare

$$\mathbf{H}[n] = \begin{bmatrix} \cos(\hat{x}_2[n|n-1]) & -\hat{x}_1[n|n-1]\sin(\hat{x}_2[n|n-1]) & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\hat{x}_2[n|n-1]) & \hat{x}_1[n|n-1]\cos(\hat{x}_2[n|n-1]) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{K}[n] = \mathbf{R}[n|n-1]\mathbf{H}^T[n] \left(\mathbf{H}[n]\mathbf{R}[n|n-1]\mathbf{H}^T[n] + \hat{\mathbf{Q}}_w[n] \right)^{-1} \quad (3.22)$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n] = \hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{K}[n] \left(\mathbf{y}[n] - \begin{bmatrix} \hat{x}_1[n|n-1]\cos(\hat{x}_2[n|n-1]) \\ \hat{x}_1[n|n-1]\sin(\hat{x}_2[n|n-1]) \end{bmatrix} \right) \quad (3.23)$$

$$\mathbf{R}[n|n] = \mathbf{R}[n|n-1] - \mathbf{K}[n]\mathbf{H}[n]\mathbf{R}[n|n-1] \quad (3.24)$$

3.3.2 Reactualizarea ecuațiilor de estimare a stării

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (3.25)$$

$$\mathbf{R}[n+1|n] = \mathbf{F}\mathbf{R}[n|n]\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2 \quad (3.26)$$

unde $\mathbf{K}[n]$ este matricea de câștig Kalman la momentul n .

Parametrii semnalului cu fază polinomială descriși prin vectorul $\boldsymbol{\theta} = [A[n] \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M]^T$ pot fi evaluați pornind de la estimările vectorului de stare folosind relația (3.5):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}[n] = \mathbf{C}\mathbf{F}^{-n}\hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (3.27)$$

unde matricea \mathbf{C} e o matrice diagonală:

$$\mathbf{C} = \text{diag}([1 \ 1 \ 1/1! \ \dots \ 1/M!]) \quad (3.28)$$

Cum algoritmul EKF nu este un estimator optimal, dacă estimarea inițială a stării este eronată sau dacă procesul este modelat incorect, filtrul poate foarte ușor să devină divergent datorită operației de liniarizare. Acest comportament apare în cazul nostru îndeosebi atâta timp cât raportul este mai mic decât 10 dB. De exemplu, pentru un raport S/Z de 0dB, rata cazurilor de divergență poate depăși 20%.

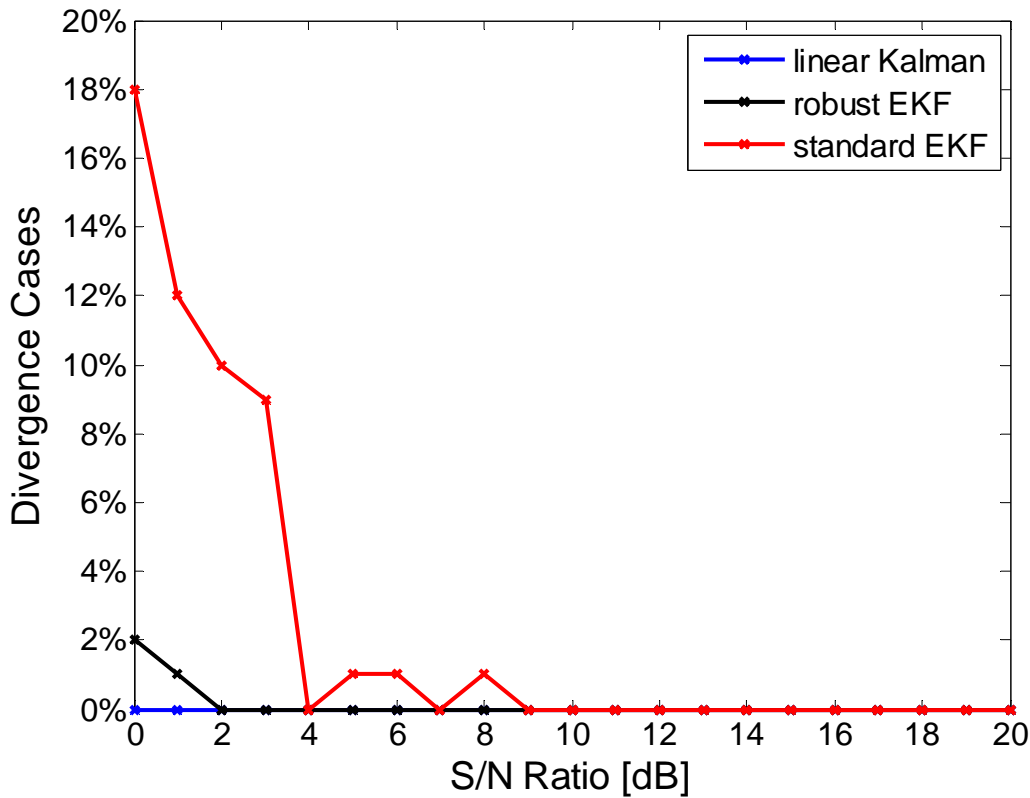


Figura 3.1 Rată de divergență față de SNR evaluate pe același semnal prin filtrarea Kalman

În mod contrar, nu există cazuri de divergență în cazul metodei liniare [GAL07]. Figura 3.1 arată dependența ratei cazurilor divergente de raportul S/Z pentru metoda EKF standard obținută prin simulări efectuate asupra unui semnal SFP obișnuit. Ca rezultat al diverselor simulări făcute, am ajuns la concluzia că pentru a compensa efectul neglijării termenilor de ordin superior în timpul liniarizării ecuației de măsurare în scopul eliminării cazurilor de divergență este mult mai eficient să supraestimăm valoarea dispersiei zgomotului.

Consecințele unei asemenea creșteri a dispersiei sunt pozitive: rata de divergență scade drastic. Același efect se observă și în cazul erorilor de estimare. Procedura de estimare a fost stabilă empiric și constă în substituția matricei $\hat{\mathbf{Q}}_w[n]$ în (3.22) cu $k_R \mathbf{Q}_w[n]$ unde factorul de robustețe k_R este calculat în felul următor:

$$10 \lg k_R [\text{dB}] = \begin{cases} 15, & \text{if } 10 \lg \sigma_w^2 \leq 5 \\ 15 - 1.5(10 \lg \sigma_w^2 - 5), & \text{if } 5 < 10 \lg \sigma_w^2 \leq 15 \\ 0, & \text{if } 10 \lg \sigma_w^2 > 15 \end{cases} \quad (3.29)$$

Îmbunătățirile obținute folosind factorul k_R sunt arătate în **figura 3.1**. Am desemnat algoritmul EKF ce folosește factorul multiplicativ k_R prin numele de algoritm EKF robust.

3.4 REZULTATELE SIMULĂRII

În continuare sunt reprezentate rezultatele simulării care au fost făcute pentru estimarea semnalului SFP încat în zgomot gaussian bazat pe algoritmul EKF robust. Secvența SFP alcătuită din 1000 de eșantioane și de ordinul doi este reprezentat în figura 3.2. Valorile reale ale parametrilor fazei sunt: $b_0 = \pi/2$, $b_1 = 0.0785$, $b_2 = 1.309 \times 10^{-3}$.

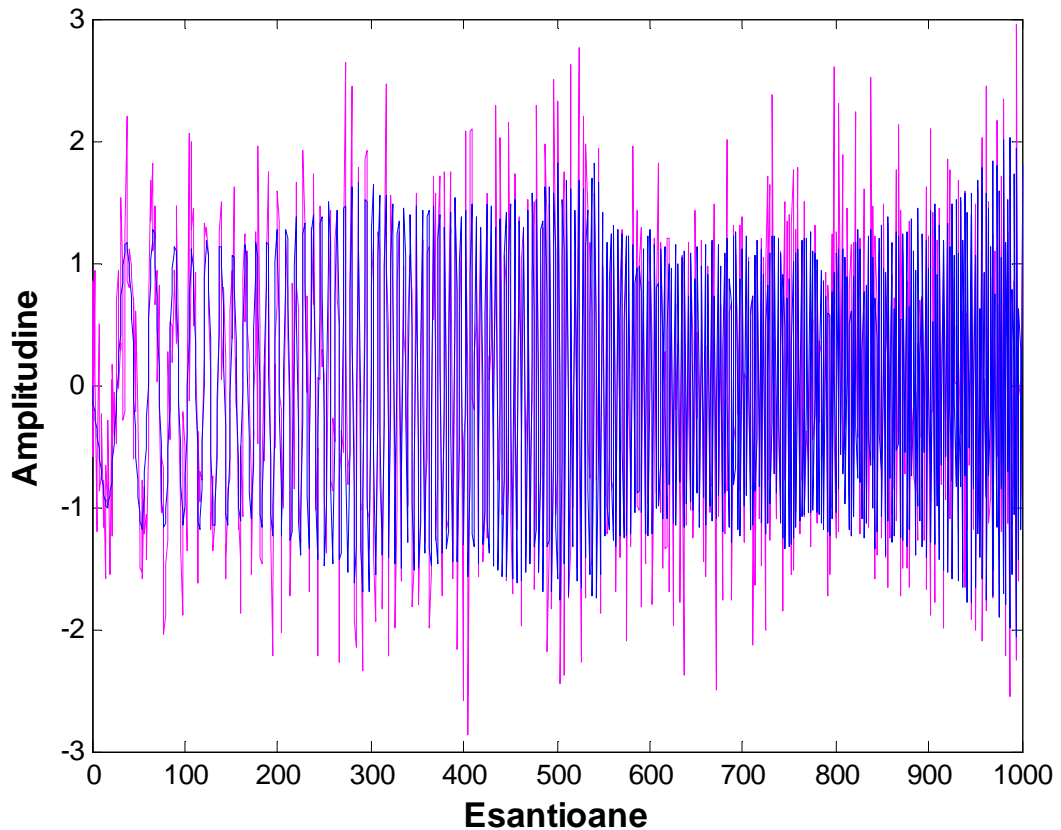


Figura 3.2 Secvența SFP de ordinul 2 cu zgomot Gaussian, SNR=5dB

Zgomotul de stare $v[n]$ este Gaussian, alb, de medie nulă cu dispersia $\sigma_v^2 = 10^{-3}$.

Condițiile inițiale sunt aceleași ca și în [KAK98] ca:

$$\hat{\mathbf{x}}[1|0] = [1/2 \quad \pi/3 \quad 0 \quad 2 \cdot 10^{-3}]^T \quad (3.30)$$

și

$$\mathbf{R}[1|0] = \text{diag}\left[k_R/2 \quad \pi^2/9 \quad \pi^2/9 \quad 4.3865 \cdot 10^{-6}\right] \quad (3.31)$$

În contrast cu algoritmul de filtrare Kalman-Tretter introdus în [GAL07] algoritmul EKF lucrează satisfăcător pentru nivele joase al raportului S/Z, în mod special, dacă determinarea parametrilor de fază constituie principala țintă a măsurătorilor.

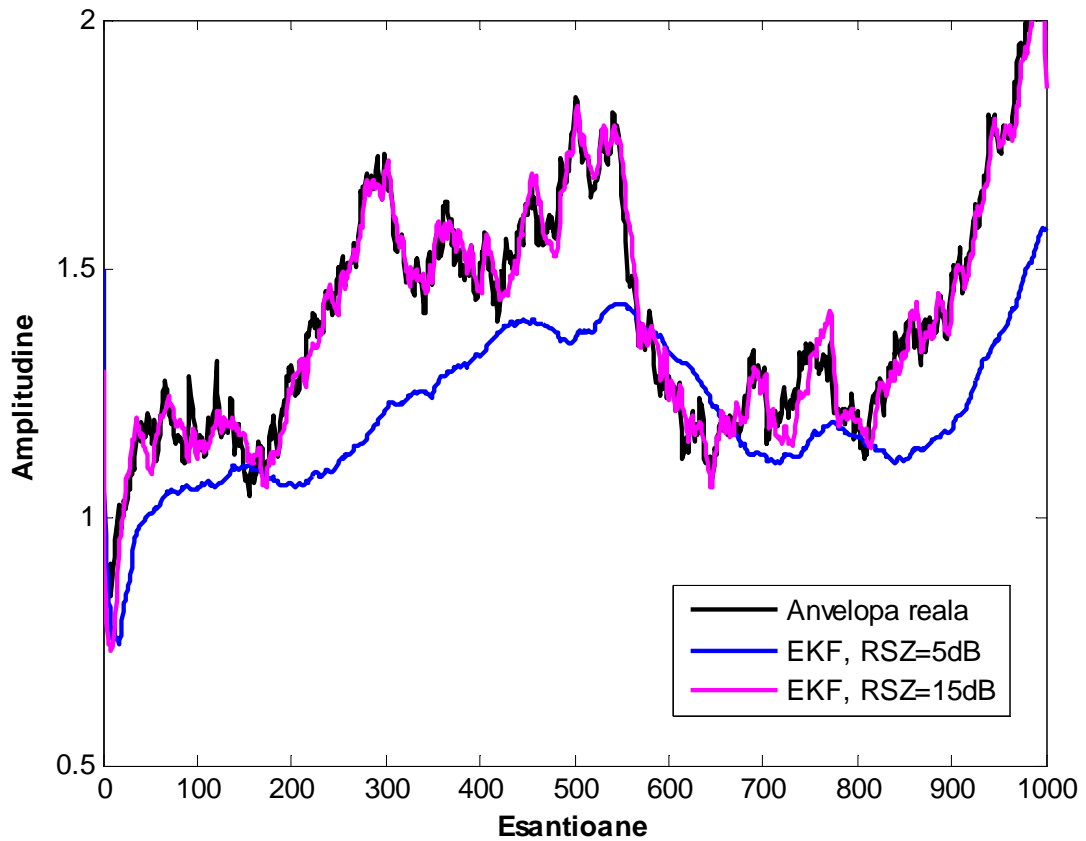


Figura 3.3 Estimarea amplitudinii

Estimarea de amplitudine este puternic afectată la nivele ridicate de zgomot. Estimarea cea mai exactă (precisă) se obținută pentru b_2 , în timp ce faza inițială b_0 este cea mai dificil de stabilit, deoarece estimarea sa depinde de estimarea exactă a coeficienților de ordin mare.

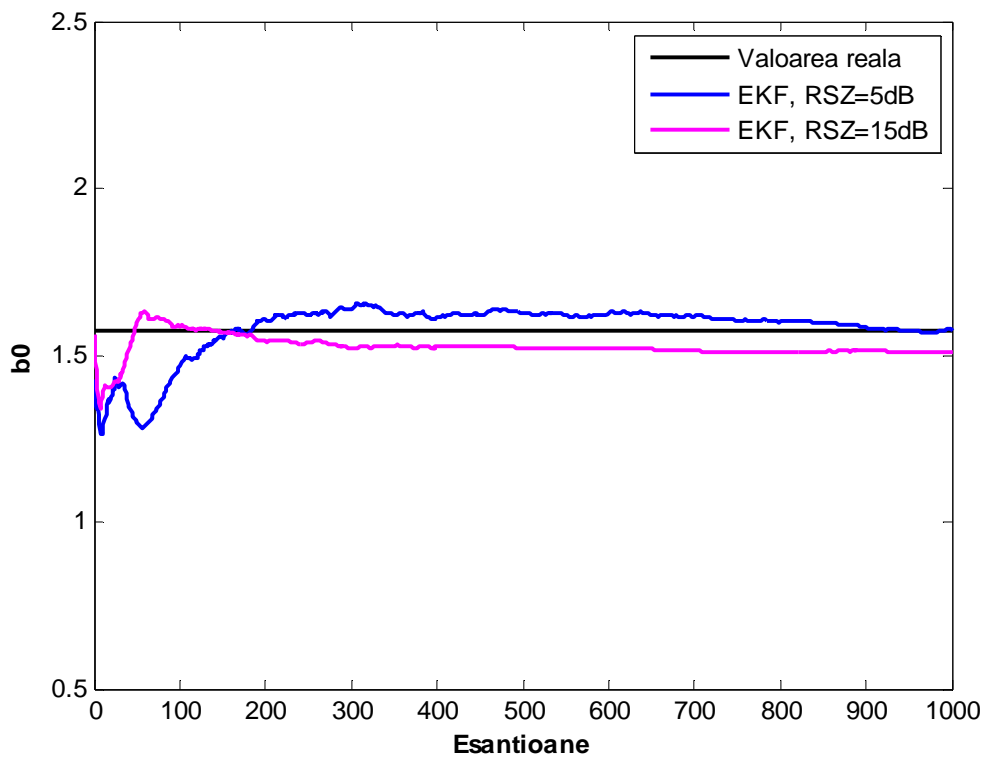


Figura 3.4 Estimarea parametrului b_0

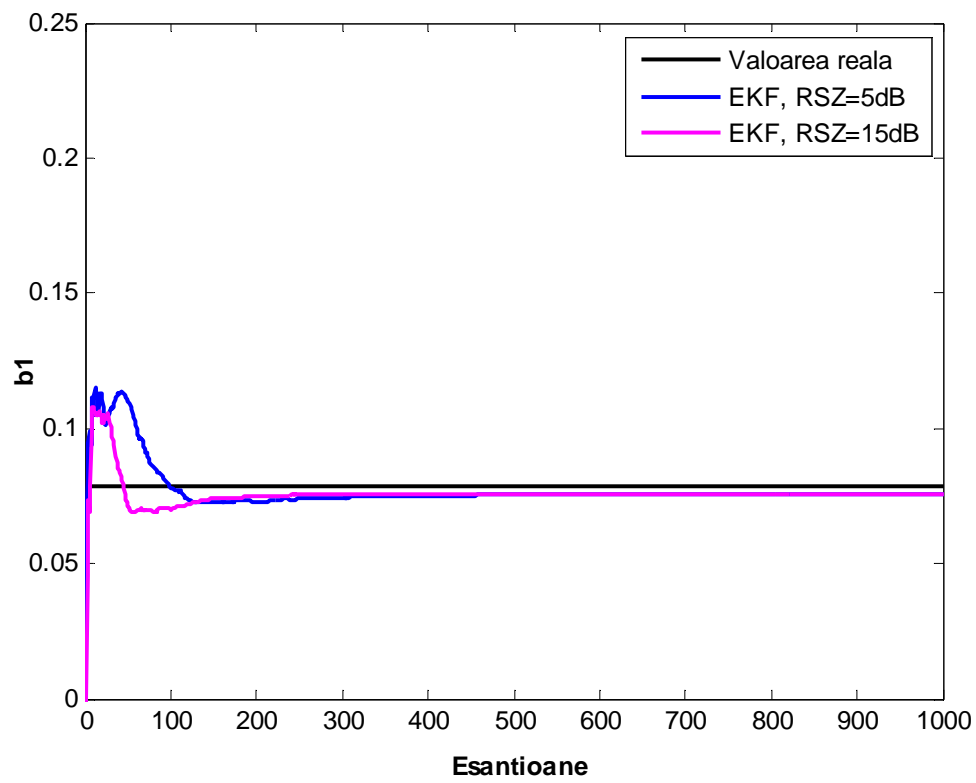


Figura 3.5 Estimarea parametrului b_1

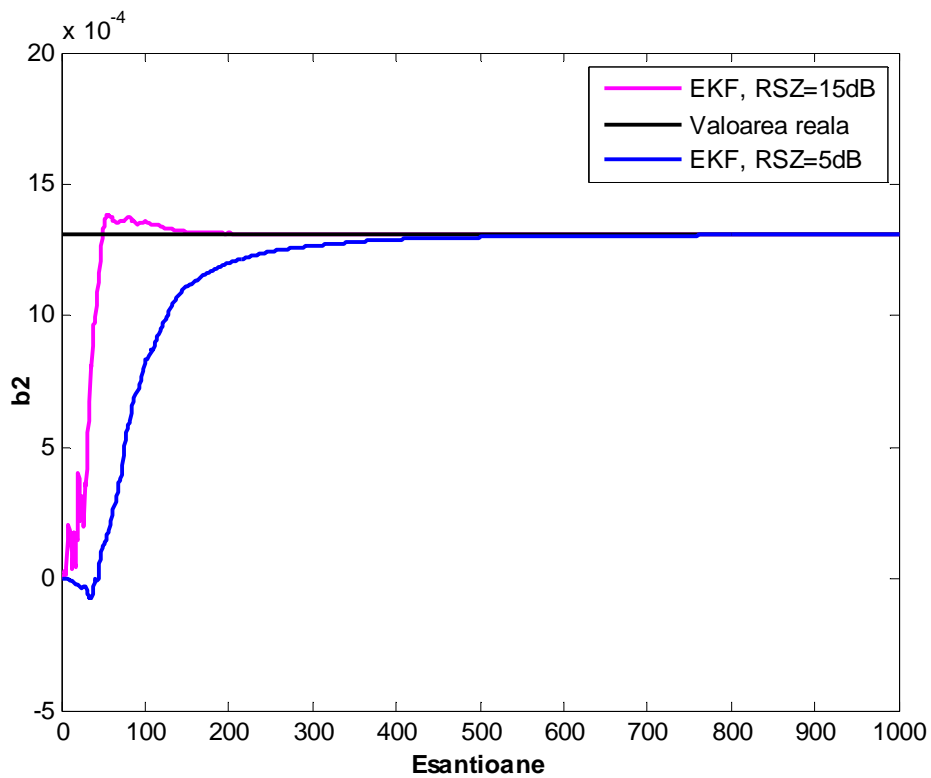


Figura 3.6 Estimarea parametrului b_2

O analiză statistică a fost făcută prin efectuarea de 100 estimări asupra unui semnal SFP de test înecat în zgomot gaussian pentru un raport S/Z cuprins între valorile 0 și 20dB. Valorile medii a erorii RMS au fost calculate pentru fiecare din patru parametri care descriu semnalul SFP de ordinul doi.

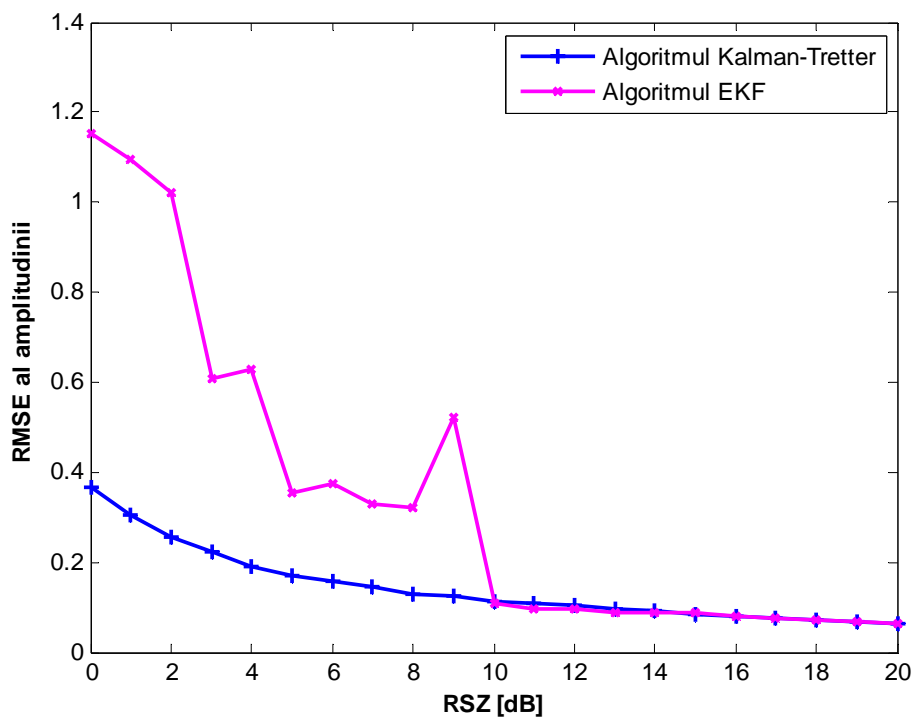


Figura 3.7 RMSE al amplitudinii în raport cu RSZ

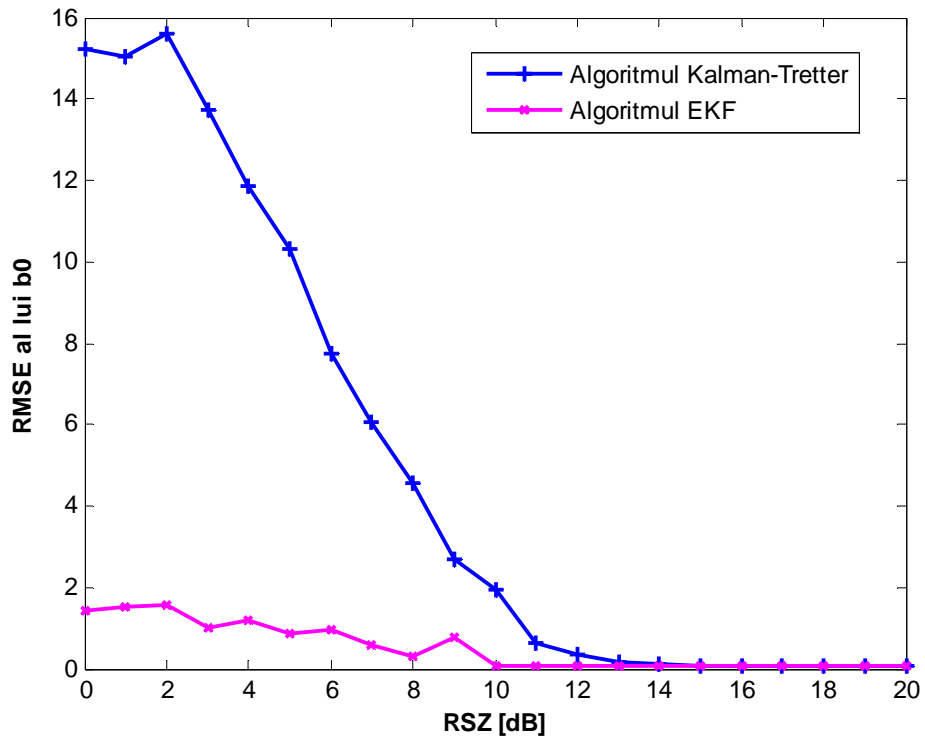


Figura 3.8 RMSE al lui b_0 în raport cu RSZ

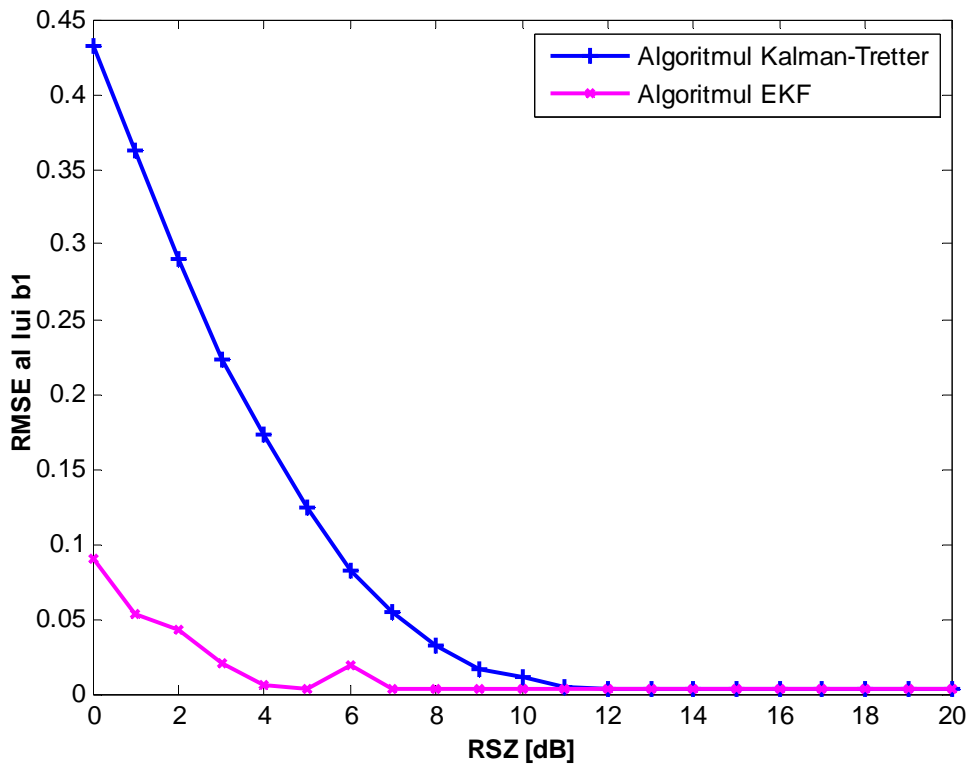


Figura 3.9 RMSE al lui b_1 în raport cu RSZ

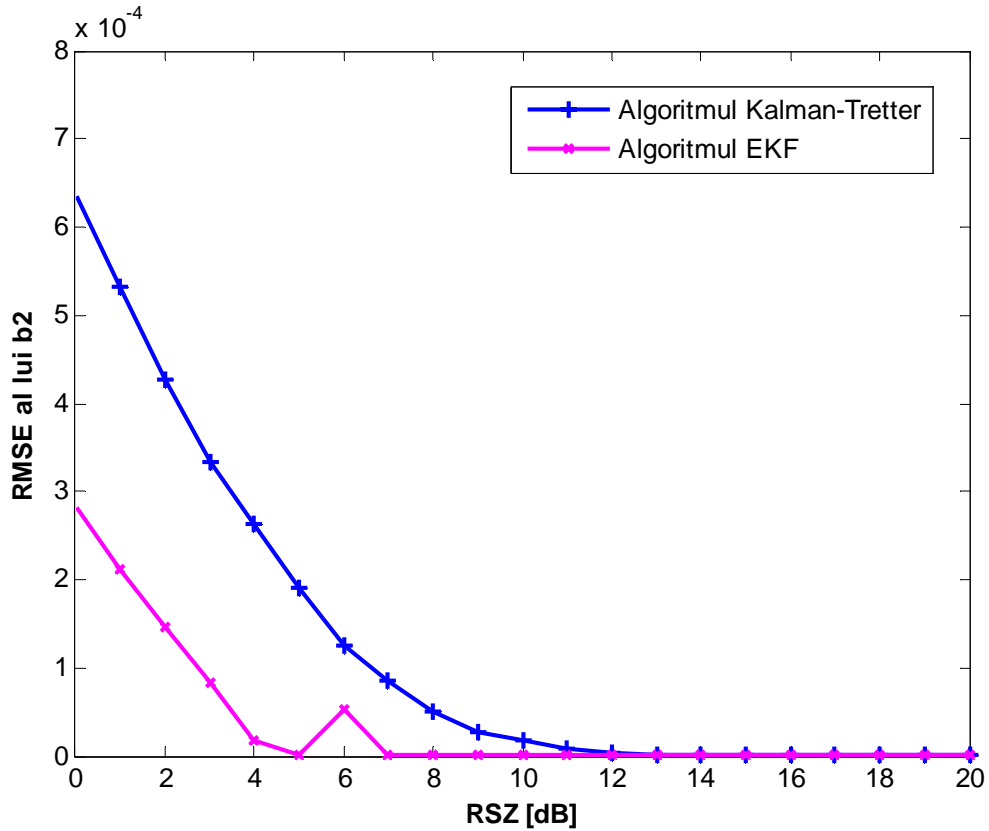


Figura 3.10 RMSE al lui b_2 în raport cu RSZ

Rezultatele sunt prezentate în [Figurile 3.7 și 3.10](#) și se observă că dacă raportul semnal/zgomot SNR este mai mic, decât 13dB, în estimarea fazei a parametrilor algoritmul EKF furnizează rezultatele mult mai bune decât rezultatele oferite de metoda Kalman-Tretter. Parametrul la care algoritmul Kalman-Tretter prezinta performanțe mai bune este de amplitudine, dar până la 10dB, ambele metode se comportă în mod identic. Ca rezultat, vom putea să declarăm că algoritmul EKF extinde gama de metode Kalman de 13dB ca impuse de algoritm liniar Kalman la aproximativ 5dB.

3.5 CONCLUZII

Aceste referat oferă un nou model în spațiul stărilor al semnalelor cu fază polinomială (SFP) și cu amplitudine variabilă, care oferă performanțe superioare metodei liniare de filtrare Kalman prin utilizarea algoritmului EKF. Algoritmul EKF robust implementat pe acest model extinde gama performanțelor algoritmilor Kalman în estimarea semnalelor cu fază polinomială de la o valoare a raportului S/Z de 13dB la 5dB.

Ca perspectivă pentru cercetările viitoare trebuie avută în vedere estimarea mai bună a amplitudinii semnalelor SFP precum și extinderea algoritmului EKF asupra semnalelor de tip multicomponente precum și pentru semnale cu fază polinomială de ordin mai mare.

BIBLIOGRAFIE

[ACK70] M. H. Ackroyd, „Instantaneous and time varying spectra – An introduction”, *J. Radio and Electron. Eng.*, vol.39, no.3, 1970.

[BBO92] B. Boashash, “Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal – Part 2: Algorithms and Applications”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 80, No. 4, April 1992, pp 540-568.

[BED63] E. Bedrosian, „A product theorem for Hilbert transforms”, *Proc. IEEE*, vol. 51, pp. 686-689, 1963

[BLK89] B. Boashash, G. Jones and P. Kootsookos, „Time-frequency signal analysis and instantaneous frequency: their interrelationship and applications”, presented at the *Proc. ISCAS*, OR, Apr., 1989

[BOA82] B. Boashash, „Representation temps-frequence” Thes. Doct. Ing., Inst. Nat. Polytechnique, Univ. Grenoble, France, May, 1982

[BOA89] B. Boashash and G. Jones, and P. O. Shea „Instantaneous frequency of signals: concepts, estimation techniques and applications” in *Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing IV*. Franklin T. Luk, *Ed.*, *Proc. SPIE* 1154, pp.382-400, 1989

[BOA90] B. Boashash, „Time-frequency signal analysis”, in *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing, vol. 1 of 2*, S. Haykin, Ed. New York: Prentice Hall, 1990

[BOA90] G. Jones and B. Boashash, „On the concepts of instantaneous frequency, time-delay, instantaneous bandwidth and their relation to time-frequency distributions” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing 90*, pp. 2467-2470, 1990.

[BOA91] B. Boashash, P. O’Shea and B. Ristic, „Statistical/computational comparison of some estimators for instantaneous frequency”, in *Proc. Int. Conf. Acoustic, Speech, Signal Processing*, Toronto, Canada, 1991, vol. 5, pp. 3193-3196

[BOA92] B. Boashash, „Instantaneous frequency: Part 1: Fundamentals”, *Proc. IEEE*, vol. 80., 1992

[BOA93] B. Boashash and P. O’Shea, „Use of the cross Wigner-Ville distribution for estimating the instantaneous frequency”, *IEEE Trans. Acoust Speech, Signal Processing*, vol. 41(3):pp. 1439-1445, 1993

- [BOS90] B. Boashash, P. O'Shea and M. Arnold, „Algorithms for instantaneous frequency estimation: A comparative study” in *Proc. SPIE Conf. Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing V.* vol. 1348, San Diego, CA, July 1990
- [CAR37] J. Carson and T. Fry, „Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency modulation”, *Bell System Tech. J.*, vol. 16, pp. 513–540, 1937.
- [CAR86] A. Carlson, *Communications Systems* New York, McGraw-Hill, 1986
- [CIO84] J. Cioffi and T. Kailath, „Fast recursive-least-squares, transversal filters for adaptive filtering”, *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 32, pp. 304-337, 1984
- [CLA80] T. A. C. M. Classen and W. F. G. Mecklenbrauker, „The Wigner Distribution – Part II”, *Philips Journal of Research*, vol. 35, pp. 276-300, 1980
- [COH66] L. Cohen. „Generalised phase – space distributions” *J. Math. Phys.*, vol. 7, pp. 781–786, 1966.
- [COH88] F. Cohen, G. Boudreau-Bartels and S. Kadambe „Tracking of unknown non-stationary chirp signals using unsupervised clustering in the Wigner distribution space” in *Proc. ICASP'88*, pp. 2180-2183, 1988
- [COH88] L. Cohen and C. Lee, „Instantaneous frequency, its standard deviation and multicomponent Signals”, in *Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing III*, Franklin T. Luk, Ed., *Proc. SPIE*, vol. 975, pp. 186-208, 1988
- [DJE05] M. Djeddi, and M. Benidir, “A two Parallel Extended Kalman Filtering Algorithm for the Estimation of Chirp Signals in Non-Gaussian Noise”, 2005, September, *EUSIPCO-2005*, Antalya-Turkey.
- [DJE06] M. Djeddi, and M. Benidir, “A Robust Estimator for Polynomial Phase Signals in Non Gaussian Noise using Parallel Unscented Kalman Filter”, 2006, September, *EUSIPCO-2006*, Florence-Italy.
- [FJH87] F. J. Harris, „Exact FM detection of complex time series” in *Proc. ISSPA '87*, pp. 70-73, Brisbane, Australia, 1987
- [FJH88] F. J. Harris and H. Abu Salem „Performance comparison of Wigner-Ville based techniques to standard FM-discriminators for estimating instantaneous frequency of a rapidly slewing FM sinusoid in the presence of noise”, *SPIE, Advanced Alg. and Archit. for Signal Processing III*, vol. 975, 1988
- [GAB46] D. Gabor, „Theory of communication”, *Proc. IEE*, vol. 93 (III), pp. 429-457, 1946

- [GAL07] J. Gal, A. Câmpeanu, and I. Naforniță, “Estimation of Chirp Signals in Gaussian Noise by Kalman Filtering”, *Proceedings of International Symposium on Signals, Circuits and Systems*, ISSCS 2007 July 2007, pp. 299-302, Iași Romania.
- [GRI75] L. Griffiths, „Rapid measurement of digital instantaneous frequency”, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing* pp. 202-221, 1975
- [GRI75] L. Griffiths, „Rapid measurement of digital instantaneous frequency”, *IEEE Trans. On Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 23, 1975
- [GUP75] M. S. Gupta, „Definition of instantaneous frequency and frequency measurability” *Amer. J. Phys.*, vol. 43, no. 12, Dec. 1975.
- [HAS88] H. Abu Salem „A comparison of some FM discriminators”, Master’s thesis, San Diego State University, CA, 1988
- [HAY89] S. Haykin, *An introduction to analog and digital communications*, Wiley, 1989
- [HAY91] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991, 2nd ed.
- [HAY96] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1996
- [HUA] D. Huang and E. J. Hannan, „Estimation of Time-Varying Frequency”, submitted to *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*
- [HVT68] H. Van Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory Part I*, New York: John Wiley, 1968
- [HWB90] H. Whitehouse, B. Boashash and J. Speiser, „High resolution techniques for temporal and spatial signals” presented at the Workshop on High Resolution Methods for Underwater Acoustics, organized by GRETSI, Juan les Pins, France, June 16, 1989, also in the Springer-Verlag *Lecture Notes in Computer Science*, M. Bouvet and G. Bienvenu, Eds., 1990.
- [JAC79] L. Jackson and D. Dufts, „Author’s Reply”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 27, pp. 200, Apr. 1979
- [KAK98] W. El Kaakour, “Modélisation et identification des signaux à phase polynomiale”. *PhD thesis*, Université de Nantes - École Centrale de Nantes, Juin 1998.
- [KAY88] S. Kay, „Statistically/computationally efficient frequency estimation”, in *Proc. ICASSP’88*, New York, 1988, pp. 2292-2295
- [KAY88] S. Kay, *Modern Spectral Estimation*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988

- [KMW90] K. M. Wong and Q. Jin, „Estimation of the time-varying frequency of a signal: The Cramer-Rao bound and the application of the Wigner Distribution”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, pp. 519-536, 1990.
- [LAC75] J. L. Lacoume and W. Kofman, „Description des processus non-stationnaires par la representation temp-frequence – Applications” Colloque national sur le traitement du signal et ses applications, Nice, France, 1975.
- [LBW88] L. B. White and B. Boashash „Estimating the instantaneous frequency of a Gaussian random processes”, *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 36, pp. 1518-1521, Sept. 1988
- [MAN74] L. Mandel, „Interpretation of instantaneous frequency”, *Amer. J. Phys.*, vol. 42, pp. 840-846, 1974.
- [MAR87] S. L. Marple, *Digital Spectral Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987
- [NUT66] A. Nuttall, „On the quadrature approximation to the Hilbert transform of modulated signals”, *Proc. IEEE*, vol. 54, pp. 1458, 1966.
- [OPP75] A. Oppenheim and R. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975
- [PAR90] P. J. Parker, and B. D.O. Anderson, “Frequency tracking of nonsinusoidal periodic signals in noise”, *Signal Processing*, Vol. 20, 1990, pp. 127–152.
- [POS90] P. O’Shea and B. Boashash, „Some robust instantaneous frequency estimation techniques with application to non-stationary transient detection” in *Proc. EUSIPCO’90*, Sept, 1990, pp.165-168
- [PRI88] M. B. Priestley, *Non-linear and Non-stationary Time-series Analysis*. London, UK: Academic Press. 1988.
- [RAO90] Rao and F. Taylor, „Estimation of the Instantaneous Frequency Using the Discret Wigner Distribution”, *Electron Lett.*, vol. 26 no. 4, pp. 246-248, 1990
- [RIC82] S. O. Rice, „Envelopes of narrow-band signals”, in *Proc. IEEE*, vol. 70, pp.692-699, July 1982
- [RIF74] D. C. Rife and R. R. Boorstyn, „Single tone parameter estimation from discrete-time observations”, *IEEE Trans. Inform. Theory* vol. 20, pp. 591-598, 1974
- [RIH66] A. Rihaczek, „Hilbert transforms and the complex representation of signals”, *Proc. IEEE*, vol. 54, pp. 434-435, 1966

- [RIH68] A. Rihaczek, „Signal energy distribution in time and frequency”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-14, pp.369-374, 1968
- [SHE53] J. Shekel, „Instantaneous frequency”, *Proc. IRE*, vol. 41, pp. 548, 1953
- [SLE61] D. Slepian, H. Landau and H. Pollak, „Prolate spheroidal wave functions – Fourier analysis and uncertainty, I, II and III” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 40, no.1, pp. 43-84, 1961
- [SLE76] D. Slepian, „On bandwidth”, in *Proc. IEEE*, vol. 64, pp. 292-3000, Mar. 1976
- [SNY] D. L. Snyder, *A State Space Approach to Analog Communications Systems*, Cambridge, MA: MIT Press
- [SPA70] A. Spataru, *Theorie de la Transmission de l'Information – I: signaux et bruits*, translation from Editura Tehnica, Bucarest, Romania, 1970
- [TKM00] T. K. Moon and W. C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, Prentice-Hall, 2000.
- [TRE85] S. A. Tretter, “Estimating the Frequency of a Noisy Sinusoid by Linear Regression”, *IEEE Trans. On Information Theory*, vol. IT-31, No. 6, Nov. 1985, pp. 832-835.
- [TRE85] S. Tretter, „Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-31, pp.832-835, Nov. 1985
- [VAN46] B. Van der Pol. „The fundamental principles of frequency modulation”, *Proc. IEE*, vol. 93 (III), pp. 153-158, 1946
- [VIL48] J. Ville, „Theorie et Application de la Notion de Signal Analytic”, *Cables at Transmissions*, vol. 2A, pp.61-74, 1948
- [VIL48] J.Ville, „Theorie et application de la notion de signal analytic”, *Cables et Transmissions*, vol. 2A(1), pp. 61-74, Paris, France, 1948. Translation by I. Selin, „Theory and applications of the notion of complex signal”, *Report T-92, RAND Corporation*, Santa Monica, CA
- [WID60] B. Widrow and M. Hoff „Adaptive switching circuits” in *IRE 1960, Wescon. Conv. Rec., Part 4*, 1960, pp. 96-104
- [WID85] B. Widrow and S. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985