

Théorie de l'utilité

La théorie de l'utilité

(Bernoulli, Ars Conjectandi, 1738)

Origine et développement anglo-saxon, très utilisée aux USA :

- agrégation multicritère conduisant à un critère unique de synthèse
- problème très bien posé : un seul critère numérique à optimiser
- théorie très utile dans l'incertain
- théorie axiomatisée

Idée principale : principe de l'homo economicus

- les individus agissent de manière à optimiser leur utilité
- maximisation réalisée plus ou moins inconsciemment

La théorie de l'utilité

Maximisation d'une fonction u

Maximisation d'une fonction u :

- agrégeant tous les points de vue à prendre en compte (fonctions d'utilité partielles u_i)
- problème : déterminer les fonctions
 - u
 - u_i

La théorie de l'utilité

Maximisation d'une fonction u

Questions principales :

- quelles sont les propriétés que doivent posséder les préférences du décideur pour être représentables par une fonction u ayant une forme donnée
 - additive
 - multiplicative
 - etc.
- comment construire ces fonctions ?
- comment estimer les paramètres intervenant dans la forme choisie ?

Modèle additif

Présentation du modèle additif :

- en présentant la théorie d'un point de vue historique
- de la valeur espérée à l'utilité subjectivement espérée
- moyen de présenter différentes facettes du comportement humain
 - face à des problèmes de décision
 - en particulier face au risque

Principe de la valeur espérée

Exemple : jeu à deux issues (pile/face)

	Face	Pile
J	$x - c$	$-c$
$\neg J$	0	0

- mise de c francs, gain de x francs, face gagne
- jouer ou ne pas jouer ?
- $ve(J) = 1/2(x - c) + 1/2(-c) = x/2 - c$
- $ve(\neg J) = 0$

\Rightarrow accepter le jeu si $x \geq 2c$

Principe de la valeur espérée

Règle de décision simple :

- déterminer pour chaque action sa valeur espérée
- choisir celle qui a la plus grande valeur

Forme générale :

- valeur espérée d'un jeu x à n issues x_1, \dots, x_n avec les probabilités p_1, \dots, p_n est

$$ve(x) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i$$

Principe de la valeur espérée

7 concepts

- option, action ou alternative
- états de la nature : les événements qui peuvent intervenir une fois la décision prise
- les issues : combinaisons d'alternatives et d'états de la nature
- probabilité : concept lié à celui d'états de la nature
- valeurs : valeurs associées à chaque issue (valeurs monétaires, degrés de satisfaction, ...)
- valeur espérée : c'est la sommation des valeurs des issues pondérées par les probabilités attachées aux états de la nature
- règle de décision : choisir l'action dont la valeur espérée est maximale

Principe de la valeur espérée

Problème : modèle non conforme aux comportements observés

- accepter tous les paris favorables
 - jouez vous si $c = 10000$ francs et $x = 20000$ francs ($p = 0.7$) ?
- refuser les paris défavorables
 - casinos
 - assurances
- être indifférent face aux jeux à valeur espérée nulle

Autres problèmes :

- suppose que tous les états de la nature peuvent être décrits
- que le décideur peut effectuer les calculs sous-jacents

Principe de la valeur espérée

Amélioration :

- remplacer les échelles objectives par des échelles subjectives

Principe de l'utilité espérée :

$$ve(x) = \sum_{i=1}^n p_i \times u(x_i)$$

Où

- la fonction u représente l'utilité (la satisfaction) du décideur
- ou encore la valeur d'une option une fois incorporée l'attitude du décideur face au risque

Principe de l'utilité espérée

Utilité

- ce qui importe au décideur ce n'est pas le gain en lui-même mais l'utilité qu'il procure
 - l'utilité de gagner 100 francs n'est pas nécessairement le double de celle associée au fait de gagner 50 francs
 - il apparaît moins important de gagner 1000 francs lorsqu'on vient d'en gagner 100 000 que de gagner 500 francs lorsqu'on vient d'en gagner 200

Principe de l'utilité marginale décroissante :

- l'utilité croît de moins en moins vite au fur et à mesure que la richesse augmente
- la fonction d'utilité est alors concave

Principe de l'utilité espérée

Modèle plus général et plus plausible : explication (à condition de bien choisir u)

- du refus de paris favorables
- de l'acceptation de paris défavorables

Axiomatisation du principe de l'utilité espérée (1947) :

- si les préférences d'un décideur satisfont un ensemble de 6 axiomes, alors son comportement peut être décrit par le principe de maximisation de l'utilité espérée
- les axiomes sont formulés sur la base d'une relation de préférence/indifférence opérant sur l'ensemble des actions A

Principe de l'utilité espérée

Axiomatisation du principe de l'utilité :

- Fermeture : $(x, p, y) \in A$
- La relation de préférence/indifférence \geq est un pré-ordre sur A
où $>$ est la préférence stricte et \sim l'indifférence
- Réduction : $[(x, p, y), q, y] \sim (x, pq, y)$
- Substitution : si $x \sim y$ alors $(x, p, z) \sim (y, p, z)$
- Dominance : si $x > y$ alors $x > (x, p, y) > y$
- Continuité : si $x > y > z$ alors $\exists p / y \sim (x, p, z)$

Principe de l'utilité espérée

Théorème de Von Neumann et Morgenstern : si les axiomes précédents sont vérifiés, alors il existe une fonction d'utilité à valeur réelle u , définie sur A , telle que :

1. $x \geq y$ ssi $u(x) \geq u(y)$
2. $u(x, p, y) = pu(x) + (1 - p)u(y)$

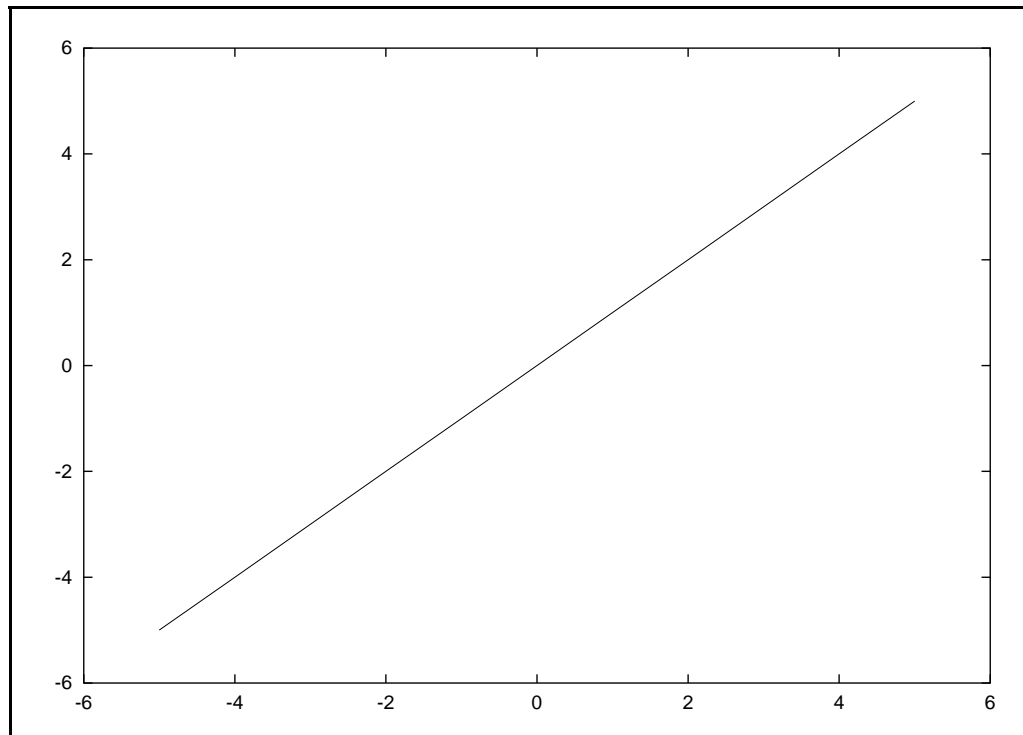
Comportement du décideur

Indifférence au risque :

- individu est indifférent au risque lorsqu'il est indifférent entre un jeu et le gain moyen que lui procure ce jeu
- est prêt à payer le gain moyen pour jouer à ce jeu
- situation caractérisée par une fonction d'utilité affine

Comportement du décideur

Indifférence au risque : la fonction d'utilité est affine



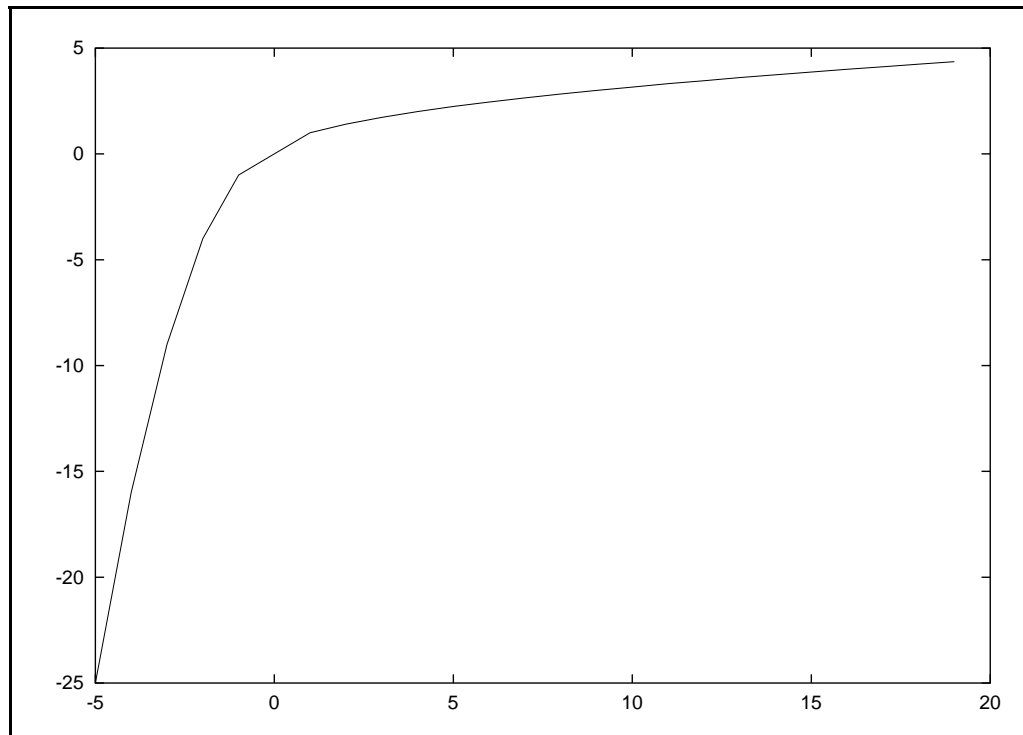
Comportement du décideur

Aversion pour le risque :

- individu préfère une valeur inférieure mais certaine à une situation où il risque de tout perdre
- on assure un véhicule avec une formule tous risques et vol
 - perte espérée (mathématiquement !) est bien inférieure aux primes payées
- la fonction d'utilité est dans ce cas concave

Comportement du décideur

Aversion au risque : la fonction d'utilité est concave



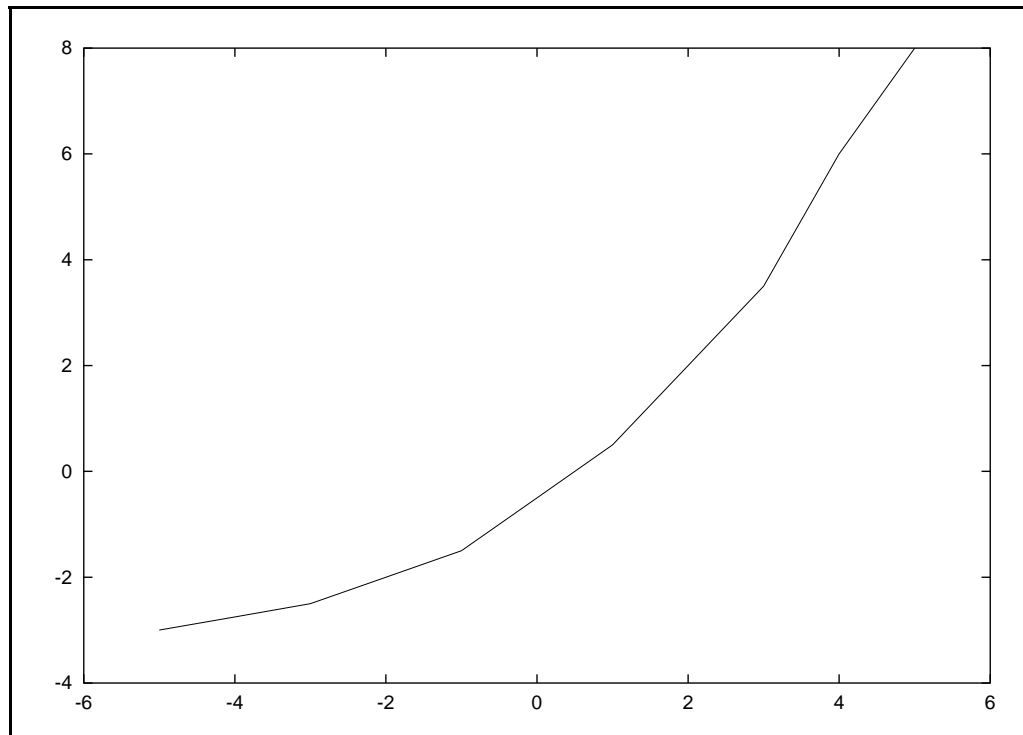
Comportement du décideur

Propension au risque :

- individu préfère un jeu à la possession sans risque de son gain moyen
- cas rare lorsque les sommes en jeu sont importantes (assurance)
- fréquent si le risque de perte est très faible et le gain possible très important
- la fonction d'utilité est dans ce cas convexe

Comportement du décideur

Propension au risque : la fonction d'utilité est convexe



Reste à résoudre . . .

- forme de la fonction u : additive ou multiplicative, etc. ?
- détermination des fonctions d'utilité partielles $u_i(\cdot)$:

fait d'obtenir une conséquence certaine e' jugé équivalent à courir le risque de recevoir soit $u_i(\underline{e})$ soit $u_i(\bar{e})$ avec des probabilités identiques ($u_i(\underline{e}) = 0$ et $u_i(\bar{e}) = 1$)

$$u_i(e') = \frac{1}{2}u_i(\underline{e}) + \frac{1}{2}u_i(\bar{e}) = \frac{1}{2}$$

etc.

$$u_i(e'') = \frac{1}{2}u_i(e') + \frac{1}{2}u_i(\underline{e}) = \frac{1}{4}$$

$$u_i(e''') = \frac{1}{2}u_i(\bar{e}) + \frac{1}{2}u_i(e') = \frac{3}{4}$$

mais aussi, variation des probabilités

Principales critiques

- Paradoxe d'Allais
- Expérience de Tversky et Kahneman
- Utilisation de probabilités numériques connues a priori
- Non pertinence cognitive du modèle

Principales critiques

Paradoxe d'Allais

Il est proposé à un ensemble de personnes deux situations avec décision fictive, composées de deux jeux chacune dont les gains sont exprimés en millions de dollars.

Pour chaque situation, les personnes réalisant l'expérience doivent choisir un jeu.

Principales critiques

Paradoxe d'Allais

Situation 1

Jeu 1

0,5 avec la probabilité 1

Jeu 2

2,5 avec la probabilité 0,10

0,5 avec la probabilité 0,89

0 avec la probabilité 0,01

Principales critiques

Paradoxe d'Allais

Situation 2

Jeu 3

0,5 avec la probabilité 0,11

0 avec la probabilité 0,89

Jeu 4

2,5 avec la probabilité 0,10

0 avec la probabilité 0,90

Principales critiques

Paradoxe d'Allais

Situation 1

la plupart des gens préfèrent le jeu 1 au jeu 2.

En même temps,

Situation 2

ils préfèrent le Jeu 4 au Jeu 3

⇒ **Résultat incompatible avec le théorie de l'utilité
(à monter en exercice).**

Principales critiques

Les effets de cadrage :

Tversky et Kahneman étudient l'influence sur les choix observés du cadre dans lequel ils sont présentés au sujet.

Ce cadre affecte la conception du décideur des actes, des conséquences et des contingences associées à un choix particulier.

Des variations dans le cadrage d'un même problème de décision peuvent produire des inversions de choix.

Les auteurs utilisent la métaphore de la montagne : “deux points différents à partir desquels on examine un paysage peuvent inverser les hauteurs relatives perçues de deux montagnes voisines”.

Principales critiques

Expériences de Tversky et Kahneman.

Scénario 1

Les USA doivent faire face à une épidémie inhabituelle de grippe asiatique dont on pense qu'elle fera 600 victimes. Deux programmes ont été proposés pour combattre ce fléau. Supposons que des experts aient évalué les conséquences de ces programmes :

- si le programme A est adopté, exactement 200 personnes seront sauvées
- si le programme B est adopté, la probabilité que les 600 personnes seront sauvées est de $1/3$ et la probabilité que les 600 personnes mourront est de $2/3$.

Principales critiques

Expériences de Tversky et Kahneman.

Scénario 2

Les USA doivent faire face à une épidémie inhabituelle de grippe asiatique dont on pense qu'elle fera 600 victimes. Deux programmes ont été proposés pour combattre ce fléau. Supposons que des experts aient évalué les conséquences de ces programmes :

- si le programme C est adopté, exactement 400 personnes mourront
- si le programme D est adopté, la probabilité que les 600 personnes seront sauvées est de $1/3$ et la probabilité que les 600 personnes mourront est de $2/3$.

Principales critiques

Les effets de cadrage : Expériences de Tversky et Kahneman.

Alors que 72% des sujets du premier groupe optent pour A, marquant ainsi leur aversion au risque; 22% seulement, dans le second groupe se prononcent pour. Les 78% restant choisissent le risque plutôt que la mort certaine!

Les sujets ont ainsi cadré différemment le même problème, les deux énoncés présentent les mêmes informations (400 victimes c'est-à-dire 200 rescapés vs. une chance sur trois que tout le monde soit sauvé). Ce qui change c'est le caractère explicite ou non de ces informations et cette modification suffit à transformer profondément la perspective du problème au point d'inverser les configurations de réponse.

Principales critiques

Conclusions :

- Modèle non conforme aux comportements observés
- Reste cependant très utilisé dans de nombreux domaines
- micro-économie
- choix de l'emplacement d'une centrale nucléaire
- etc.
- Développement
- l'utilité subjectivement espérée (probabilités subjectives)
- Prospect theory : rend compte des phénomènes d'inversion de préférences